

УДК 51.77

Е. Г. Молчанов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О комбинаторных свойствах класса многогранных конусов, возникающих в обратной задаче о распределении ресурсов

При решении обратной задачи о распределении ресурсов возникает проблема моментов, разрешимость которой сводится к вопросу принадлежности вектора конусу специального вида – конической оболочке спектральных вершин областей, получаемых при разрезании \mathbb{R}_+^2 прямыми. Рассматриваются комбинаторные свойства классов таких конусов, обсуждаются связи с проволочными диаграммами (вайрингами), дискретно-выпуклыми множествами, унимодулярностью.

Ключевые слова: проволочные диаграммы, ромбические тайлинги, классы конусов, дискретно-выпуклые множества, унимодулярные системы, обобщенная модель Хаутеккера–Иохансена.

1. Введение

При исследовании отраслевой структуры промышленного производства с помощью обратной задачи о распределении ресурсов в модели Хаутеккера–Иохансена (см. [1]) возникает следующая проблема моментов: при заданных $\{(p_1^t, p_2^t, y^t) | t = 1, \dots, T\}$ определить, существует ли неотрицательная мера с носителем в \mathbb{R}_+^2 , такая, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \theta(1 - q(p_1^t x_1, p_2^t x_2)) \mu(dx) = y^t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

Здесь $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда, $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, а $q(\cdot)$ – функция, обладающая неоклассическими свойствами функций себестоимости: $q(\cdot)$ неотрицательна в \mathbb{R}_+^2 , положительна в $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$, вогнута, непрерывна и положительно однородна ($q(\beta y_1, \beta y_2) = \beta q(y_1, y_2) \forall \beta > 0$).

Кривые, задаваемые уравнениями $q(p_1^t x_1, p_2^t x_2) = 1$, $t = 1, \dots, T$, разрезают положительный ортант \mathbb{R}_+^2 на области $\{\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k\}$. Пусть $[T]$ – множество подмножеств множества точек $\{1, 2, \dots, T\}$.

Определение 1. Спектром $sp(\alpha) \in [T]$ области α назовем подмножество номеров прямых $\{t | \forall x = (x_1, x_2) \in \alpha \ p_1^t x_1 + p_2^t x_2 \leq 1\}$.

Для описания разрезов плоскости кривыми вида $q(p_1^t x_1, p_2^t x_2) = 1$ воспользуемся понятием строгих проволочных диаграмм.

Определение 2. Строгой проволочной диаграммой назовем семейство проволок – гладких кривых без особых точек, задаваемых в полярных координатах функциями $r^1(\omega), r^2(\omega), \dots, r^T(\omega)$, $\omega \in [0, \pi/2]$, обладающими следующими свойствами:

(i) любые две проволоки имеют не более одной общей точки, причем касательные векторы в общей точке должны быть неколлинеарны.

Также будем считать строгой проволочной диаграммой общего положения, если также верно следующее утверждение:

(ii) никакие три проволоки не имеют общую точку.

Дополнительно перенумеруем проволоки так, что $r^1(0) < r^2(0) < \dots < r^T(0)$.

Кривые вида $q(p_1 x_1, p_2 x_2) = 1$ можно задать функциями $r(\omega)$ с выполнением условий (i) и (ii), т.к. функции $q(p_1 x_1, p_2 x_2)$ положительно однородны. Условие (ii) выполнено,

например, если функции $q(p_1^t x_1, p_2^t x_2)$ являются функциями с постоянной эластичностью замещения (CES-функциями) вида

$$q(p_1^t x_1, p_2^t x_2) = p_1^t x_1 \oplus_{\rho} p_2^t x_2 = ((p_1^t x_1)^{-\rho} + (p_2^t x_2)^{-\rho})^{-1/\rho},$$

в частности, линейными функциями при $\rho = -1$.

Множество $[T]$ можно сопоставить вершинам булевого куба $\{0|1\}^T$.

