УДК 519.175.4

Е. А. Гречников

Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

Арифметические свойства вторых степеней вершин случайного веб-графа в модели Боллобаша–Риордана

В настоящей работе изучается модель Боллобаша–Риордана случайного веб-графа. Рассматривается математическое ожидание числа вершин заданной второй степени в таком случайном графе, и доказывается, что одна из его главных составляющих является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами от 1, $\ln 2$ и π.

Ключевые слова: случайный граф, веб-граф, степень вершины.

1. Введение и формулировка результата

Настоящая работа связана с исследованием модели случайного веб-графа, которая была предложена Б. Боллобашем и О. Риорданом в 2000 году (см. [1]). Модель устроена очень просто. Сперва строится последовательность графов G_1^n, у каждого из которых n вершин и n ребер; затем из построенной последовательности образуются графы G_k^n, имеющие n вершин и kn ребер ($k \in \mathbb{N}$). А именно, граф G_1^1 — это граф с одной вершиной и одной петлей; если граф G_1^{n-1} с вершинами $\{1, \ldots, n-1\}$ построен, то мы добавляем к нему одну вершину n и одно ребро, выходящее из новой вершины: с вероятностью $\frac{1}{2n-1}$ новое ребро является петлей, а с вероятностью $\frac{\deg i}{2n-1}$ оно имеет $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ своим вторым концом. Граф G_k^n получается из графа G_1^{kn} склейкой вершин $1, \ldots, k$ в одну вершину, вершин $k+1, \ldots, 2k$ — во вторую вершину и т.д.

Модель Боллобаша–Риордана описывает рост интернета и является достаточно адекватной в том смысле, что многие ее характеристики очень близки к статистическим характеристикам реального веба. Например, у случайного веб-графа с высокой вероятностью правильный диаметр (см. [2]), а степени вершин в этой модели подчиняются степенному закону (см. [1]).

Недавно Л.А. Остроумова начала исследование так называемых вторых степеней вершин графа в модели. В ее работе [3] речь идет о графе G_1^n и величине

$$d_2(t) = \#\{ij : i \neq t, j \neq t, it \in G_1^n, ij \in G_1^n\}.$$

Здесь ij — ребро с вершинами i, j. В статье [4] найдена асимптотика для среднего значения величины $d_2(t)$.

Теорема 1. *Математическое ожидание числа вершин второй степени d в графе G_1^n имеет вид*

$$M\#\{t \in G_1^n :\ d_2(t) = d\} = \frac{4n}{d^2}\left(1 + O\left(\frac{\ln^2 d}{d}\right) + O\left(\frac{d^2}{n}\right)\right).$$

Основным ингредиентом в доказательстве теоремы 1 служит следующее утверждение, доказанное Остроумовой.

Теорема 2. *Положим*

$$N_n(l,k) = \#\{t \in G_1^n : \deg\, t = l, d_2(t) = k, tt \notin G_1^n\}.$$

Тогда

$$MN_n(l,k) = n\, c(l,k)\,(1 + \theta(n,l,k)),$$

где $|\theta(n,l,k)| < (2l+k-1)^2/n$, *а константы* $c(l,k)$ *определяются так:*

$$c(l,0) = c(0,k) = 0,$$
$$c(1,k) = \frac{2k^2+14k}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)},$$
$$c(l,k) = c(l,k-1)\frac{l+k-1}{2l+k+2} + c(l-1,k)\frac{l-1}{2l+k+2}, \quad k>0, l>1.$$

Явное решение рекуррентных соотношений для констант из теоремы 2 получить не удается. Но важны даже не сами эти константы, а их сумма по всем l. Дело в том, что в статье [3] доказано, что главный член асимптотики величины из теоремы 1 равен главному члену асимптотики суммы $\sum_{l=1}^{\infty} N_n(l,d)$ и равен $n\sum_{l=1}^{\infty} c(l,d)$.

Нам удается доказать следующий результат.

Теорема 3. *Величина* $\sum\limits_{l=1}^{\infty} c(l,k)$ *представляет собой линейную комбинацию с рациональными коэффициентами от* 1, $\ln 2$ *и* π.

Это и есть основной результат нашей статьи.

