УДК 515.168.5

Л. Л. Нгуен

Российский университет дружбы народов

Задачи Соболева для действий конечных групп

Рассматриваются нелокальные задачи Соболева, отвечающие действиям конечных групп на гладких многообразиях. С помощью теории эллиптических трансляторов и G-трансляторов получены условия эллиптичности, установлены теорема конечности и формула индекса для рассматриваемых задач.

Ключевые слова: эллиптические операторы, краевые задачи для эллиптических уравнений, стратифицированные многообразия, G-трансляторы, задачи Соболева.

1. Введение

Пусть M – n-мерное гладкое компактное многообразие и X – его подмногообразие. Пусть D – эллиптический оператор на многообразии M. Мы будем искать решение сравнения

$$Du \equiv f \mod X, \tag{1}$$

которое означает, что равенство $Du = f$ выполняется всюду на многообразии M, за исключением точек подмногообразия X. Сравнение (1) не определяет, вообще говоря, фредгольмов оператор. Однако если задать дополнительно некоторый оператор B на подмногообразии X, связанный специальным условием (коэрцитивности) в точках подмногообразия X с оператором D, то пара (D, B) будет уже определять оператор Фредгольма в подходящих функциональных пространствах. Впервые этот эффект заметил С.Л. Соболев (см. [1]). Общая постановка и исследование этой проблемы принадлежат Б.Ю. Стернину (см. [2]). Впоследствии теория таких задач была развита не только для гладких подмногообразий, но также для подмногообразий с особенностями.

В работе строится эллиптическая теория для одного класса *нелокальных задач Соболева*, или, более точно, задач Соболева, в которые входят операторы сдвига, отвечающие действию некоторой данной группы на многообразии M.

2. Постановка нелокальных задач Соболева

Пусть G – конечная группа порядка N и пусть задано бесконечно дифференцируемое левое действие группы G на гладком замкнутом многообразии M, т.е. задан гомоморфизм группы G в группу диффеоморфизмов многообразия M. При этом любой диффеоморфизм g естественным образом порождает в пространствах функций, заданных на M, оператор T_g:

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x), \quad x \in M,$$

называемый *оператором сдвига.*

Если диффеоморфизмы g_i $(i = 0, \dots, N-1)$ задают действие группы G на M, то операторы T_{g_i} задают представление группы G в пространстве функций.

Эллиптическая теория для псевдодифференциальных операторов с конечной группой сдвигов вида

$$D = \sum_{g \in G} D_g \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) T_g,$$

где D_g – псевдодифференциальный оператор (ПДО) порядка m на M, была построена А.Б. Антоневичем в [3].

Пусть X – подмногообразие коразмерности ν в M.

Определение 1. *Задачей Соболева с конечной группой сдвигов* на многообразии M будем называть следующую задачу:

$$\begin{cases} Du \equiv f \mod H^{s-m}(M,X), \\ Bu = h \quad \text{на} \quad X, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$D = \sum_{g\in G} D_g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) T_g, \quad B = \sum_{g\in G} B_g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) T_g$$

– псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов на M,
D_g – ПДО порядка не выше m, B_g – ПДО порядка не выше b,

$$u \in H^s(M),\ f \in H^{s-m}(M)/H^{s-m}(M,X),\ h \in H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X),\ s-b-\frac{\nu}{2} > 0,$$

где $H^{s-m}(M,X)$ – подпространство пространства Соболева $H^{s-m}(M)$, которое состоит из функций (распределений), сосредоточенных на подмногообразии X.

Замечание 1. Отметим, что в определении 1 не требуется, чтобы подмногообразие X было G-инвариантным.

Цель работы состоит в том, чтобы дать условия, при которых задача (2) фредгольмова и вычислить её индекс. Решение этих проблем, которое даётся в данной работе, опирается на теорию трансляторов и G-трансляторов. Напомним необходимые сведения из этих теорий.