Определение 3. *Спектральной вершиной* области α проволочной диаграммы назовём вершину булевого куба $\{0|1\}^T$ с координатами $\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^T\}$, где

$$\alpha^t = 1, \text{ если } \forall (r, \omega) \in \alpha \text{ верно } r \leq r^t(\omega);$$

$$\alpha^t = 0, \text{ если } \forall (r, \omega) \in \alpha \text{ верно } r > r^t(\omega).$$

Множество всех спектральных вершин областей строгой проволочной диаграммы обозначим через $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\{p_1^t, p_2^t\}_{t=1, \dots, T}) \in 2^{[T]}$.

Предложение 1 (см. [1]). Разрешимость **проблемы моментов** равносильна вопросу принадлежности вектора $y = \{y^1, \dots, y^T\}$ конической оболочке множества всех спектральных вершин областей $\text{cone}(\mathbf{B}) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \mid \alpha_i \in \mathbf{B}, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, k = 1, 2, \dots\}$.

В данной статье мы будем рассматривать комбинаторные свойства класса таких конических оболочек.

Определение 4. Строгая проволочная диаграмма называется *спрямляемой*, если существует строгая проволочная диаграмма с тем же множеством областей, проволоки которой будут задаваться линейными уравнениями вида

$$p_1^t x_1 + p_2^t x_2 = 1; p_1^t, p_2^t > 0, t = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Предложение 2

(i) Задача спрямляемости произвольной строгой проволочной диаграммы является NP -трудной задачей.

(ii) Любая строгая проволочная диаграмма, содержащая не более 6 проволок, является спрямляемой.

(iii) Существует пример неспрямляемой строгой проволочной диаграммы, содержащей 9 проволок.

Доказательство. В [2] была показана NP -трудность задачи спрямляемости псевдопрямых¹ на плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим любое разрезание плоскости T псевдопрямыми. Введем на этой плоскости координатные оси так, чтобы все точки пересечения пар псевдопрямых приходились на положительный ортант $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда задача спрямляемости (в терминах [2]) конфигурации из $T + 2$ псевдопрямых, содержащей T исходных псевдопрямых и две координатные оси, является эквивалентной задаче спрямляемости (согласно определению 4) получившейся строгой проволочной диаграммы². Отсюда следует (i).

В [3] было показано, что любая конфигурация, содержащая не более чем 8 псевдопрямых, является спрямляемой. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что любая строгая проволочная диаграмма, содержащая не более $8 - 2 = 6$ прямых, спрямляема, т.е. п. (ii).

Неспрямляемая строгая проволочная диаграмма, содержащая 9 проволок (неспрямляемая конфигурация Паппа), приведена в [2]. Нарисуем эту конфигурацию так, чтобы касательный вектор к любой псевдопрямой в любой точке имел координаты (l_1, l_2) , $l_1 l_2 < 0$ (т.е. чтобы все кривые шли «сверху вниз»). Дополнительно сдвинув координатные оси так,

¹Гладких кривых без особых точек, каждая пара которых имеет не более одного пересечения (см. [2]).

²При спрямлении (в терминах [2]) псевдопрямых две прямые-оси обязаны перейти в пересекающиеся прямые, но необязательно перпендикулярные. Однако существует дополнительное проективное преобразование, сохраняющее структуру областей, переводящее прямые в прямые, и выпрямляющее угол между осями.

чтобы все точки пересечения пар псевдопрямых приходились на положительный ортант $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$, получим неспрямляемую строгую проволочную диаграмму, содержащую 9 проволок, т.е. (iii). ■

Исследование проблемы моментов в [1] проводилось при условии, что $q(p_1^t x_1, p_2^t x_2)$, $t = 1, \dots, T$, являются CES-функциями. Также в [1] показано, что строгие проволочные диаграммы, заданные CES-функциями, спрямляемы. Однако при условии $T \leq 6$ спрямляемыми будут все проволочные диаграммы и при исследовании проблемы моментов в заданном промежутке условие спрямляемости можно опустить.

