УДК 517.972

В.М. Ипатова

Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)

Задача о предписанной точке минимума

Предлагается новая постановка задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений. Доказывается теорема существования и единственности её решений. Для основного оператора задачи вычисляются его собственные функции и собственные значения. Рассматривается алгоритм численного решения задачи для одномерного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: обратные и оптимизационные задачи, вариационная ассимиляция данных, собственные значения, вычислительные алгоритмы.

I. Введение

Проблема получения и рационального использования данных наблюдений остается актуальной на протяжении многих десятилетий. По мере развития мощных современных вычислительных и измерительных средств технологии анализа и обработки данных находят всё более широкое применение в различных областях науки и практики. К числу таких методик относится процедура ассимиляции (усвоения) данных наблюдений, представляющая собой обратную задачу или задачу оптимального управления об идентификации распределённых параметров математических моделей. Как известно, сами модели могут лишь приближённо отображать природные процессы, поэтому их необходимо периодически «подправлять» данными наблюдений. С другой стороны, наблюдаемые поля, неизбежно неполные и зашумлённые, нуждаются в исправлении путём их усвоения в подходящей математической модели. Метод ассимиляции данных наблюдений имеет следующую общепринятую вариационную трактовку: определяется функционал стоимости, измеряющий расхождение между наблюдаемыми величинами и результатами моделирования, после чего разыскиваются те неизвестные характеристики модели, для которых функционал стоимости принимает своё наименьшее возможное значение [1–17]. Задача ассимиляции данных эквивалентна в определенном смысле некорректно поставленным задачам, что обуславливает трудности её решения и одновременно приводит к необходимости привлечения здесь методов регуляризации. Исследования последних лет показывают высокую чувствительность решений к ошибкам в данных измерений [18–20]. В связи с этим большое значение приобретают вопросы разработки новых принципов вариационной ассимиляции данных, в частности представляет интерес исследование следующей «задачи о предписанной точке минимума». Пусть точно известно начальное состояние системы u_0, а распределенное внешнее воздействие f требуется определить с помощью целевого функционала стоимости $S(u)$, где $u = u(u_0; f)$ — решение системы. При поиске неизвестной функции f мы будем руководствоваться следующими соображениями:

1) потребуем, чтобы при данном фиксированном f функционал $S(u)$ нельзя было уменьшить, выбирая вместо u_0 какое-либо другое начальное состояние. Иначе говоря, u_0 является предписанной заранее точкой минимума, и нам подходят только те функции f, для которых этот минимум имеет место;

2) среди всех f, удовлетворяющих условию 1, мы выберем ту функцию, на которой $S(u)$ принимает свое наименьшее возможное значение.

Разумеется, функционал $S(u)$ можно было бы уменьшить, если отказаться от требования 1 и провести оптимизацию по всему пространству. Поэтому рассматриваемый здесь алгоритм характеризует ситуацию, в которой информация о начальном состоянии u_0 считается гораздо более достоверной, чем содержащаяся в $S(u)$ информация о данных наблюдений. К тому же сам функционал $S(u)$ обычно включает в себя регуляризующие добавки, которые никак не связаны с наблюдаемыми полями, но позволяют корректно поставить задачу и эффективно организовать вычисления. В этом случае становится очевидным, что наименьшее значение функционала еще не означает наилучшего согласования с наблюдениями, и кажется вполне разумным требование о существовании предписанной точки минимума.

В настоящей работе исследуются вопросы существования и единственности решения задачи (1) –(2) и вычисляются собственные значения основного оператора задачи, входящего в уравнение для управления. Полученные результаты применяются в разделе IV для построения алгоритма численного решения задачи на примере одномерного уравнения теплопроводности.

II. Постановка задачи. Существование и единственность решений

Пусть A — не зависящий от времени линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения, плотной в H. Будем предполагать, что A — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в H, имеющий вполне непрерывный обратный оператор. Обозначим: $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в H; X^α, $\alpha \in \mathbf{R}$ — гильбертовы пространства со скалярным произведением $[u,v]_\alpha = [A^\alpha u, A^\alpha v]$; $Y^\alpha = L_2(0,T;X^\alpha)$, где $T < +\infty$, $Y = Y^0 = L_2(0,T;H)$; $(\cdot,\cdot)_\alpha$, $||\cdot||_\alpha$ — скалярное произведение и норма в Y^α; $W = \{u \in Y^{\alpha+1/2}, \frac{du}{dt} \in Y^{\alpha-1/2}\}$; W^* — сопряженное с W пространство при отождествлении Y со своим сопряженным пространством.

