

УДК 532.526.2

*Г. Н. Дудин<sup>1,2</sup>, А. В. Ледовский<sup>1,2</sup>, Я. Н. Со<sup>1</sup>*<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)<sup>2</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского

## Распространение возмущений в гиперзвуковом пограничном слое в окрестности точки излома передней кромки крыла

Исследовано течение в пространственном ламинарном пограничном слое на тонком крыле с изломом передней кромки на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия. Давление, индуцированное толщиной вытеснения, определяется по формуле «касательного клина», обобщенной на нестационарный случай. На основе теоретического анализа уравнений пограничного слоя получено интегральное соотношение для определения характеристической поверхности, связанной с индуцированным давлением. В результате численного решения уравнений пограничного слоя определены скорости распространения возмущений и построены диаграммы направленности при различных значениях температурного фактора и углов стреловидности передних кромок.

**Ключевые слова:** тонкое крыло, пограничный слой, гиперзвуковые течения, сильное взаимодействие, распространение возмущений.

### 1. Введение

Исследование распространения возмущений в пограничном слое является не только важной задачей гидродинамической устойчивости, но и позволяет определить их влияние на аэродинамические характеристики. Развитие возмущений может приводить как к отрыву пограничного слоя, так и к более раннему ламинарно-турбулентному переходу. Как известно, уравнения Прандтля, описывающие течение в пограничном слое, являются параболическими, поэтому изменения граничных условий вниз по течению не могут оказывать влияния на течение против потока. Однако в работе Нейланда [1] было показано, что благодаря вязко-невязкому взаимодействию в сверх- и гиперзвуковых пограничных слоях существует возможность распространения возмущений вверх по потоку вплоть до передней кромки.

Для трехмерного пограничного слоя в работе Вонга [2] определены зоны влияния и зависимости с помощью исследования субхарактеристик. Показано, что для уравнений параболического типа зоны влияния и зависимости определяются не только характеристиками, как в гиперболических системах, но и субхарактеристиками. Характеристики трехмерного пограничного слоя представляют собой цилиндрические поверхности, расположенные по нормали к обтекаемому телу, и возмущения распространяются с бесконечной скоростью вдоль образующих этих поверхностей, а субхарактеристики являются линиями тока, которые переносят возмущения в потоке. В работе [3] метод субхарактеристик, разработанный для стационарного трехмерного пограничного слоя [2], обобщен на случай нестационарного двумерного течения. Результаты исследования областей влияния и зависимости были в дальнейшем применены для улучшения численных схем, используемых для расчетов отрывных течений.

Исследованию взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для пространственных и двумерных отрывных течений посвящены работы Нейланда [4–5]. В работе [4] обнаружена аналогия между трехмерным пограничным слоем и невязким внешним потоком: уравнения пограничного слоя обладают двумя семействами характеристик, которые определяют положение координаты перехода от закритического течения (в среднем сверхзвукового в пограничном слое) к докритическому (в среднем дозвуковому). На треугольных крыльях с температурой поверхности, малой по сравнению с температурой

торможения, могут образовываться области закритического течения, в которых происходит «запирание» распространения возмущений [4, 6]. Установлено, что решение уравнений пограничного слоя в общем случае не единственно и требуется дополнительное условие (например, распределение давления на задней кромке). В работе [5] сформулирована краевая задача для двумерного отрывного течения, которое на режиме сильного и умеренного взаимодействия описывается уравнениями пограничного слоя. При этом отмечено, что вблизи плоскости симметрии треугольного крыла возможно образование области локальной неприменимости уравнений пограничного слоя. Для случая ньютоновского предельного перехода ( $\gamma \rightarrow 1$ ) закритические и докритические течения были подробно исследованы в работе [6].

В работе Липатова [7] на основе метода анализа характеристик, предложенного Вонгом [2], были исследованы нестационарные процессы распространения возмущений в гиперзвуковом пограничном слое на полубесконечной пластине для режима сильного вязко-невязкого взаимодействия. Для автомодельной системы уравнений определены скорости распространения возмущений вверх и вниз по потоку при различных значениях температурного фактора. В дальнейшем данные исследования были расширены для изучения распространения возмущений на скользящей пластине [8], течения в угле [9], турбулентного пограничного слоя [10], при различных значениях показателя адиабаты [11], но все они ограничены случаями фактически двумерных течений. Впервые определение характеристической поверхности и скорости распространения возмущений в трехмерном пограничном слое на треугольном крыле было проведено в работе Дудина и Мьинта [12].

В настоящей работе данные методы исследования распространения возмущений применены к трехмерному течению в пограничном слое на плоском крыле в окрестности точки излома передней кромки с использованием цилиндрической системы координат. Рассмотрено влияние как температурного фактора, так и формы крыла в плане на скорость распространения характеристической поверхности в пограничном слое. Введение цилиндрической системы координат позволило провести параметрические исследования влияния углов стреловидности в широком диапазоне, в том числе для крыльев с обратной стреловидностью.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается гиперзвуковой поток вязкого газа, обтекающий тонкое плоское крыло с изломом передней кромки под нулевым углом атаки. Газ предполагается термодинамически совершенным с постоянным отношением удельных теплоемкостей:  $\gamma = C_p/C_v$ . Исследуется режим сильного вязко-невязкого взаимодействия при условиях:  $M_\infty \rightarrow \infty$ ,  $M_\infty \delta \gg 1$ , где  $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока,  $\delta$  — безразмерная толщина пограничного слоя. Число Рейнольдса  $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$  предполагается достаточно большим, но не превосходящим критического значения ламинарно-турбулентного перехода. Температура поверхности крыла считается постоянной и заданной. Задача решается на основе двухслойной схемы течения — внешняя область невязкого газа, описываемая уравнениями Эйлера, и стационарный ламинарный трехмерный пограничный слой. Для упрощения решения задачи распределение индуцированного давления определяется по формуле «касательного клина», обобщенной для случая нестационарного течения [7].