2. Классы дискретно-выпуклых конусов

Согласно предложению 1, для исследования разрешимости проблемы моментов (1) необходимо исследовать принадлежность вектора $\mathbf{y} = \{y^1, \dots, y^T\}$ конусу $\text{cone}(\mathbf{B})$.

Определение 5

(i) *Конусом разрезания* назовем выпуклый конус A , такой, что ненулевые вершины полиэдра $A \cap [-1, 1]^T$ являются в точности спектральными вершинами какого-то разрезания \mathbb{R}_+^2 прямыми.

(ii) Назовем выпуклый конус A вложимым в куб $\{-1|0|1\}^T$, если вершины полиэдра $A \cap [-1, 1]^T$ целочисленны.

Конус разрезания, очевидно, вложим в куб $\{-1|0|1\}^T$.

Для проверки принадлежности вектора $\mathbf{y} = \{y^1, \dots, y^T\}$ какому-либо конусу необходимо и достаточно проверить все условия вида $\mathbf{y}\mathbf{n} \geq 0$, где \mathbf{n} – векторы внутренних нормалей к фасетам (граням размерности $T - 1$) этого конуса. Фасету конуса разрезания можно задать уравнением

$$\det \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^T \\ \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{T-1}^1 & \dots & \alpha_{T-1}^T \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^T)$, $i = 1, \dots, T - 1$, – линейно независимые спектральные вершины, лежащие на этой фасете. Получившиеся при x_1, \dots, x_T коэффициенты с точностью до знака будут соответствовать координатам вектора внутренней нормали. Таким образом, вектор нормали \mathbf{n} можно считать целочисленным.

Определение 6. Назовем вложимый в куб $\{-1|0|1\}^T$ *двойственно-вложимым* в куб $\{-1|0|1\}^T$, если двойственный к нему конус также вложим в куб $\{-1|0|1\}^T$.

Напомним, двойственным к выпуклому конусу A называется выпуклый конус $A^* = \{\mathbf{x} | \forall \mathbf{y} \in A \ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0\}$, причем фасета, задающаяся уравнением $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ прямого конуса, соответствует ребру \mathbf{a} двойственного конуса и наоборот.

Если считать конус двойственно-вложимым в куб $\{-1|0|1\}^T$, координаты векторов нормалей \mathbf{n} фасет этого конуса будут содержать только числа из множества $\{-1, 0, 1\}$, и все условия, которые необходимо проверить для изучения принадлежности вектора (y^1, \dots, y^T) конусу, будут иметь вид

$$\sum_{t \in T_-} y^t \leq \sum_{t \in T_+} y^t, \quad T_- \cap T_+ = \emptyset, \quad T_-, T_+ \in [T]. \tag{4}$$

Условия только такого вида возникали при решении проблем моментов (1) на статистических данных.

Определение 7. *Тотально унимодулярной (чистой) матрицей* называется матрица, все миноры любой размерности которой равны числам из множества $\{-1, 0, 1\}$. Строки (и столбцы) тотально унимодулярной матрицы образуют *тотально унимодулярную (чистую) систему векторов*.

Рассмотрим матрицу, строками которой будут координатные строки спектральных вершин разрезания. Условие чистоты этой матрицы гарантирует двойственную вложимость конической оболочки спектральных вершин разрезания в куб $\{-1|0|1\}^T$, однако является слишком жестким. Во-первых, при выполнении этого условия нормаль к любой гиперплоскости (а не только граничной), являющейся конической оболочкой линейно независимого множества спектральных вершин, можно задать, используя только координаты из множества $\{-1, 0, 1\}$. Во-вторых, из формулы (2) следует, что достаточно требовать принадлежность множеству $\{-1, 0, 1\}$ только миноров размерности $(T - 1)$.

Если смягчить условие тотальной унимодулярности и требовать равенства множеству $\{-1, 0, 1\}$ только миноров максимальной размерности матрицы, мы получим просто унимодулярную матрицу и соответствующую ей унимодулярную систему векторов.

Определение 8.