Пусть $\{w_n\}$ — полная ортонормированная система в H, составленная из собственных функций A: $Aw_n = \lambda_n w_n$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим эволюционную задачу

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad t \in (0,T);$$

$$u(0) = u_0,$$

ее разрешающий оператор $G : X^\alpha \times Y^{\alpha-1/2} \to W$ определим равенством $u = G(u_0; f)$ $\forall u_0 \in X^\alpha \forall f \in Y^{\alpha-1/2}$. Пусть $Q_0 : X^\alpha \to W$ и $Q : Y^{\alpha-1/2} \to W$ есть сужения G на множества $X^\alpha \times \{0\}$ и $\{0\} \times Y^{\alpha-1/2}$ соответственно. Сопряженные операторы $Q_0^* : W^* \to X^\alpha$ и $Q^* : W^* \to Y^{1/2-\alpha}$ определим соотношениями

$$(Q_0 y, g) = [y, Q_0^* g]_\alpha \quad \forall y \in X^\alpha \quad \forall g \in W^*,$$

$$(Qf, g) = (f, Q^* g) \quad \forall f \in Y^{\alpha-1/2} \quad \forall g \in W^*.$$

Заметим, что для $g \in Y^{\alpha-1/2}$ значения $Q_0^* g$ и $Q^* g$ задаются равенствами

$$Q_0^* g = A^{-2\alpha} q(0), \quad Q^* g = q,$$

где q есть решение задачи $-\frac{dq}{dt} + Aq = g$, $q(T) = 0$.

Пусть на W задан функционал

$$S(u) = \frac{\gamma}{2} \|u_t + Au - f^a\|^2_{\alpha-1/2} +$$

$$+\frac{\sigma}{2} \|u\|^2_{\alpha+1/2} + \frac{1}{2} \|u - \hat{u}\|^2_\beta ,$$

где $\gamma > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\beta \leqslant \alpha + 1/2$, f^a — некоторое априорно известное приближенное значение f.

При заданных $u_0 \in X^\alpha$ $\hat{u} \in Y^\beta$, $f^a \in Y^{\alpha-1/2}$ введем множество F всех функций $f \in Y^{\alpha-1/2}$, для которых $S(G(u_0; f)) \leqslant S(G(v_0; f))$ $\forall v_0 \in X^\alpha$.

Лемма 1. Множество F слабо замкнуто в $Y^{\alpha-1/2}$.

Доказательство. Функция $f \in Y^{\alpha-1/2}$ принадлежит F, если первая вариация $S(u)$ равна нулю на $u = G(u_0; f)$ для всех $v \in Q_0 X^\alpha$:

$$\left.\frac{dS(u + \theta Q_0 w_0)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \sigma(A^{\alpha+1/2}u, A^{\alpha+1/2}Q_0 w_0) +$$

$$+(A^\beta(u - \hat{u}), A^\beta Q_0 w_0) = 0 \qquad \forall w_0 \in X^\alpha. \qquad (1)$$

Пусть $f_n \in F$ и $f_n \to f$ слабо в $Y^{\alpha-1/2}$. Из ограниченности операторов Q и Q_0 вытекает, что $u_n = G(u_0; f_n) \to u$ слабо в $Y^{\alpha+1/2}$. Поэтому для u остается справедливым равенство (1).

Задача о предписанной точке минимума сводится к отысканию функции f такой, что

$$f \in F; \qquad (2)$$

$$S(G(u_0; f)) \leqslant S(G(u_0; g)) \quad \forall g \in F. \qquad (3)$$

Имеет место следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1. Если $\gamma > 0$, $\sigma > 0$, $\beta \leqslant \alpha + 1/2$ или $\gamma > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\beta = \alpha + 1/2$, то задача (2) — (3) имеет единственное решение при всех $u_0 \in X^\alpha$, $\hat{u} \in Y^\beta$, $f^a \in Y^{\alpha-1/2}$.