Форма крыла в плане (рис. 1) определяется параметрами:  $\beta$  — угол между направлением набегающего потока и биссектрисой угла в точке излома,  $\Theta$  — угол между биссектрисой и передними кромками крыла. Вводится цилиндрическая система координат так, что её начало (т. О) расположено в точке излома передней кромки  $BOC$ , а безразмерные координаты:  $Lr$  — расстояние от точки излома,  $\Theta\theta$  — угол, который отсчитывается от биссектрисы,  $L\delta y$  — ось по нормали к поверхности крыла. Безразмерное время:  $tL/U_\infty$ , где  $L$  — характерный линейный размер задачи (например, длина крыла),  $U_\infty$  — скорость невозмущенного потока. Газодинамические переменные обезразмериваются в соответствии с оценками для гиперзвукового пограничного слоя [13]:  $U_\infty u$  — компонента вектора скорости вдоль  $r$ ,  $U_\infty w$  — вдоль координаты  $\theta$ ,  $vU_\infty \delta / \Theta$  — по нормали к поверхности крыла (вдоль  $y$ ),  $HU_\infty^2/2$  — полная удельная энтальпия,  $\rho_\infty \delta^2 \rho$  — плотность,  $\rho_\infty U_\infty^2 \delta^2 p$  — дав-

ление,  $\mu_0\mu$  — динамический коэффициент вязкости, где  $\mu_0$  — коэффициент вязкости при температуре торможения. Индекс  $\infty$  означает параметры набегающего потока.

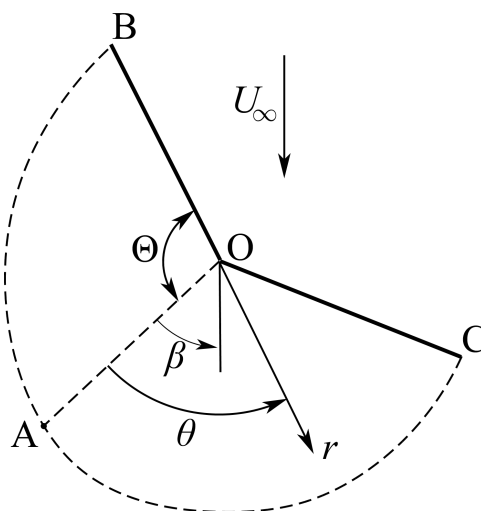


Рис. 1. Схема крыла в плане (вид сверху) и система координат

Система уравнений нестационарного пространственного ламинарного пограничного слоя в безразмерных переменных в цилиндрической системе координат имеет вид [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho w)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{r} &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} + \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  — число Прандтля, а полная удельная энтальпия определяется по формуле

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2}.$$

Формула «касательного клина» в цилиндрической системе координат, обобщенная на нестационарный случай:

$$p = \frac{\gamma + 1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \left[ \cos(\theta - \beta) \frac{\partial \delta_e}{\partial r} - \frac{\sin(\theta - \beta)}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \delta_e}{\partial t} \right]^2.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} y = 0 : u = v = w = 0, H &= H_w, \\ y \rightarrow \infty : u \rightarrow \cos[\Theta(\theta - \beta)], w &\rightarrow -\sin[\Theta(\theta - \beta)], H \rightarrow 1, \end{aligned}$$

где  $H_w$  — отношение энтальпии на поверхности крыла к энтальпии торможения (температурный фактор). Для определения динамического коэффициента вязкости  $\mu$  используется степенная зависимость от температуры:  $\mu \sim T^k$ .

Вводятся новые переменные с использованием преобразования А.А. Дородницына [15]:

$$\lambda = \int_0^y \rho dy, \quad v_\delta = \rho v + \Theta \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \Theta u \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Следует отметить, что в результате такого преобразования уравнение неразрывности уже не содержит производной по времени. Выражение для толщины вытеснения пограничного слоя с учетом (1) принимает вид

$$\delta_e = \frac{\gamma - 1}{2\gamma p} \int_0^{\infty} (H - u^2 - w^2) d\lambda.$$

Также вводятся переменные, которые позволяют учесть особенности поведения функций течения в окрестности точки излома ( $r = 0$ ) и передних кромок ( $\theta = \pm 1$ ) [13, 15]:

$$\lambda^* = r^{-1/4} \lambda, \quad v^* = \Theta r u \frac{\partial \lambda^*}{\partial r} + v_\delta r^{3/4}, \quad \eta = \lambda^* \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \sqrt{1 - \theta^2} \right)^{-1/2},$$

$$v_* = v^* \frac{(1 - \theta^2)^{3/4}}{p_*} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} + (1 - \theta^2) \frac{w}{p_*} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$p = r^{-1/2} (1 - \theta^2)^{-1/2} p_*(r, \theta, t), \quad \rho = r^{-1/2} \rho^*(r, \theta, \lambda^*, t), \quad \delta_e = r^{3/4} (1 - \theta^2)^{3/4} \Delta_e(r, \theta, t).$$

В результате преобразований (2) система уравнений нестационарного пространственно-пограничного слоя и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial v_*}{\partial \eta} - \frac{w\theta}{2p_*} + \frac{1 - \theta^2}{p_*} \left( \Theta r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{5}{4} \Theta u \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1 - \theta^2}{p_*} \left( \Theta r \frac{\partial u}{\partial t} + \Theta r u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial \theta} - \Theta w^2 \right) + v_* \frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= \Theta \frac{1 - \theta^2}{p_*} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( N \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1 - \theta^2}{p_*} \left( \Theta r \frac{\partial w}{\partial t} + \Theta r u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial \theta} + \Theta u w \right) + v_* \frac{\partial w}{\partial \eta} =$$

$$= -\frac{\gamma - 1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \left( \frac{\theta}{p_*} + \frac{1 - \theta^2}{p_*^2} \frac{\partial p_*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( N \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \quad (5)$$

$$\frac{1 - \theta^2}{p_*} \left( \Theta r \frac{\partial H}{\partial t} + \Theta r u \frac{\partial H}{\partial r} + w \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + v_* \frac{\partial H}{\partial \eta} = \Theta \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1 - \theta^2}{p_*} (H - u^2 - w^2) \frac{r}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{N}{\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} + (\sigma - 1) \frac{\partial (u^2 + w^2)}{\partial \eta} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$N = (H - u^2 - w^2)^{k-1}, \quad (7)$$

$$\Delta_e = \frac{1}{p_*} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \int_0^{\infty} (H - u^2 - w^2) d\eta, \quad (8)$$

$$p_* = \frac{\gamma + 1}{2} \left\{ (1 - \theta^2) \left( \frac{3}{4} \Delta_e + r \frac{\partial \Delta_e}{\partial r} \right) \cos [\Theta(\theta - \beta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Theta} \sin [\Theta(\theta - \beta)] \left( \frac{3}{2} \theta \Delta_e - (1 - \theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial \Delta_e}{\partial t} (1 - \theta^2) \right\}^2, \quad (9)$$

$$\eta = 0: \quad u = v_* = w = 0, \quad H = H_w, \quad (10)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow \cos [\Theta(\theta - \beta)], \quad w \rightarrow -\sin [\Theta(\theta - \beta)], \quad H \rightarrow 1. \quad (11)$$

Следует отметить, что в систему уравнений (3) – (9) фактически входят производные  $\partial^2 \Delta_e / \partial r^2$  и  $\partial^2 \Delta_e / \partial \theta^2$ , и, следовательно, эта система уже не параболического типа и может допускать распространение возмущений против потока.