2. Доказательство теоремы 3

Выражение $\frac{1}{n!!}$ имеет хорошо известный смысл при $n \in \mathbb{N}$, причем

$$\frac{n+2}{(n+2)!!} = \frac{1}{n!!}.$$

Доопределим это выражение на все $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы равенство сохранялось. Легко видеть, что такое доопределение единственно, причем $\frac{1}{0!!} = 1$, $\frac{1}{(-2N)!!} = 0$, $\frac{1}{(-1)!!} = 1$ и $\frac{1}{(-2N-1)!!} = (-1)^N(2N-1)!!$ при $N \in \mathbb{N}$. Положим заодно $(-1)!! = 1$.

Пусть числа $a_{k,s}$ определены при $k \geqslant 0$, $s \in \mathbb{Z}$ рекуррентно следующим образом:

$$a_{0,s} = 0,$$
$$a_{k+1,s} = \frac{a_{k,s} + (4k-3-s)a_{k,s-2}}{2(3k-s)}, \quad s \neq 3k,$$
$$a_{k,3(k-1)} = (k+4)!!\left(\frac{2k^2+14k}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \sum_{s\neq 3(k-1)} \frac{a_{k,s}}{(7-2k+s)!!}\right), \quad k \geqslant 1.$$

По индукции легко доказать, что $a_{k,s} = 0$ при $s < 0$ и при $s > 3(k-1)$, так что все возникающие суммы по s содержат только конечное число ненулевых слагаемых.

Мы утверждаем, что

$$c(l,k) = (l-1)!\sum_s \frac{a_{k,s}}{(2l-2k+5+s)!!}.$$

Действительно, проверка для $l = 1$ и проверка для $k = 0$ очевидны, так что остается проверить выполнение рекуррентного соотношения:

$$c(l, k+1) - c(l-1, k+1)\frac{l-1}{2l+k+3} =$$
$$= \frac{(l-1)!}{2l+k+3}\sum_s a_{k+1,s}\left(\frac{2l+k+3}{(2l-2k+3+s)!!} - \frac{1}{(2l-2k+1+s)!!}\right) =$$
$$= \frac{(l-1)!}{2l+k+3}\sum_s \frac{a_{k+1,s}((2l+k+3)-(2l-2k+3+s))}{(2l-2k+3+s)!!} = \frac{(l-1)!}{2l+k+3}\sum_s \frac{a_{k+1,s}(3k-s)}{(2l-2k+3+s)!!} =$$
$$= \frac{(l-1)!}{2(2l+k+3)}\sum_s \frac{a_{k,s}+(4k-3-s)a_{k,s-2}}{(2l-2k+3+s)!!}.$$

(При $s \neq 3k$ выражение для $a_{k+1,s}(3k-s)$ заложено в рекуррентное соотношение, при $s = 3k$ имеем $3k - s = 0 = a_{k,s} = a_{k,s-2}$.) Последнюю сумму разобьем на две, во второй сдвинем индекс суммирования на 2, после чего снова объединим:

$$c(l, k+1) - c(l-1, k+1)\frac{l-1}{2l+k+3} = \frac{(l-1)!}{2(2l+k+3)}\sum_s \frac{a_{k,s}((2l-2k+5+s)+(4k-5-s))}{(2l-2k+5+s)!!} =$$
$$= \frac{l+k}{2l+k+3}c(l,k),$$

что и требовалось.

По определению $a_{k,s} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} c(l,k)$ есть линейная комбинация с рациональными коэффициентами от сумм вида $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!}$. Легко видеть, что члены этих сумм убывают экспоненциально, так что ряды абсолютно сходятся. Вычислим их:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!} = \frac{1}{(2+m)!!} + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!} = \frac{1}{(2+m)!!} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!\frac{(2l+m+2)-(m+2)}{2}}{(2l+m+2)!!} =$$
$$= \frac{1}{(2+m)!!} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!} - \frac{m+2}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m+2)!!}.$$

Отсюда получаем две формулы:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!} = \frac{2}{(2+m)!!} - (m+2)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m+2)!!}$$

и (при $m \neq 0$)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m)!!} = \frac{1}{m}\left(\frac{2}{m!!} - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l+m-2)!!}\right).$$

Случай 1. Пусть $m = -2N$, $N \in \mathbb{N}$. Когда $N = 1$, получается геометрическая прогрессия:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{(2l-2)!!} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{l-1}} = 2.$$

При $N > 1$ ряд сводится к такому же ряду для $N-1$ (что соответствует $m+2$):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N)!!} = -(2-2N) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N+2)!!},$$