Доказательство. Покажем, что множество F не пусто. Возьмем $v_n = Q_0 w_n = \exp(-\lambda_n t) w_n$, тогда (1) принимает вид

$$\delta S(u) v_n = \sigma(u, \lambda_n^{2\alpha+1} v_n) + (u - \hat{u}, \lambda_n^{2\beta} v_n) = 0 \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Обозначим через

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n t) - \exp(\lambda_n(t - 2T)),$$

$$c_n = \int_0^T \psi_n^2(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}(1 - \exp(-4\lambda_n T)) - 2T \exp(-2\lambda_n T),$$

$$m_n = \frac{1}{2}(\sigma \lambda_n^{2\alpha} + \lambda_n^{2\beta-1}).$$

Из уравнения $-q_t + Aq = v_n$, $q(T) = 0$, находим $q = q_n = \frac{1}{2\lambda_n} \psi_n(t) w_n$.

Используя равенство

$$(u, v_n) = (f, q_n) + \frac{1}{2\lambda_n}(1 - \exp(-2\lambda_n T))[u_0, w_n],$$

имеем

$$\delta S(u) v_n = m_n \int_0^T \psi_n(t)[f, w_n] dt +$$

$$+ m_n(1 - \exp(-2\lambda_n T))[u_0, w_n] - \lambda_n^{2\beta}(\hat{u}, v_n) = 0,$$

то есть

$$\int_0^T \psi_n(t)[f, w_n] dt =$$

$$= \frac{\lambda_n^{2\beta}}{m_n}(\hat{u}, v_n) - (1 - \exp(-2\lambda_n T))[u_0, w_n].$$

Следовательно, минимальное по норме $L_2(0,T)$ значение $[f, w_n]$ равно

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\lambda_n^{2\beta}}{m_n} \int_0^T \exp(-\lambda_n t)[\hat{u}, w_n] dt -\right.$$

$$\left. -(1 - \exp(-2\lambda_n T))[u_0, w_n]\right) \psi_n(t).$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n(t) w_n$$

принадлежит $Y^{\alpha-1/2}$. Действительно, $c_n \geqslant 1/(4\lambda_n)$ при достаточно больших n, тогда

$$\left\| \hat{f} \right\|^2_{\alpha-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha-1} \int_0^T \hat{f}_n^2(t) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha-1} \frac{2}{c_n} \left(\frac{\lambda_n^{4\beta-1}}{2m_n^2} \int_0^T [\hat{u},w_n]^2 dt + [u_0,w_n]^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2\alpha+2\beta-1}}{m_n^2} \int_0^T \lambda_n^{2\beta} [\hat{u},w_n]^2 dt + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} [u_0,w_n]^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \left\| \hat{u} \right\|^2_{\beta} + 8 [u_0]^2_{\alpha},$$

где $c = 4/\sigma^2$ при $\beta < \alpha - 1/2$ и $c = 4/(\sigma+1)^2$ при $\beta = \alpha - 1/2$.

По построению $\hat{f} \in F$. Теперь осталось заметить, что множество F слабо замкнуто в $Y^{\alpha-1/2}$, функционал $J(f) = S(G(u_0; f))$, $f \in F$, является строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу в $Y^{\alpha-1/2}$, а любая его минимизирующая последовательность ограничена, из чего следует, что $J(f)$ имеет на F точку минимума и эта точка минимума единственна.

III. Собственные функции и собственные значения основного оператора задачи

Обозначим через $B = \sigma A^{2\alpha+1} + A^{2\beta}$. $D = \gamma A^{2\alpha-1} + Q^* B Q$. Условие (1) можно записать в виде

$$(Bu - A^{2\beta}\hat{u}, Q_0 w_0) = [Q_0^*(Bu - A^{2\beta}\hat{u}), w_0] = 0$$

$$\forall w_0 \in X^{\alpha},$$

что равносильно уравнению $Q_0^*(Bu - A^{2\beta}\hat{u}) = 0$, то есть

$$Q_0^* B Q f = Q_0^*(A^{2\beta}\hat{u} - B Q_0 u_0), \qquad (4)$$

Обозначим через F_0 множество всех допустимых приращений $g = \tilde{f} - f$, где f, $\tilde{f} \in F$. Из (4) вытекает, что приращения удовлетворяют уравнению $Q_0^* B Q g = 0$, то есть F_0 совпадает с ядром оператора $Q_0^* B Q$. Условие (3) можно записать как

$$S(u) \leqslant S(u + Qg) \quad \forall g \in F_0. \qquad (5)$$

Рассмотрим первую вариацию $S(u)$ относительно переменной f:

$$\delta S(u) g = \left. \frac{dS(u + \theta Q g)}{d\theta} \right|_{\theta=0} =$$