### 3. Определение характеристической поверхности

Рассмотрим характеристическую поверхность  $f(r, \theta, t) = 0$ , которая является поверхностью слабого разрыва, то есть производная от функции давления по нормали к этой поверхности неопределенна, при этом сама функция давления непрерывна. Условие существования характеристической поверхности в пограничном слое в случае, когда распределение давления в пограничном слое заранее неизвестно и определяется в процессе решения краевой задачи, найдено для скользящей полубесконечной пластины в работе [8], а для треугольного крыла в [12].

Для определения положения поверхности  $f(r, \theta, t) = 0$  перейдем к новым переменным  $(r, \theta, \eta, t) \rightarrow (f(r, \theta, t), \theta, \eta, t)$  [16] и введем две функции тока  $F$  и  $\Phi$ , такие, что

$$\Theta u = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Тогда уравнения (3) – (6) сводятся к виду:

$$v_* = -\frac{1-\theta^2}{p_*} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{5}{4} F - \frac{\Phi \theta}{2(1-\theta^2)} \right),$$

$$A \frac{\partial u}{\partial f} - \left( r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \Theta \frac{\gamma-1}{2\gamma p_*} (H - u^2 - w^2) r \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} = B_u, \quad (12)$$

$$A \frac{\partial w}{\partial f} - \left( r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\gamma-1}{2\gamma p_*} (H - u^2 - w^2) \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} = B_w, \quad (13)$$

$$A \frac{\partial H}{\partial f} - \left( r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} - \Theta \frac{\gamma-1}{\gamma} (H - u^2 - w^2) \frac{r}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} = B_H, \quad (14)$$

$$A = \Theta r \frac{\partial f}{\partial t} + \Theta r u \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

$$B_u = \left( r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{5}{4} F - \frac{\Phi \theta}{2(1-\theta^2)} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \Theta r \frac{\partial u}{\partial t} - \Theta r u \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{\partial u}{\partial \theta} + \Theta w^2 +$$

$$+ \Theta \frac{\gamma-1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial r} \right) + \frac{p_*}{1-\theta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( N \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$B_w = \left( r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{5}{4} F - \frac{\Phi \theta}{2(1-\theta^2)} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \Theta r \frac{\partial w}{\partial t} - \Theta r u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial \theta} - \Theta u w -$$

$$- \frac{\gamma-1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \left( \frac{\theta}{1-\theta^2} + \frac{1}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial \theta} \right) + \frac{p_*}{1-\theta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( N \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

$$B_H = \left( r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{5}{4} F - \frac{\Phi \theta}{2(1-\theta^2)} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} - \Theta r \frac{\partial H}{\partial t} - \Theta r u \frac{\partial H}{\partial r} - w \frac{\partial H}{\partial \theta} +$$

$$+ \Theta \frac{\gamma-1}{\gamma} (H - u^2 - w^2) \frac{r}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{p_*}{1-\theta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{N}{\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} + (\sigma-1) \frac{\partial (u^2 + w^2)}{\partial \eta} \right) \right\}.$$

Формула для определения индуцированного давления (9) принимает вид

$$p_* = \frac{\gamma+1}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta_e}{\partial f} (1-\theta^2) \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \cos [\Theta(\theta-\beta)] - \frac{1}{\Theta} \sin [\Theta(\theta-\beta)] \frac{\partial f}{\partial \theta} + r \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \right.$$

$$\left. + (1-\theta^2) \left( \frac{3}{4} \Delta_e + r \frac{\partial \Delta_e}{\partial r} \right) \cos [\Theta(\theta-\beta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Theta} \sin [\Theta(\theta-\beta)] \left( \frac{3}{2} \theta \Delta_e - (1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial \Delta_e}{\partial t} (1-\theta^2) \right\}. \quad (15)$$

Для приведения к одному обыкновенному дифференциальному уравнению уравнение (12),

умноженное на  $\Theta r \frac{\partial f}{\partial r}$ , складывается с уравнением (13), умноженным на  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ :

$$A \left( \Theta r \frac{\partial u}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \left( r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \left( \Theta r \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_*} (H - u^2 - w^2) \left( \left( \Theta r \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right) \frac{\partial p_*}{\partial f} = \Theta r \frac{\partial f}{\partial r} B_u + \frac{\partial f}{\partial \theta} B_w. \quad (16)$$

Вводятся обозначения:

$$D = r \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad B_1 = \left( \Theta r \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2, \quad Q = H - u^2 - w^2, \quad B_0 = \Theta r \frac{\partial f}{\partial r} B_u + \frac{\partial f}{\partial \theta} B_w.$$

Тогда уравнение (16) принимает окончательный вид:

$$A \frac{\partial D}{\partial \eta} - D \frac{\partial A}{\partial \eta} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_*} Q B_1 \frac{\partial p_*}{\partial f} = B_0. \quad (17)$$

Так как толщина вытеснения определяется по формуле (8):

$$\Delta_e = \frac{1}{p_*} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \int_0^\infty (H - u^2 - w^2) d\eta = \frac{1}{p_*} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \int_0^\infty Q d\eta,$$

то, дифференцируя её, можно получить выражение для производной  $\partial \Delta_e / \partial f$ , которая входит в формулу для определения давления (15):

$$\frac{\partial \Delta_e}{\partial f} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_*} \left[ \int_0^\infty \frac{\partial Q}{\partial f} d\eta - \frac{1}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial f} \int_0^\infty Q d\eta \right]. \quad (18)$$