откуда окончательно

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N)!!} = 2^N (N-1)!.$$

Случай 2. Пусть $m = 2N$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$. Когда $N = 0$, получается ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l)!!} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^l}{l} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

(являющийся частным случаем ряда Маклорена для логарифма $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - - \dfrac{x^3}{3} - \ldots$). При $N \geqslant 1$ ряд сводится к такому же ряду для $N-1$ (что соответствует $m-2$):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N)!!} = \frac{1}{2N} \left(\frac{2}{2^N N!} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-2)!!} \right),$$

$$2^N N! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N)!!} = \frac{1}{N} - 2^{N-1}(N-1)! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-2)!!},$$

откуда окончательно

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N)!!} = \frac{1}{2^N N!} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} - \ldots + \frac{(-1)^{N-1}}{1} + (-1)^N \ln 2 \right).$$

(Отметим, что в скобках с точностью до знака стоит разность между $\ln 2$ и частичными суммами другого известного ряда для $\ln 2$.)

Случай 3. Пусть $m = 2N-1$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$. Когда $N = 0$, получается не столь известный ряд (хотя его и можно найти в [5]), так что обозначим его сумму временно буквой μ. При $N \geqslant 1$ ряд сводится к такому же ряду для $N-1$ (что соответствует $m-2$):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-1)!!} = \frac{1}{2N-1} \left(\frac{2}{(2N-1)!!} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-3)!!} \right),$$

$$(2N-1)!! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-1)!!} = \frac{2}{2N-1} - (2N-3)!! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-3)!!},$$

откуда окончательно

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l+2N-1)!!} = \frac{2}{(2N-1)!!} \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N-3} + \ldots + \frac{(-1)^{N-1}}{1} + (-1)^N \frac{\mu}{2} \right).$$

Легко видеть, что $\dfrac{(l-1)!(2N-1)!!}{(2l+2N-1)!!} \leqslant \dfrac{2^{1-l}}{2N+1}$, так что сумма ряда $(2N-1)!! \sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{(l-1)!}{(2l+2N-1)!!}$ не превосходит $\dfrac{2}{2N+1}$ и, следовательно, стремится к нулю при $N \to \infty$. Значит,

$$\frac{\mu}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Справа стоит частный случай ряда Маклорена для арктангенса $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ при $x = 1$ (а сам ряд хорошо известен как ряд Лейбница), так что $\mu = \frac{\pi}{2}$.

Случай 4. Пусть $m = -2N - 1$, $N \in \mathbb{N}$. Ряд сводится к такому же ряду для $N - 1$ (что соответствует $m + 2$):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N-1)!!} = \frac{2}{(1-2N)!!} - (1-2N) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N+1)!!} =$$

$$= (-1)^{N-1} 2(2N-3)!! + (2N-1) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N+1)!!},$$

$$\frac{1}{(2N-1)!!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N-1)!!} = (-1)^{N-1} \frac{2}{2N-1} + \frac{1}{(2N-3)!!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N+1)!!},$$

откуда окончательно

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(2l-2N-1)!!} = 2(2N-1)!! \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{N-1}}{2N-1} \right).$$

(Отметим, что здесь выражение в скобках при $N \to \infty$ стремится не к нулю, а к $\frac{\pi}{2}$.)

Рассмотрев все случаи, приходим к выводу, что $\sum\limits_{l=1}^{\infty} c(l,k)$ действительно есть линейная комбинация с рациональными коэффициентами от 1, $\ln 2$ и π.

Литература

1. *Bollobás B., Riordan O. M.* The degree sequence of a scale-free random graph process // Random Structures and Algorithms.— 2001.— V. 18, N 3.— P. 279—290.
2. *Bollobás B., Riordan O. M.* The diameter of a scale-free random graph // Combinatorica. — 2004. — V. 24, N 1. — P. 5—34.
3. *Остроумова Л. А.* Распределение вторых степеней вершин в случайных графах в модели Боллобаша–Риордана // Матем. заметки, в печати.
4. *Ostroumova L. A., Grechnikov E. A.* The distribution of second degrees in the Bollobás–Riordan random graph model.— arXiv:1108.5585v1.
5. *Weisstein E. W.* — Pi Formulas // MathWorld — A Wolfram Web Resource.— `http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html`.

Поступила в редакцию 01.08.2011