3. Трансляторы и G-трансляторы

При изучении задачи Соболева для граничных подмногообразий с особенностями возникает новый класс операторов, которые называются *трансляторами.* Такие операторы впервые были введены в 1971 г. в работе [4] (см. также [5–8]). Они определяются следующим образом. Пусть граничное подмногообразие представляет собой объединение некоторого числа k гладких подмногообразий $\bigcup_p Y^p$, $p = 1,\ldots,k$, пересекающихся трансверсально по гладкому подмногообразию. Транслятор, ассоциированный с парой $(M, \bigcup_p Y^p)$, имеет вид

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} D^0_{11} & T_{12} & .. & T_{1k} \\ T_{21} & D^0_{22} & .. & T_{2k} \\ .. & .. & .. & \\ T_{k1} & T_{k2} & .. & D^0_{kk} \end{pmatrix} : \oplus_p H^{s_p}(Y^{s_p}) \to \oplus_p H^{s_p}(Y^{s_p}),$$

где

$$T_{pq} = D^1_{pq} i^*_p D^2_{pq} i_{q*} D^3_{pq} : H^{s_q}(Y^q) \to H^{s_p}(Y^p)$$

– элементарные трансляторы, D^j_{pq} – псевдодифференциальные операторы порядков d^j_{pq} на соответствующих многообразиях, ν_p – коразмерность Y^p в M,

$$i^*_p : H^s(M) \to H^{s-\nu_p/2}(Y^p)$$

– граничный оператор, индуцированный вложением $i_p : Y^p \to M$,

$$i_{p*} : H^{-s+\nu_p/2}(Y^p) \to H^{-s}(M)$$

– кограничный оператор, двойственный к i^*_p.

Пусть теперь на M действует группа G, как и в параграфе 1, а подмногообразие с особенностями $\bigcup_p Y^p$ является G-инвариантным. Если транслятор $\mathcal{T}$ является G-инвариантным, т.е. он коммутирует с действием группы G, то отвечающий ему G-*транслятор* $\mathcal{T}^G$ определяется как сужение $\mathcal{T}$ на пространство инвариантных функций относительно действия группы G. Эллиптическая теория для трансляторов была построена в работах [6–8], а для G-трансляторов — в работах [9, 10].

4. Эллиптичность и теорема конечности

Для простоты записи допустим, что $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$, и соответствующие операторы сдвига обозначим через Id, T. Действие произвольной конечной группы рассматривается аналогично.

Задача (2) может быть переписана в следующем виде (ср. [11]):

$$\begin{cases} (D_1 + D_2T)u + i^L_{*X}v = f, \\ i^*_X(B_1 + B_2T)u = h, \end{cases} \tag{3}$$

где v – вектор-функция на подмногообразии X, i^*_X – граничный оператор, индуцированный вложением $i : X \to M$, i^L_{*X} – кограничный оператор, отвечающий оператору джета по переменным трансверсальным к подмногообразию X. В локальных координатах этот оператор содержит все производные по трансверсальным переменным до порядка L, который определяется следующим соотношением:

$$L = \begin{cases} [m - s - \nu/2], & \text{если } m - s - \nu/2 \text{ — не целое число,} \\ m - s - \nu/2 - 1, & \text{если } m - s - \nu/2 \text{ — целое число.} \end{cases}$$

Задачу (3) будем обозначать (D, B).

Применяя оператор сдвига T к каждому уравнению системы (3), получим систему

$$\begin{cases} (D_1 + D_2T)u + i^L_{*X}v = f, \\ (TD_1 + TD_2T)u + Ti^L_{*X}v = Tf, \\ i^*_X(B_1 + B_2T)u = h, \\ Ti^*_X(B_1 + B_2T)u = Th. \end{cases} \tag{4}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$Ti^*_X = i^*_{gX}T, \quad Ti^L_{*X} = i^L_{*gX}T, \tag{5}$$

где i^*_{gX}, i^L_{*gX} *– граничный и кограничный операторы, соответствующие вложению* $i_{gX} : gX \to M$.

Доказательство. Так как $gi_X = i_{gX}g$, то отсюда следует

$$i^*_X g^* = g^* i^*_{gX}, \text{ или } i^*_X T^{-1} = T^{-1} i^*_{gX}.$$

Отсюда следует первое соотношение в (5), так как $T^{-1} = T$. Второе соотношение в (5) следует из первого соотношения в силу двойственности.