Если уравнение (17) рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной  $D$ , то его решение в общем виде выражается следующим образом, что легко проверяется подстановкой:

$$D = -B_1 A \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_*} \frac{\partial p_*}{\partial f} \int_0^\eta \frac{Q}{A^2} d\eta + A_0 \int_0^\eta \frac{B_0}{A^2} d\eta.$$

Из уравнений (12) – (14) определяются следующие выражения для производных по  $f$ :

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \frac{1}{A} \left( D \frac{\partial u}{\partial \eta} - \Theta r C \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial r} + B_u \right), \\ \frac{\partial w}{\partial f} = \frac{1}{A} \left( D \frac{\partial w}{\partial \eta} - C \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \theta} + B_w \right), \\ \frac{\partial H}{\partial f} = \frac{1}{A} \left( D \frac{\partial H}{\partial \eta} + 2\Theta r C \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} + B_H \right), \quad (19) \\ C = \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_*} (H - u^2 - w^2).$$

Тогда производная  $\frac{\partial Q}{\partial f}$ , входящая в уравнение в (18), будет определяться из выражения

$$\frac{\partial Q}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} (H - u^2 - w^2) = \frac{\partial H}{\partial f} - 2u \frac{\partial u}{\partial f} - 2w \frac{\partial w}{\partial f}.$$

Подставляя в него соответствующие производные из (19), можно получить

$$\frac{\partial Q}{\partial f} = \frac{D}{A} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\gamma - 1}{\gamma p_*} Q \frac{\partial p_*}{\partial f} + \frac{B_p}{A}, \quad \text{где } B_p = B_H - 2u B_u - 2w B_w. \quad (20)$$

После подстановки (20) в соотношение (18) и последующего интегрирования определяется окончательное выражение для производной  $\partial\Delta_e/\partial f$ :

$$\frac{\partial\Delta_e}{\partial f} = \frac{\partial p_*}{\partial f} \frac{\gamma-1}{2\gamma^2 p_*^2} \left[ B_1 \frac{\gamma-1}{2} \int_0^\infty \frac{Q^2}{A^2} d\eta - \int_0^\infty Q d\eta \right] + \frac{\gamma-1}{2\gamma p_*} \int_0^\infty \left( \left[ \int_0^\eta \frac{B_0}{A^2} d\eta \right] \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{B_p}{A} \right) d\eta. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (15), получаем значение производной  $\partial p_*/\partial f$ :

$$\frac{\partial p_*}{\partial f} = \frac{\frac{2\gamma^2 p_*^2}{\gamma-1} F}{N_0(1-\theta^2) \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \cos[\Theta(\theta-\beta)] - \frac{1}{\Theta} \sin[\Theta(\theta-\beta)] \frac{\partial f}{\partial \theta} + r \frac{\partial f}{\partial t} \right)}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} N_0 &= B_1 \frac{\gamma-1}{2} \int_0^\infty \frac{Q^2}{A^2} d\eta - \int_0^\infty Q d\eta, \\ F &= \sqrt{\frac{2p_*}{\gamma+1}} - \frac{\gamma-1}{2\gamma p_*} \int_0^\infty \left( \left[ \int_0^\eta \frac{B_0}{A^2} d\eta \right] \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{B_p}{A} \right) d\eta (1-\theta^2) \times \\ &\times \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \cos[\Theta(\theta-\beta)] - \frac{1}{\Theta} \sin[\Theta(\theta-\beta)] \frac{\partial f}{\partial \theta} + r \frac{\partial f}{\partial t} \right) - (1-\theta^2) \left( \frac{3}{4} \Delta_e + r \frac{\partial \Delta_e}{\partial r} \right) \times \\ &\times \cos[\Theta(\theta-\beta)] - \frac{1}{\Theta} \sin[\Theta(\theta-\beta)] \left( \frac{3}{2} \theta \Delta_e - (1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial \Delta_e}{\partial t} (1-\theta^2). \end{aligned}$$

Характеристическая поверхность определяется из условия неопределенности производной  $\partial p_*/\partial f$ , то есть при  $N_0 = 0$ . С учетом введенных обозначений данное соотношение принимает вид

$$\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{\Theta r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\gamma-1}{2} \int_0^\infty \frac{(H-u^2-w^2)^2}{\left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{w}{\Theta r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2} d\lambda - \int_0^\infty (H-u^2-w^2) d\eta = 0. \quad (22)$$

Для вывода скорости распространения характеристической поверхности [16] в цилиндрической системе координат рассмотрим некоторую точку  $M(r, \theta, t)$ , расположенную на поверхности разрыва  $f(r, \theta, t) = 0$ . Проведем нормаль к поверхности через эту точку. Обозначим через  $M^*(r^*, \theta^*, t + t')$  точку пересечения данной нормали с поверхностью, в которую переходит исходная поверхность через время  $t'$ . Тогда скоростью перемещения рассматриваемой поверхности будет величина

$$a = \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{MM^*}{t'}.$$

Так как имеют место следующие соотношения [16]:

$$r^* = r + \frac{MM^*}{g} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \theta^* = \theta + \frac{MM^*}{g} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

где  $g = \sqrt{B_1} = \sqrt{f_r^2 + f_\theta^2}$ ,  $f_r = \frac{\partial f}{\partial r}$ ,  $f_\theta = \frac{1}{\Theta r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ , то

$$\begin{aligned} f(r^*, \theta^*, t + t') &= f\left(r + \frac{MM^*}{g} \frac{\partial f}{\partial r}, \theta + \frac{MM^*}{g} \frac{\partial f}{\partial \theta}, t + t'\right) = \\ &= f(r, \theta, t) + \frac{MM^*}{g} (f_r^2 + f_\theta^2) + f_t t' + O(MM^{*2}) + O(t'^2), \end{aligned}$$

где  $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ . В результате получаем

$$a = \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{MM^*}{t'} = -\frac{f_t}{g}.$$

С учетом введенных ранее обозначений выражение для скорости перемещения поверхности разрыва  $f(r, \theta, t) = 0$  и соответствующие компоненты скорости вдоль радиальной и угловой координаты с учетом угла скольжения  $\beta$  имеют вид:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Theta r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad a_r = a \cdot \cos(\omega - \Theta\theta + \beta) = -\frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{g^2} \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$a_\theta = a \cdot \sin(\omega - \Theta\theta + \beta) = -\frac{1}{\Theta r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{g^2} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Учитывая полученное выражение для скорости  $a$ , интегральное соотношение (22) принимает вид

$$\frac{\gamma - 1}{2} \int_0^\infty \frac{(H - u^2 - w^2)^2}{(a - u \cos(\omega - \Theta\theta + \beta) - w \sin(\omega - \Theta\theta + \beta))^2} d\eta - \int_0^\infty (H - u^2 - w^2) d\eta = 0. \quad (23)$$

Здесь  $\omega$  — угол между рассматриваемым направлением распространения возмущений и направлением невозмущенного потока.