(i) Система различных векторов \mathfrak{A} в пространстве \mathbb{Z}^n называется унимодулярной, если целочисленные комбинации любой подсистемы векторов $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}$, образующей базис в \mathbb{R}^n , порождают \mathbb{Z}^n .

(ii) Унимодулярная система векторов \mathfrak{A} дополнительно называется максимальной, если её нельзя расширить добавлением нового вектора с сохранением свойства унимодулярности.

Максимальные унимодулярные системы описываются с помощью теоремы декомпозиции Сеймура (см. [4]).

Исследование унимодулярных систем породило теорию дискретно-выпуклых множеств на решетке \mathbb{Z}^n (см. [5]).

Определение 9. Рассмотрим класс \mathfrak{D} выпуклых полиэдров в \mathbb{R}^n с вершинами в целых точках, замкнутый относительно сдвига, отражения и перехода к граням.

Класс \mathfrak{D} называется дискретно-выпуклым, если верны эквивалентные (см. [5]) друг другу свойства:

- (i) $(A + B) \cap \mathbb{Z}^n = (A \cap \mathbb{Z}^n) + (B \cap \mathbb{Z}^n) \forall A, B \in \mathfrak{D}$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathfrak{D}$ вершины $A \cap B$ целочисленны.

Если, дополнительно, класс \mathfrak{D} замкнут относительно сумм по Минковскому, то \mathfrak{D} называется *S-классом*, если замкнут относительно пересечений – *P-классом*.

Возможные *S*-классы порождаются с помощью унимодулярных систем

Предложение 3 (см. [6]). (i) Любая унимодулярная система \mathfrak{A} порождает *S*-класс дискретной выпуклости \mathfrak{D} , содержащий все целые полиэдры, ребра которых параллельны каким-нибудь элементам из \mathfrak{A} .

(ii) Любой *S*-класс порождается какой-то унимодулярной системой (см. (i)). *P*-классы являются в некотором смысле «двойственными» к *S*-классам – в предложении 3 вместо параллельности ребер каким-то элементам унимодулярной системе будет требоваться перпендикулярность фасет.

По аналогии с классами дискретной выпуклости на решетках, рассмотрим полкласс двойственно вложимых в куб $\{-1|0|1\}^T$ конусов и дополнительно назовем его *S*-подклассом и *P*-подклассом, если этот подкласс замкнут по операции прямой суммы и пересечения соответственно.

Предложение 4. Класс всех двойственно вложимых в куб $\{-1|0|1\}^T$ конусов не замкнут как по операции пересечения, так и по операции прямой суммы.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_1 - M_6$, заданные следующим образом:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определим конус A как коническую оболочку векторов, записанных в строках матрицы M_1 . Двойственный ему конус A^* будет являться конической оболочкой векторов, записанных в строках матрицы M_3 . Аналогично матрицами M_2 и M_4 зададим конусы B и B^* . Тогда конус $(A+B)$ можно задать конической оболочкой векторов-строк матрицы M_5 , а двойственный ему конус $(A+B)^* = A^* \cap B^*$ задается конической оболочкой векторов-строк матрицы M_6 , причем все векторы как и из матрицы M_5 , так и из матрицы M_6 задают крайние лучи соответствующих конусов.

Полиэдр $(A+B)^* \cap [-1, 1]^4$ будет содержать точку $(1, -1/2, -1/2, -1/2)$ в качестве нецелочисленной вершины, следовательно, пример конусов A и B будет показывать незамкнутость класса двойственно вложимых в куб $\{-1|0|1\}^T$ конусов относительно операции суммы по Минковскому, а конусы A^* и B^* – пример незамкнутости этого класса по операции пересечения, ч.т.д. ■

Простейшими примерами S-подклассов и одновременно P-подклассов будут являться классы всех вложимых в куб $\{-1|0|1\}^T$ конусов в размерностях 2 и 3, т.к. в этих размерностях любые вложимые в $\{-1|0|1\}^T$ куб конусы являются также двойственно-вложимыми.