С помощью леммы 1 мы можем переписать систему (4) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & i^L_{*X} & 0 \\ TD_2T & TD_1T^{-1} & 0 & i^L_{*gX} \\ i^*_X B_1 & i^*_X B_2 & 0 & 0 \\ i^*_{gX}TB_2T & i^*_{gX}TB_1T^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ Tu \\ v \\ Tv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Tf \\ h \\ Th \end{pmatrix}, \tag{6}$$

Обозначим последний оператор через Φ. Этот оператор запишем в блочном виде:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbb{D} & \operatorname{diag}(i^L_{*X}, i^L_{*gX}) \\ \operatorname{diag}(i^*_X, i^*_{gX})\mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^s(M) \\ H^s(M) \\ H^{s-m+\nu/2}(X) \\ H^{s-m+\nu/2}(gX) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} H^{s-m}(M) \\ H^{s-m}(M) \\ H^{s-b-\nu/2}(X) \\ H^{s-b-\nu/2}(gX) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

здесь

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ TD_2T & TD_1T \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ TB_2T & TB_1T \end{pmatrix}.$$

В формуле (7) и ниже мы для краткости опускаем числа компонент вектор-функций на подмногообразиях X и gX.

Оператор Φ будет непрерывным оператором, если выполнены неравенства

$$b+\nu/2<s<m-\nu/2.$$

Напомним, что для псевдодифференциального оператора A оператор $TAT = TAT^{-1}$ также является псевдодифференциальным, и имеется следующее равенство для символов:

$$\sigma(TAT)(x,\xi)=\sigma(A)(g(x),L_g\xi),$$

где L_g — матрица, обратная к транспонированной матрице Якоби преобразования g. В частности, операторы $\mathbb{D}$ и $\mathbb{B}$ являются псевдодифференциальными.

Замечание 2. В уравнении (6) матричный оператор Φ действует только на вектор-функции вида

$$(u,Tu,v,Tv),\quad \text{где } u\in H^s(M),\ v\in H^{s-b-\nu/2}(X). \tag{8}$$

Пусть на пространстве вектор-функций $(H^{s-m}(M)\oplus H^{s-m}(M)\oplus H^{s-b-\nu/2}(X)\oplus H^{s-b-\nu/2}(gX))$ определено действие группы G в следующем виде:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & T\\ T & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & T\\ T & 0\end{pmatrix}\right),$$

тогда по построению можно проверить, что оператор Φ является G-инвариантным, при этом существует сужение Φ^G в пространстве G-инвариантных функций вида (8). Отсюда следует

Предложение 1. Задача (3) эквивалентна задаче, отвечающей оператору Φ^G.

Далее, используя стандартную процедуру (см., например, [11]), получим следующее

Предложение 2. Если оператор $\mathbb{D}$ является эллиптическим, то оператор Φ^G фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов следующий оператор:

$$\mathbb{T}^G=\operatorname{diag}(i_X^*,i_{gX}^*)\mathbb{B}\mathbb{D}^{-1}\operatorname{diag}(i_{*X}^L,i_{*gX}^L):$$
$$:\begin{pmatrix}H^{s-m+\nu/2}(X)\\ H^{s-m+\nu/2}(gX)\end{pmatrix}^G\to\begin{pmatrix}H^{s-b-\nu/2}(X)\\ H^{s-b-\nu/2}(gX)\end{pmatrix}^G,$$

где $\begin{pmatrix}H^{s-b-\nu/2}(X)\\ H^{s-b-\nu/2}(gX)\end{pmatrix}^G$ – пространство вектор-функций вида (v,Tv), $v\in H^{s-b-\nu/2}(X)$.

Выясним тип оператора $\mathbb{T}^G$.

Предложение 3. Оператор $\mathbb{T}^G$ есть G-транслятор.

Доказательство. Так как операторы $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$ являются псевдодифференциальными, то по определению оператор $\mathbb{T}$ будет транслятором, ассоциированным с парой многообразий $(M, X\cup gX)$. Теперь надо показать, что он инвариантен относительно действия группы G и действует на пространстве G-инвариантных функций.

Прямой подстановкой мы можем проверить, что коммутатор оператора $\mathbb{T}$ и оператора

$$\begin{pmatrix}0 & T\\ T & 0\end{pmatrix},$$

определяющего действие группы G, равен нулю. Причем из замечания 2 получим, что оператор $\mathbb{T}^G$ действует только на пространстве функций вида (u,Tu), т.е. на инвариантном относительно действия группы G. Следовательно, оператор $\mathbb{T}^G$ является G-транслятором.