С помощью интегрального соотношения (23) определяется средняя скорость распространения произвольных возмущений давления в рассматриваемом направлении  $\omega$ , если известны профили компонент скорости и энтальпии в пограничном слое в рассматриваемой точке над поверхностью крыла. В данной работе соответствующие профили получены численным решением автомодельной задачи для стационарного течения на плоском крыле вблизи точки излома [17].

#### 4. Результаты

Для численного решения краевой задачи (3) – (11) используется конечно-разностный неявный метод, подробно описанный в [17]. Для течения в пространственном пограничном слое на крыльях с изломом передней кромки получены стационарные автомодельные решения, которые описывают течение вблизи точки излома и на полубесконечных треугольных крыльях, при различных формах крыла в плане и при разных значениях температурного фактора. В расчетах используются следующие значения: число Прандтля  $\sigma = 0.72$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$  и предполагается линейная зависимость динамического коэффициента вязкости от температуры:  $\mu \sim T$  ( $k = 1$ ). Численное интегрирование уравнений проводится на равномерной двумерной конечно-разностной сетке размерностью 400 узлов по  $\eta$  (шаг 0.02) и 60 узлов по  $\theta$ .

На рис. 2 представлено влияние температурного фактора на скорость распространения возмущений вверх по потоку ( $\omega = 180^\circ$ ) в плоскости симметрии ( $\theta = 0$ ) при симметричном обтекании (угол скольжения  $\beta = 0^\circ$ ) плоских крыльев с углами полураствора  $\Theta$ , равными  $45^\circ$  и  $135^\circ$ . Увеличение температурного фактора от 0.1 до 0.9 приводит к росту скорости распространения возмущений вверх по потоку на порядок. Это связано с тем, что нагрев обтекаемой поверхности существенно увеличивает толщину пограничного слоя, и, соответственно, растет дозвуковая область течения, по которой передаются возмущения. На крыльях с обратной стреловидностью более быстрый рост скорости распространения возмущений объясняется большим ростом толщины области дозвукового течения.

На рис. 3 представлены диаграммы направленности для скорости распространения возмущений при симметричном обтекании треугольного крыла с полууглом при вершине  $45^\circ$



( $\Theta = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ) при температурном факторе  $H_w = 0.5$ . Данные зависимости определяют величину скорости распространения характеристической поверхности по направлению  $\omega$ . При этом направление вниз по потоку ( $\omega = 0^\circ$ ) соответствует на диаграмме направлению вниз. Диаграммы построены для различных точек по размаху крыла: около передней кромки ( $\theta = 0.97$ ), при  $\theta = 0.25$  и в плоскости симметрии ( $\theta = 0$ ). В плоскости симметрии диаграмма полностью симметрична. При смещении от плоскости симметрии к передней кромке диаграмма деформируется в соответствии с направлением течения внутри пограничного слоя. Вблизи передней кромки скорость распространения возмущения в направлении нее уменьшается, но при этом наблюдается увеличение скорости в направлении носика крыла.

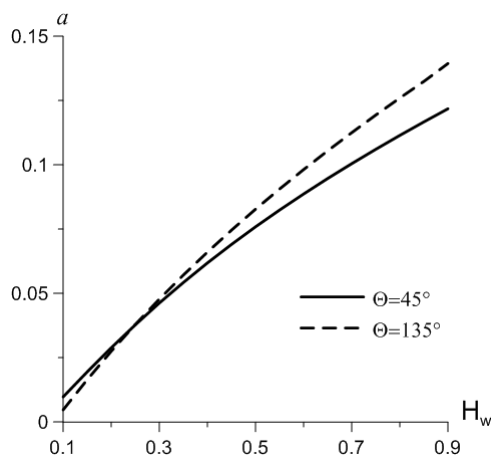


Рис. 2. Влияние температурного фактора на скорость возмущений вверх по потоку

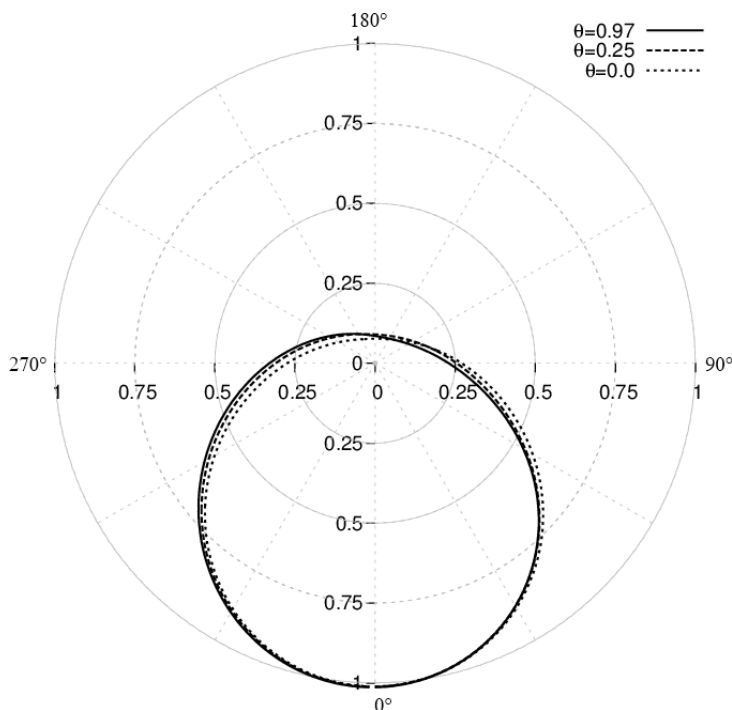


Рис. 3. Диаграммы направленности скорости распространения возмущений для различных значений  $\theta$  на треугольном крыле при  $\Theta = 45^\circ$

На рис. 4 и 5 приведены диаграммы при тех же геометрических параметрах крыла, но при разных температурных факторах: 0.05, 0.3, 0.6, 0.9. На рис. 4 — диаграммы для плоскости симметрии ( $\theta = 0$ ), на рис. 5 — вблизи правой передней кромки ( $\theta = 0.97$ ).