3. Конические оболочки областей разрезания, не являющиеся двойственно-вложимыми в $\{-1|0|1\}^T$ куб

Поскольку при решении проблем моментов (1) на статистических данных при проверке принадлежности вектора конической оболочке (см. предложение 1) возникали только условия вида (4), возник вопрос принадлежности всех конусов разрезания к классу двойственно вложимых в куб $\{-1|0|1\}^T$. Для исследования этого вопроса был произведен полный перебор возможных конусов разрезания размерности до $T = 9$ включительно. Опишем алгоритм, позволивший осуществить такой перебор и вычислить вложимость конусов, двойственных конусам разрезания в куб $\{-1|0|1\}^T$.

3.1. Пересечение луча $\omega = \text{const}$ проволок строгой проволочной диаграммы

Рассмотрим луч, заданный уравнением $\omega = \text{const}$, и строгую проволочную диаграмму $r^t(\omega)$, $\omega = 1, \dots, T$. Выпишем в строку номера проволок, пересекающих луч $\omega = \text{const}$ в порядке увеличения r .

Зададим функцию $h: \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow \{1, 2, \dots, T\}$ следующим образом: номера $h(1), h(2), \dots, h(T)$, выписанные в строку, должны соответствовать выписанному порядку. Функцию h можно также считать элементом симметрической группы порядка T – S_T :
$$S_T: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & T \\ h(1) & h(2) & \dots & h(T) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что порядок, в котором проволоки пересекают луч $\omega = \text{const}$, однозначно задает спектральные вершины областей, через которые проходит этот луч. Опишем эти вершины с помощью функции $\alpha(h, i): S_T \times \{0, 1, 2, \dots, T\} \rightarrow \{0|1\}^T$, заданной следующим образом покоординатно:

$$\alpha^i(h, t) = 1, \quad h^{-1}(t) \leq i,$$

$$\alpha^i(h, t) = 0, \quad h^{-1}(t) > i; \quad t \in 1, 2, \dots, T.$$

Тогда $\alpha(h, 0), \alpha(h, 1), \dots, \alpha(h, T)$ будут указанными спектральными вершинами.

Теперь рассмотрим семейство лучей вида $\omega = \lambda$, где λ – фиксированное число промежутка $[0, \pi/2]$. Будем постепенно увеличивать λ от 0 до $\pi/2$. Порядок пересечения луча $\omega = 0$ проволоками – тождественный, $\{1, 2, \dots, T\}$, т.к. нумерация проволок в определении строгой проволочной диаграммы шла по увеличению величины $r(0)$.

3.2. Изменение порядка пересечений луча $\omega = \text{const}$ проволоками

При увеличении λ порядок поменяется при прохождении луча $\omega = \lambda$ через точку пересечения пары проволок: прохождение луча $\omega = \lambda$ через каждое такое пересечение при увеличении ω будет соответствовать транспозиции номеров $h(t)$ и $h(t+1)$, $t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, где функция h задавала порядок до прохождения луча $\omega = \lambda$ через точку пересечения проволок с номерами $h(t)$ и $h(t+1)$.

Заметим, что $h(t) < h(t+1)$. Это следует из того, что любая пара проволок имеет не более одного пересечения.

Также после прохождения луча $\omega = \lambda$ через пересечение пар проволок к множеству областей, которые когда-либо пересекал луч $\omega = \lambda$, добавится новая область: $\alpha(h', i)$, где функция h' будет задавать порядок после прохождения лучом $\omega = \lambda$ через точку пересечения. Это позволит нам сформулировать следующий алгоритм.

3.3. Алгоритм построения множества спектральных вершин заданного разрезания

(i) Упорядочим пересечения пар прямых разрезания, лежащих внутри \mathbb{R}_+^2 , в порядке увеличения угла.

(ii) Положим $h = id$ (тождественная перестановка), $\mathbf{V} = \alpha(h, 0), \alpha(h, 1), \dots, \alpha(h, T)$.