Определение 2. Задача Соболева с конечной группой сдвигов (3) называется *эллиптической*, если выполнены следующие условия:

1) псевдодифференциальный оператор $\mathbb{D}$ является эллиптическим,

2) оператор $\mathbb{T}^G$ является эллиптическим G-транслятором в смысле работ [9, 10].

Теорема 1. *Если задача Соболева с конечной группой сдвигов эллиптична, то она фредгольмова.*

Доказательство. Действительно, если выполняются условия эллиптичности, то для операторов $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}^G$ существуют почти обратные. Пользуясь стандартным методом решения системы уравнения, мы можем найти и почти обратный для оператора Φ^G, что означает фредгольмовость задачи (3).

Поскольку задача (3) может быть редуцирована к оператору Φ^G и при условии эллиптичности $\mathbb{D}$ к G-транслятору $\mathbb{T}^G$, то отсюда получаем формулу индекса.

Следствие 1. *(Об индексе задачи Соболева с конечной группой сдвигов.)*

$$\mathrm{ind}(\mathrm{D}, \mathrm{B}) = \mathrm{ind}\mathbb{D}^{\mathrm{G}} + \mathrm{ind}\mathbb{T}^{\mathrm{G}}.$$

Отметим, что индекс оператора $\mathbb{D}^G$ вычислен в [3]. Индекс оператора $\mathbb{T}^G$ можно вычислить применяя методы работы [6](см. [12]).

5. Пример

Пусть на многообразии $M = \mathbb{T}^4$ с координатами x^1, x^2, y^1, y^2 действует группа $G = \mathbb{Z}_2$ по правилу

$$g(x^1, x^2, y^1, y^2) = (y^1, y^2, x^1, x^2),$$

а подмногообразия X и gX – его образ при действии группы G – определяются следующим образом:

$$X = \{y^1 = y^2 = 0\}, \quad gX = \{x^1 = x^2 = 0\}.$$

Рассмотрим задачу Соболева с группой сдвигов $\mathbb{Z}_2$ на M:

$$\begin{cases} \Delta^2 u \equiv f \mod H^{s-4}(M, X), \\ (1 + \lambda T)u = g \quad \text{на} \quad X, \end{cases} \tag{9}$$

где Δ – положительный оператор Лапласа на $\mathbb{T}^4$, λ – ненулевой вещественный параметр. При этом для простоты рассмотрим интервал $2 < s < 3$. Для этого интервала максимальный порядок производной по трансверсальным переменным равен нулю.

Прямое вычисление показывает, что эта задача сводится к G-транслятору:

$$\begin{gathered} \mathbb{T}^G = \begin{pmatrix} 1 & \lambda i_X^* \Delta^{-2} i_{*gX} (i_{gX}^* \Delta^{-2} i_{*gX})^{-1} \\ \lambda i_{gX}^* \Delta^{-2} i_{*X} (i_X^* \Delta^{-2} i_{*X})^{-1} & 1 \end{pmatrix} : \\ : \begin{pmatrix} H^{s-1}(X) \\ H^{s-1}(gX) \end{pmatrix}^G \to \begin{pmatrix} H^{s-1}(X) \\ H^{s-1}(gX) \end{pmatrix}^G . \end{gathered} \tag{10}$$

Предложение 4. Оператор $(i_X^* \Delta^{-2} i_{*X})^{-1}$ с точностью до компактного оператора равен оператору Лапласа на подмногообразии X, умноженному на 4π.

Доказательство. Пусть $B(x, y, \partial/\partial x, \partial/\partial y)$ – псевдодифференциальный оператор на M с символом $\sigma(B)(x, y, \xi, \mu)$, где ξ, μ – двойственные переменные к x, y, тогда $i_X^* B i_{*X}$ – псевдодифференциальный оператор на X. Имеет место равенство (см. [5])

$$\sigma(i_X^* B i_{*X})(x, \xi) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, 0, \xi, \mu) d\mu.$$

Применяя этот результат к оператору $B = \Delta^{-2}$, получим

$$\sigma(i_X^* \Delta^{-2} i_{*X})(\xi_1, \xi_2) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2)^2} d\mu_1 d\mu_2.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\sigma(i_X^*\Delta^{-2}i_{*X})(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(\xi_1^2+\xi_2^2+r^2)^2} = \frac{1}{4\pi(\xi_1^2+\xi_2^2)}.$$