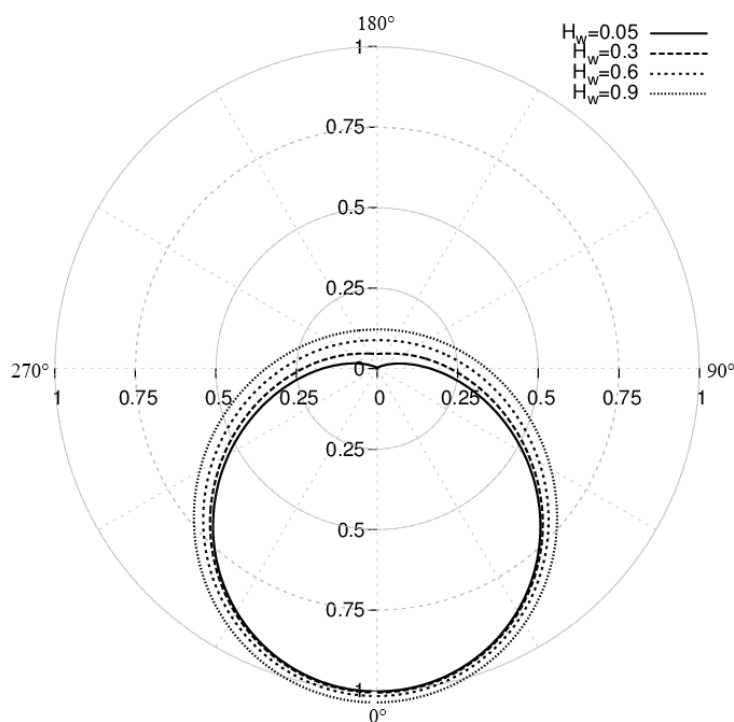


Рис. 4. Диаграммы направленности в плоскости симметрии на треугольном крыле с  $\Theta = 45^\circ$  при различных значениях температурного фактора

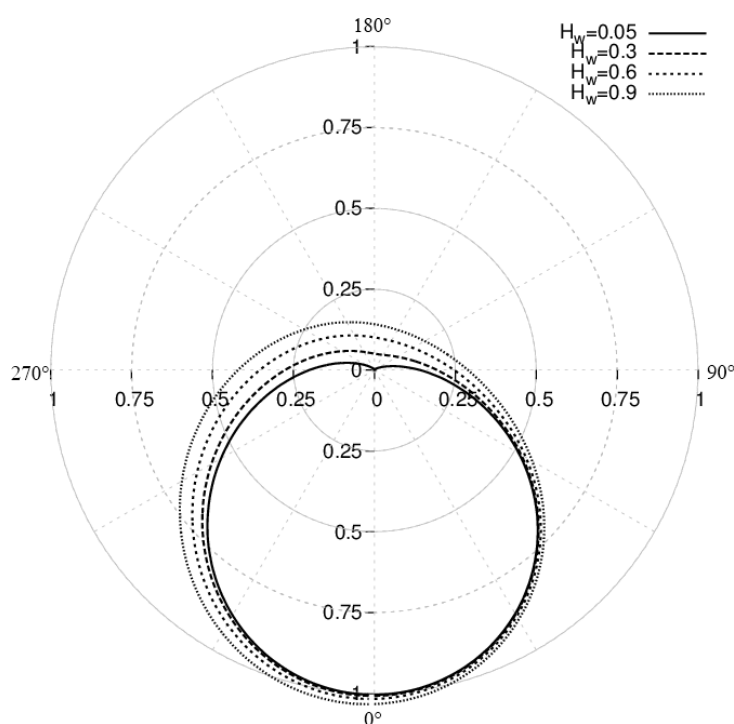


Рис. 5. Диаграммы направленности для различных значений температурного фактора на треугольном крыле при  $\Theta = 45^\circ$  вблизи передней кромки ( $\theta = 0.97$ )

Увеличение температурного фактора приводит к довольно значительному увеличению скорости распространения возмущений вверх по течению, при этом скорость вниз по потоку изменяется незначительно. Вблизи передней кромки характерно увеличение скорости в направлении точки излома при нагреве поверхности крыла. Также стоит отметить, что при малых значениях температурного фактора ( $H_w \leq 0.1$ ) наблюдается излом в диаграмме со стороны набегающего потока, что связано с фактическим «запиранием» распространения

возмущений в данном направлении при обтекании холодного крыла. Это обстоятельство ранее отмечалось в работах [8, 12].

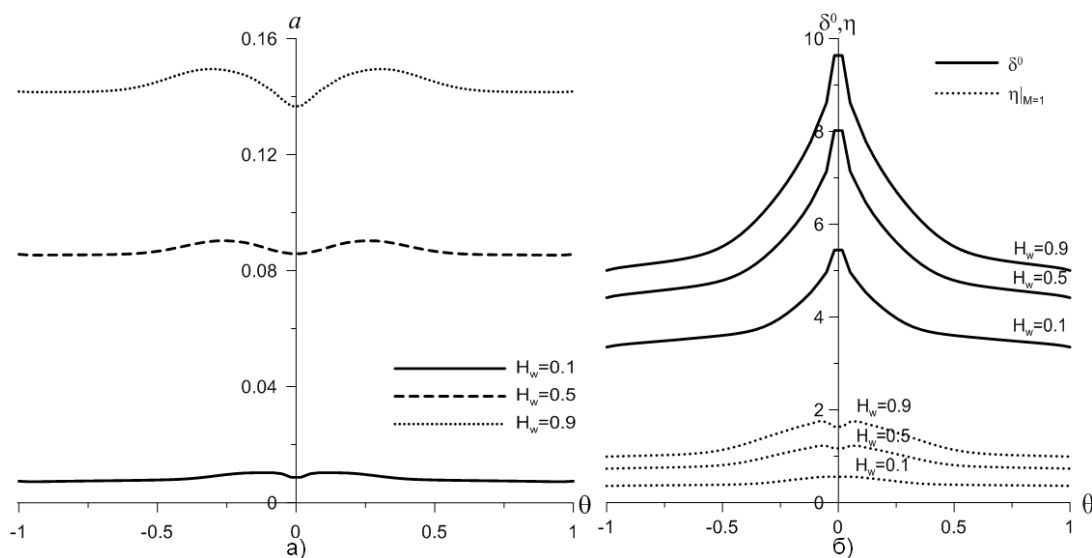


Рис. 6. а) Скорость распространения возмущений против потока; б) толщина пограничного слоя (сплошные линии) и положение звуковой линии (пунктирные линии)