(iii) Когда при увеличении λ луч $\omega = \lambda$ станет последовательно (см. (i)) проходить через точки пересечения пар прямых разрезания, будем каждый раз изменять h и добавлять новую область в соответствии с п. 3.2.

В этом пункте точки пересечения пар прямых разрезания, лежащие внутри \mathbb{R}_+^2 , были упорядочены в порядке увеличения угла согласно заданным уравнениям этих прямых. Теперь построим все строгие проволочные диаграммы, упорядочив эти точки пересечений произвольным образом, проследив, чтобы каждая пара проволок имела не более одного пересечения.

3.4. Алгоритм перебора всех строгих проволочных диаграмм

Этот алгоритм будет содержать *процедуру расширения*, входными данными которой будут являться функция h , задающая порядок пересечения луча $\omega = \lambda$ проволоками перед изменением этого порядка множество $\mathbf{V} \in 2^{\{0,1\}^T}$ – множество спектральных вершин, а также вспомогательный номер $i \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$, чье назначение будет объяснено позже.

(i) Положим $h = id$ (тождественная перестановка), $\mathbf{V} = \alpha(h, 0), \alpha(h, 1), \dots, \alpha(h, T)$.

(ii) Запустим процедуру расширения с параметрами $\mathbf{V}, h, 0$.

Процедура расширения

(i) \mathbf{V} – множество спектральных вершин какой-то строгой проволочной диаграммы.

(ii) Для всех натуральных $i \in [\max(t-1, 1), T-1]$, для которых верно $h(i) < h(i+1)$, выполним следующие действия

a. переставим в h местами номера $h(i)$ и $h(i+1)$,

b. запустим процедуру расширения с параметрами $\mathbf{V} \cup (h, i), h, i$. ■

Если в процедуре расширения в шаге (ii) заменить $i \in [\max(t-1, 1), T-1]$ на $i \in [1, T-1]$, эта процедура переберет все возможные допустимые упорядочивания по увеличению угла точек пересечения строгих проволочных диаграмм и соответствующие этим порядкам

строгие проволочные диаграммы. Заметим, что если требовать условие, что каждая пара проволок имеет не более одного пересечения, точек пересечения пар проволок конечное количество, следовательно, процедура расширения обязана завершиться.

Чтобы объяснить замену 1 на $\max(t - 1, 1)$, заметим, что если при увеличении ω «соседними» будут являться перестановки номеров t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) и t_3, t_4 ($t_3 < t_4$), причем t_1, t_2, t_3, t_4 — четыре различных числа, то спектры двух добавляемых областей не будут зависеть от того, в каком порядке будут проведены две эти перестановки. В связи с этим в данном случае мы можем считать, что $h^{-1}(t_1) < h^{-1}(t_3)$, где h — порядок пересечения до проведения обеих перестановок. Это и будет соответствовать замене числа 1 на $\max(t - 1, 1)$ в шаге 2 процедуры расширения.

3.5. Проверка двойственной вложимости в куб $\{-1|0|1\}^T$ конусов разрезания

Алгоритм 3.4 позволит выписать все множества спектральных вершин областей строгих проволочных диаграмм. С помощью встроенных библиотек математических программ вычислим конические оболочки каждого множества спектральных вершин и проверим их на двойственную вложимость в куб $\{-1|0|1\}^T$.

Отметим, что данные конические оболочки являются коническими оболочками строгих диаграмм, а не конусами разрезания. Из предложения 2 следует, что при $T \leq 6$ любая строгая проволочная диаграмма является спрямляемой, следовательно, любая коническая оболочка спектральных вершин строгих проволочных диаграмм является конусом разрезания. Однако при $T > 7$ это может быть неверно. Любую строгую проволочную диаграмму, коническая оболочка которой обладает какими-то интересными свойствами, нужно проверить на спрямляемость.

Был проведен перебор всех строгих проволочных диаграмм размерности до $T = 9$ включительно. Результаты перебора описаны ниже.