Итак, компоненты транслятора (10) определяются следующим образом:

$$T_{12} = D_{12}^1 i_1^* D_{12}^2 i_{2*} D_{12}^3 : H^{s-1}(gX) \to H^{s-1}(X),$$

$$T_{21} = D_{21}^1 i_2^* D_{21}^2 i_{1*} D_{21}^3 : H^{s-1}(X) \to H^{s-1}(gX),$$

где символы соответствующих ПДО имеют вид

$$D_{12}^1(\xi) = \lambda,\ D_{12}^2(\xi,\eta) = \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2)^2},\ D_{12}^3(\eta) = 4\pi(\eta_1^2+\eta_2^2),$$

$$D_{21}^1(\eta) = \lambda,\ D_{21}^2(\xi,\eta) = \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2)^2},\ D_{21}^3(\xi) = 4\pi(\xi_1^2+\xi_2^2).$$

Теперь исследуем символ $\sigma(\mathbb{T})$ транслятора.

Напомним, что символ $\sigma(\mathbb{T})(z)$ транслятора (10) вычисляется следующим образом (см. [7]). Заморозим коэффициенты оператора $\mathbb{T}$ в начале координат и сделаем преобразование Фурье от переменных x, y к двойственным переменным ξ, η. Получим интегральный оператор T'. Далее переходим в сферическую систему координат: $(\xi_1,\xi_2) \to (r_1,\omega_1)$, $(\eta_1,\eta_2) \to (r_2,\omega_2)$. Редукция оператора T' к меллиновской свертке по радиальным переменным с последующим применением преобразования Меллина приводит к оператору умножения на символ:

$$\sigma(\mathbb{T})(z) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{K}_{12}(z) \\ \hat{K}_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} : \oplus_p L^2(\mathbb{S}^1) \to \oplus_p L^2(\mathbb{S}^1).$$

Здесь компонента $\hat{K}_{pq}(z)$ является результатом применения преобразования Меллина по радиальной переменной r к интегральному оператору $K_{pq}(r)$ с ядром:

$$K_{pq}(r,\omega_p,\omega_q) = D_{pq}^1(\omega_p)D_{pq}^2(r\omega_p,\omega_q)D_{pq}^3(\omega_q), \quad r = \frac{r_p}{r_q}.$$

В связи с тем, что оператор $\mathbb{T}$ является G-инвариантным, его символ $\sigma(\mathbb{T})$ сужается на пространство инвариантных функций $(u(\omega_1), u(\omega_2))$. Поэтому мы можем записать действие символа $\sigma(\mathbb{T}^G)(z)$(см. [9]) в следующем виде:

$$u(\omega_1) + 4\lambda\pi\varphi(z)\int_{-\pi}^{\pi}u(\omega_2)d\omega_2 = v(\omega_1), \tag{11}$$

где при $2 < \mathsf{Re}z = s < 3$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{r^z}{(r^2+1)^2}\frac{dr}{r} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{z}{2}-1}}{(r+1)^2}dr.$$

Применяя следующую формулу для Г-функции

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt, \quad \mathsf{Re}x > 0,\ \mathsf{Re}y > 0,$$

получим явный вид для функции $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(2-\frac{z}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}-1\right)\Gamma\left(2-\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{(\frac{z}{2}-1)\pi}{\sin(\frac{z}{2}-1)\pi}.$$

Напомним, что G-транслятор (10) эллиптичен, если его символ обратим всюду на прямой $\mathsf{Re} z = s$. Решение уравнения (11) имеет вид

$$u(\omega_1) = v(\omega_1) - 4\lambda\pi\varphi(z)(1 + 8\lambda\pi^2\varphi(z))^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} v(\omega_2)d\omega_2.$$

Следовательно, символ $\sigma(\mathbb{T}^G)(z)$ обратим всюду на прямой $\mathsf{Re} z = s$ тогда и только тогда, когда функция $\theta(z) = 1 + 8\pi^2\lambda\varphi(z)$ не принимает нулевое значение всюду на этой прямой.