На рис. 6а показано изменение скорости распространения возмущений в направлении против потока ( $\omega = 180^\circ$ ) в зависимости от угловой координаты  $\theta$  для треугольного крыла с параметрами  $\Theta = 45^\circ$  и  $\beta = 0^\circ$ . Наблюдается увеличение скорости  $a$  при смещении от  $\theta = \pm 0.5$  к центральной части на 15–25%, а непосредственно в окрестности плоскости симметрии происходит её заметное понижение. При высоких значениях температурного фактора эта область в окрестности плоскости симметрии становится более широкой, а относительное повышение меньше. Для оценки относительных размеров области дозвукового течения в пограничном слое при различных значениях  $H_w$  на рис. 6б показаны безразмерная толщина пограничного слоя  $\delta^0$  и положение звуковой линии  $M = 1$ . Толщина  $\delta^0$  определяется из условия, что безразмерная суммарная скорость течения достигает значения 0.99. Данные кривые построены в автомодельных переменных (2). В физических переменных толщина пограничного слоя при приближении к передним кромкам естественным образом уменьшается до нуля, но относительные размеры дозвуковой области остаются теми же. Уменьшение скорости распространения возмущений в окрестности плоскости симметрии крыла объясняется тем, что хотя толщина пограничного слоя здесь существенно возрастает, но относительный размер области дозвукового течения становится меньше, а, следовательно, размер области сверхзвукового течения в пограничном слое увеличивается. При увеличении температурного фактора относительная толщина дозвуковой области увеличивается в 2 раза, что приводит к увеличению скорости  $a$  более чем в 10 раз (рис. 2).

Результаты, приведенные на рис. 2–6, хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [12] при исследовании треугольного крыла с  $\Theta = 45^\circ$  в декартовой системе координат при значении числа Прандтля  $\sigma = 1$ .

Далее представлены результаты исследования распространения возмущений для крыла с геометрическими параметрами  $\Theta = 105^\circ$  и  $\beta = 35^\circ$ . На рис. 7а показана зависимость значения скорости  $a$  против потока ( $\omega = 180^\circ$ ) при различных температурных факторах. Как было показано выше, при нагреве скорость распространения возмущений вверх по потоку сильно увеличивается, однако по координате  $\theta$  она меняется слабо. Можно отметить только некоторое повышение скорости  $a$  только в окрестности линии, расположенной в направлении набегающего потока ( $\theta \approx 0.32$ ), а также вблизи передних кромок. Данное повышение скорости распространения возмущений объясняется тем, что хотя в этих областях значительно уменьшается толщина пограничного слоя (рис. 7б), но область дозвукового течения

уменьшается не так сильно и её относительная толщина становится больше. При нагреве поверхности крыла от  $H_w = 0.1$  до  $0.9$  относительная толщина дозвуковой области в пограничном слое увеличивается в 2 раза с 10% до 20%.

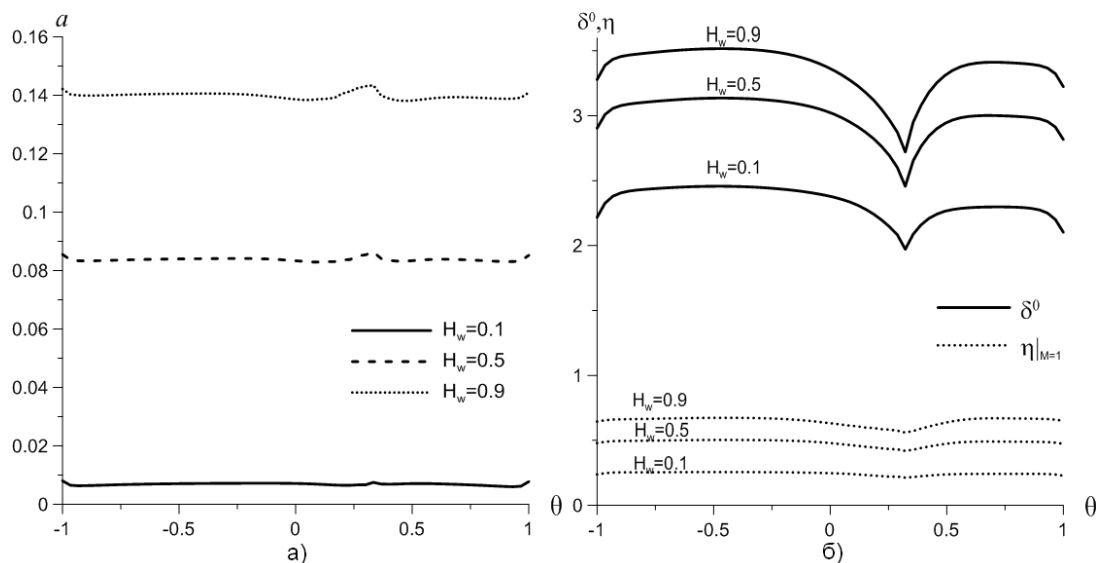


Рис. 7. а) Скорость распространения возмущений вверх по потоку при различных значениях температурного фактора; б) толщина пограничного слоя (сплошные линии) и положение звуковой линии  $M = 1$  (пунктирные линии)