3.6. Результаты перебора строгих проволочных диаграмм

(i) Минимальное по количеству прямых разрезание, коническая оболочка спектральных вершин которого не является двойственно вложимой в $\{-1|0|1\}^T$ куб, содержит 6 прямых.

(ii) Минимальное по количеству областей разрезание, коническая оболочка спектральных вершин которого не является двойственно вложимой в $\{-1|0|1\}^T$ куб, содержит 19 областей.

(iii) Координаты вершин полиэдра $A^* \cap [-1, 1]^T$, где A — коническая оболочка спектральных вершин какого-то разрезания, а $T = 6, 7$ — целые или полуцелые.

(iv) Координаты вершин полиэдра $A^* \cap [-1, 1]^T$, где A — коническая оболочка спектральных вершин какого-то разрезания, а $T = 8, 9$ — рациональные числа со знаменателями, не превосходящими трёх.

Предъявим пример, показывающий минимальное разрезание как по количеству прямых (i), так и по количеству областей (ii). Это разрезание приведено на рисунке 1.

Матрица M_7 содержит в строках координаты спектральных вершин областей этого разрезания (для удобства матрица записана в транспонированном виде):

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Полиэдр $A^* \cap [-1, 1]^6$, где A — коническая оболочка спектральных вершин из матрицы

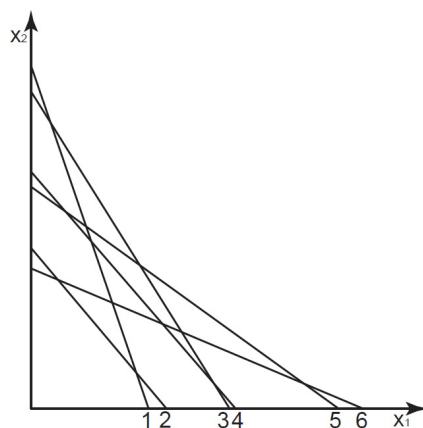


Рис. 1. Минимальное разрезание, коническая оболочка спектральных вершин которого не является двойственно вложимой в куб $\{-1|0|1\}^T$

M_7 , будет содержать точку $(1/2, 1/2, -1, 1/2, -1/2, 1/2)$ в качестве нецелочисленной вершины, ч.т.д.

Дополнительно отметим, что для доказательства минимальности приведенного примера по количеству областей был проведен дополнительный перебор строгих проволочных при $10 \leq T \leq 18$ среди части разрезаний, имеющих не более чем $18 - T$ точек пересечения пар проволок (т.к. число областей равно $1 + T + R$, где R – количество пересечений).

В заключение сформулируем **гипотезу**: в координатах вершин полиэдра $A^* \cap [-1, 1]^T$, где A – коническая оболочка спектральных вершин какого-то разрезания, может встретиться любое рациональное число, не превосходящее по модулю единицы.

Работа поддержана РФФИ № 12-07-31231_мол_а, № 12-07-33007_мол_а_вед, № 11-07-00162_а; Министерством образования и науки Российской Федерации № 14.А18.21.0866.

Литература

1. Шананин А.А. Непараметрический метод анализа технологической структуры производства // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 9. — С. 116–122.
2. Shor Peter W. Stretchability of pseudoline arrangements is NP-hard // Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift (P. Gritzman & B. Sturmfels, eds.). DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 4, American Math. Soc. Providence, RI. — P. 531–554.
3. Goodman J.E., Pollack R. Proof of Grünbaum's conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudolines // J. Combin. Theory Ser. — 1980. — A 29. — N 3. — P. 385–390.
4. Danilov V., Grishukhin V. Maximal unimodular systems of vectors // European J. Combin. — 1999. — 20. — P. 507–526.
5. Данилов В.И., Кошевой Г.А. Дискретная выпуклость // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — V. 312. — P. 86–93.
6. Danilov V.I., Koshevoy G.A. Discrete convexity and unimodularity-I // Advances in Mathematics. 20 December 2004. — V. 189, N 2. — P. 301–324.

Поступила в редакцию 02.12.2012.