Ниже для простоты записи будем использовать обозначения

$$\lambda' = 2\pi\sqrt{2\pi}\lambda,\ z' = \pi\left(\frac{z}{2} - 1\right) = \alpha + \beta i,\ \alpha = \pi\left(\frac{s}{2} - 1\right).$$

Тогда в полосе $0 < \mathsf{Re} z' < \frac{\pi}{2}$ рассмотрим следующую функцию:

$$\theta(z') = \sin z' + \lambda' z'.$$

Если $\beta = 0$, то

$$\theta(z') = 0 \iff \lambda' = -\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

а если $\beta \neq 0$, то функцию $\theta(z')$ можно переписать в следующем виде:

$$\theta(z') = \sin z' + \lambda' z' = \sin\alpha \operatorname{ch}\beta + \lambda'\alpha + (\cos\alpha \operatorname{sh}\beta + \lambda'\beta)i,$$

Эта функция обращается в нуль, если её вещественная часть и мнимая часть равны нулю:

$$\begin{cases} \sin\alpha \operatorname{ch}\beta + \lambda'\alpha = 0, \\ \cos\alpha \operatorname{sh}\beta + \lambda'\beta = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{\operatorname{th}\beta}{\beta}.$$

Однако последнее условие противоречит тому, что

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} > 1 \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\operatorname{th}\beta}{\beta} \leqslant 1 \ \text{ при } \forall\ \beta \in (-\infty, \infty). \tag{12}$$

Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что задача (9) эллиптична, если

$$\lambda \neq -\frac{\sin\pi(\frac{s}{2} - 1)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}(\frac{s}{2} - 1)}.$$

Далее будем предполагать, что задача (9) является эллиптической. Вычислим её индекс. Так как в этом примере $\mathbb{D}$ есть оператор Лапласа, который имеет нулевой индекс, то достаточно найти индекс оператора (10).

Через $\operatorname{ind}_s(\mathbb{T}^G)$ обозначаем индекс G-транслятора (10), действующего в пространстве $\left(H^{s-1}(X) \oplus H^{s-1}(gX)\right)^G$, он равен числу вращения обратимой функции $\sigma(\mathbb{T}^G)(z)$ (ср. [10]):

$$\operatorname{ind}_s(\mathbb{T}^G) = w_s(\sigma(\mathbb{T}^G))$$

при изменении z на весовой прямой $\mathsf{Re} z = s$ по направлению сверху вниз. Так как $\sigma(\mathbb{T}^G)(z)$ имеет вид (11), то число вращения семейства $\sigma(\mathbb{T}^G)(z)$ просто равно числу вращения скалярной функции:

$$\varphi(z) = 1 + \lambda'\frac{z}{\sin z} \tag{13}$$

на прямой $\mathsf{Re} z = \alpha = \pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)$.

Рассмотрим разбиение полосы значений параметров (λ', α), $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$A = \{\lambda' > -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\}, \quad B = \{-1 < \lambda' < -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\}, \quad C = \{\lambda' \leqslant -1\}.$$

Сначала ищем индекс в области A.

Покажем, что в области А образ прямой $\mathsf{Re} z = \alpha$ комплексной плоскости при отображении $z \to \varphi(z)$ не пересекается с отрицательным лучом вещественной оси, то есть число вращения функции $\varphi(z)$ равно нулю.

В самом деле, заметим, что

$$\mathsf{Im}\,\varphi(z) = \frac{\beta\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta - \alpha\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta}{|\sin(\alpha+i\beta)|^2}\lambda'.$$

Следовательно,

$$\mathsf{Im}\varphi(z) = 0 \iff \beta\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha} = \mathrm{th}\beta.$$

Поэтому, сравнивая последнее с (12), делаем вывод, что мнимая часть функции $\varphi(z)$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\beta = 0$.

Далее, подставляя $\beta = 0$ в (13), получим

$$\mathsf{Re}\,\varphi(z) = 1 + \lambda'\frac{\alpha}{\sin\alpha} > 0.$$

Итак, индекс задачи (9) в области A равен нулю. Теперь вычисляем индекс в области B с помощью относительной теоремы об индексе (см. [7]).