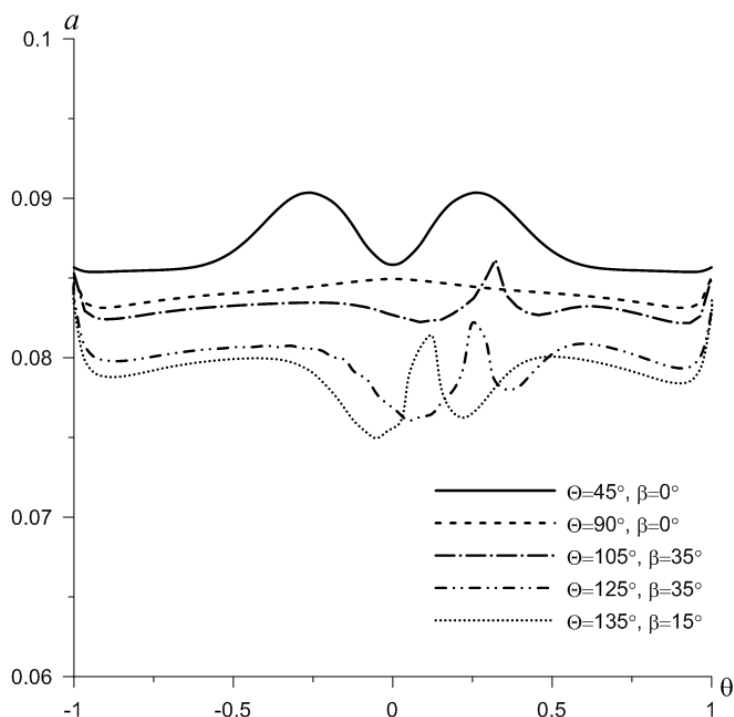


Рис. 8. Скорость распространения возмущений вверх по потоку для различных крыльев при  $H_w = 0.5$

Для сравнения распределения скорости распространения возмущений против потока на рис. 8 приведены соответствующие кривые при температурном факторе  $H_w = 0.5$  для крыльев с параметрами 1)  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ , 2)  $\Theta = 90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ , 3)  $\Theta = 105^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ , 4)  $\Theta = 125^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ , 5)  $\Theta = 135^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ . Следует отметить сильную немонотонность изменения скорости  $a$  по координате  $\theta$ . При этом на крыльях с  $\Theta \geq 90^\circ$  в непосредственной

окрестности линии, исходящей из точки излома и направленной вниз по потоку, происходит повышение скорости распространения возмущений, а при  $\Theta < 90^\circ$  скорость  $a$  уменьшается. Это связано с тем, что на крыльях с  $\Theta \geq 90^\circ$  в этой области происходит растекание потока, в отличие от треугольных крыльев, на которых в данной области происходит стекание. Кроме того, увеличение угла  $\Theta$  приводит к более резкому изменению скорости  $a$  около передних кромок.

## 5. Выводы

В результате исследования уравнений трехмерного пограничного слоя на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия получено уравнение для определения характеристической поверхности, связанной с индуцированным давлением, в цилиндрической системе координат. На основе автомодельных решений для стационарного пограничного слоя вблизи точки излома плоского крыла проведено численное исследование скорости распространения возмущений при различных значениях углов стреловидности передних кромок крыла и температурного фактора. Полученные результаты показывают, что увеличение температурного фактора приводит к росту скорости распространения вверх по потоку на порядок. При симметричном обтекании треугольного крыла с  $\Theta = 45^\circ$  отмечается увеличение скорости распространения возмущений в центральной части на 15–25% со значительным понижением её в окрестности плоскости симметрии. Для течений на крыльях с  $\Theta > 90^\circ$  скорость распространения возмущений против потока слабо меняется в зависимости от угловой координаты за исключением повышения скорости около передних кромок и в окрестности линии, исходящей из точки излома в направлении набегающего потока. Исследованы относительные размеры области дозвукового и сверхзвукового течения в пограничном слое, что позволило объяснить наблюдаемые изменения в скорости распространения возмущений вверх по потоку. Диаграммы направленности при различных значениях температурного фактора и углов стреловидности передних кромок крыла позволяют лучше понять характер распространения возмущений индуцированного давления в трехмерном пограничном слое.

---

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00173-а).

## Литература

1. *Нейланд В.Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1970. — № 4. — С. 40–49.
2. *Wang K.C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three dimensional boundary layer equations // J. Fluid Mech. — 1971. — V. 48, N 2. — P. 397–404.
3. *Wang K.C.* Aspects of multitime initial value problem originating from boundary layer equations // Phys. Fluids. — 1975. — V. 18, N 8. — P. 951–955.
4. *Нейланд В.Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Уч. зап. ЦАГИ. — 1974. — Т. 5, № 2. — С. 70–79.
5. *Нейланд В.Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло // Ученые записки ЦАГИ. — 1974. — Т. 5, № 3. — С. 28–39.
6. *Дудин Г.Н.* Об образовании областей закритического течения на крыльях малого удлинения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2005. — № 6. — С. 160–172.
7. *Липатов И.И.* Распространение возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 3. — С. 457–464.

8. *Кречетников Р.В., Липатов И.И.* Распространение возмущений в пространственных сверхзвуковых пограничных слоях // Прикладная математика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, № 3. — С. 116–127.
9. *Krechetnikov R. V., Lipatov I. I.* On upstream influence in supersonic flows // Journal of Fluid. Mechanics. — 2005. — Vol. 539. — P. 167–178.
10. *Дубинский С.В., Липатов И.И.* Распространение возмущений в сверхзвуковых ламинарных и турбулентных пограничных слоях // Письма в ЖТФ. — 2008. — Т. 34, вып. 2. — С. 32–38.
11. *Липатов И.И., Чжо Т.А.* Распространение возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 107–112.
12. *Дудин Г.Н., Мьинт К.Т.* О распространении возмущений в трехмерном пограничном слое на треугольном крыле на режиме вязко-невязкого взаимодействия // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2010. — № 3. — С. 91–102.
13. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Башкин В.А., Дудин Г.Н.* Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа. — М.: Наука. Физматлит, 2000.
15. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. — М.: Физматлит, 2003.
16. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 2. — М.: Физматлит, 1963.
17. *Дудин Г.Н., Ледовский А.В.* Течение в окрестности точки излома передней кромки тонкого крыла на режиме сильного взаимодействия // Учёные записки ЦАГИ. — 2011. — Т. XLII, № 2. — С. 11–25.

*Поступила в редакцию 15.02.2012.*