Для каждой точки (λ', α_1) области B существуют числа α_0, α_2 со следующими свойствами:

1) точка (λ', α_0) находится на границе между областями A и B, т.е. $\lambda' = -\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}$ (α_0 соответствует особое значение $s_0 = 2(\frac{\alpha_0}{\pi}+1)$, при котором задача (9) не эллиптична),

2) точка (λ', α_2) принадлежит области A т.е. $0 < \alpha_2 < \alpha_0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим разложение Тейлора функции $\varphi(z)$ в окрестности точки α_0:

$$1 + \lambda'\frac{z}{\sin z} = 1 + \left(-\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}\right)\frac{\alpha_0 + (z-\alpha_0)}{\sin\alpha_0 + (z-\alpha_0)\cos\alpha_0 + O((z-\alpha_0)^2)} =$$

$$= (z-\alpha_0)\frac{\alpha_0\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0}{\alpha_0} + O((z-\alpha_0)^2).$$

Поэтому число полюсов функции $\varphi(z)^{-1}$ в полосе комплексной плоскости между прямыми $\mathsf{Re}z = \alpha_1$ и $\mathsf{Re}z = \alpha_2$ равно 1. А так как $\alpha_2 < \alpha_1$, то индекс в области A будет равен

$$\mathrm{ind}_{\alpha_1}(\mathbb{T}^{\mathrm{G}}) = \mathrm{ind}_{\alpha_2}(\mathbb{T}^{\mathrm{G}}) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Далее из соображений непрерывности следует, что индекс задачи (9) в области C равен индексу в области B.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Задача* (9) *эллиптична, если выполняются следующие условия:*

$$2 < s < 3, \quad \lambda \neq -\frac{\sin\pi(\frac{s}{2}-1)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}(\frac{s}{2}-1)}.$$

При выполнении этих условий индекс задачи (9)

1) *равен 0, если* $\lambda > -\frac{\sin\pi(\frac{s}{2}-1)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}(\frac{s}{2}-1)}$;

2) *равен* -1, *если* $\lambda < -\frac{\sin\pi(\frac{s}{2}-1)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}(\frac{s}{2}-1)}$.

Замечание 3. В предыдущем примере нелокальный оператор присутствует только в граничном условии. Однако этим же методом можно рассмотреть задачи Соболева с конечной группой сдвигов, в которых нелокальный оператор присутствует в основном уравнении. Например, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} ((\partial_x^2+\partial_y^2)-\sqrt{2}\partial_x^2 T)u \equiv f \mod H^{s-2}(M,X), \\ u = g \quad \text{на} \quad X. \end{cases}$$

И соответственно задача может быть сведена к G-транслятору:

$$\mathbb{T}^G = \begin{pmatrix} 1 & i_X^* \frac{\partial_x^2}{\partial_x^4+\partial_y^4} i_{*gX}(i_{gX}^* \frac{\partial_x^2+\partial_y^2}{\partial_x^4+\partial_y^4} i_{*gX})^{-1} \\ i_X^* \frac{\partial_y^2}{\partial_x^4+\partial_y^4} i_{*gX}(i_X^* \frac{\partial_x^2+\partial_y^2}{\partial_x^4+\partial_y^4} i_{*X})^{-1} & 1 \end{pmatrix} :$$

$$: \begin{pmatrix} H^{s+1}(X) \\ H^{s+1}(gX) \end{pmatrix}^G \to \begin{pmatrix} H^{s+1}(X) \\ H^{s+1}(gX) \end{pmatrix}^G .$$

Литература

1. *Соболев С. Л.* Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения // Математический сборник. — 1937. — Т. 2, № 3. — С. 467–500.
2. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды Моск. мат. общ-ва. — 1966. — № 15. — С. 346–382.
3. *Антоневич А. Б.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 663–675.
4. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора) // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 1. — С. 45–48.
5. *Стернин Б. Ю.* Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями. — М.: МИЭМ, 1971. — 84 с.
6. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических трансляторов // Доклады академии наук. — 2011. — Т. 436, № 4. — С. 443–447.
7. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с особенностями. I. Точечные особенности // Дифференциальные уравнения. — 2011 (в печати).
8. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с особенностями. II. Многомерные особенности // Дифференциальные уравнения. — 2011 (в печати).
9. *Нгуен Л. Л.* Об эллиптичности G-трансляторов на многообразиях с изолированными особенностями // Вестник РУДН. Серия Математика. — 2011. — № 3. — С. 24–33.
10. *Нгуен Л. Л.* О фредгольмовых оснащениях G-трансляторов // Дифференциальные уравнения. — Т. 48, № 8. — 2012. — С. 1204–1208.
11. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Относительная эллиптическая теория и задача Соболева // Математический сборник. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 115–144.
12. *Нгуен Л. Л.* G-трансляторы на многообразиях с изолированными особенностями // Труды 54-й научной конференции МФТИ. — 2011. — № 1. — С. 35–36.

Поступила в редакцию 18.02.2012.