$$= \gamma(A^{\alpha-1/2}(f - f^a), A^{\alpha-1/2} g) +$$

$$+ \sigma(A^{\alpha+1/2} u, A^{\alpha+1/2} Q g) + (A^{\beta}(u - \hat{u}), A^{\beta} Q g) =$$

$$= \gamma(A^{2\alpha-1}(f - f^a), g) + (Q^*(Bu - A^{2\beta}\hat{u}), g) = 0$$

$$\forall g \in F_0.$$

Заметив, что $(Q^* B Q_0 u_0, g) = (u_0, Q_0^* B Q g) = 0$, преобразуем последнее равенство к виду

$$\gamma(A^{2\alpha-1}(f - f^a), g) + (Q^*(BQf - A^{2\beta}\hat{u}), g) =$$

$$= (Df - \gamma A^{2\alpha-1} f^a - Q^* A^{2\beta}\hat{u}, g) = 0 \quad \forall g \in F_0.$$

Таким образом, (5) равносильно тому, что функция $Df - \gamma A^{2\alpha-1} f^a - Q^* A^{2\beta}\hat{u}$ ортогональна ядру оператора $Q_0^* B Q$. Тогда эта функция принадлежит области значений сопряженного оператора $Q^* B Q_0$, то есть существует $r_0 \in X^{\alpha}$, для которого

$$Df - \gamma A^{2\alpha-1} f^a - Q^* A^{2\beta}\hat{u} = Q^* B Q_0 r_0. \qquad (6)$$

Исключая f из системы (4), (6), получаем для управления r_0 уравнение

$$M r_0 = \eta, \qquad (7)$$

где

$$M = Q_0^* B Q D^{-1} Q^* B Q_0,$$

$$\eta = Q_0^*(A^{2\beta}\hat{u} - B Q_0 u_0 - B Q D^{-1}(\gamma A^{2\alpha-1} f^a + Q^* A^{2\beta}\hat{u})).$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то

1) оператор M имеет собственные функции w_n, отвечающие собственным значениям

$$\mu_n = (\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1}) \left[\frac{1 - \exp(-2\lambda_n T)}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_n (1 - \exp(-2 a_n T))}{a_n + \lambda_n + (a_n - \lambda_n)\exp(-2 a_n T)} \right],$$

где $a_n = \lambda_n \sqrt{1 + (\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})/\gamma}$;

2) решением задачи (2) — (3) является функция

$$f = D^{-1} Q^* A^{2\beta}\hat{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{\mu_n} y_n(t) w_n,$$

$$f = D^{-1} Q^* A^{2\beta}\hat{u} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\mu_n} (\exp(-a_n t) - \exp(a_n (t - 2T))) w_n,$$

в которой

$$\eta_n = \frac{\lambda_n^{2\beta-2\alpha}}{h_n(0)} \int_0^T h_n(t) \hat{u}_n dt - \frac{1}{2}(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1}) \times$$

$$\times (1 - \exp(-2\lambda_n T)) u_{0,n} - \frac{\gamma}{\lambda_n} \int_0^T y_n(t) f_n^a dt,$$

$$h_n(t) = (a_n + \lambda_n)\exp(-a_n t) + (a_n - \lambda_n)\exp(a_n (t - 2T)),$$

$$\hat{u}_n = [\hat{u}, w_n], \quad u_{0,n} = [u_0, w_n],$$

$$f_n^a = [f^a, w_n],$$

$$y_n(t) = \frac{\lambda_n^2(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})}{\gamma h_n(0)} \times$$
$$\times [\exp(-a_n t) - \exp(a_n(t-2T))].$$

Доказательство. Пусть w — собственная функция A, $Aw = \lambda w$, вычислим для неё значение Mw. Повторяя рассуждения теоремы 1, находим $Q^*BQ_0w = \frac{b}{2\lambda}\psi(t)w$, где $b = \sigma\lambda^{2\alpha+1} + \lambda^{2\beta}$, $\psi(t) = \exp(-\lambda t) - \exp(\lambda(t-2T))$.

Для $\xi = D^{-1}Q^*BQ_0w$ имеем уравнение

$$\gamma\lambda^{2\alpha-1}\xi + bQ^*Q\xi = \frac{b}{2\lambda}\psi(t)w. \qquad (8)$$

Будем искать его решение в виде $\xi = y(t)w$. Поскольку $Q^*Q\xi = 0$ при $t = T$, то из (8) находим $y(T) = 0$. Подействовав на обе части (8) оператором $-\frac{d}{dt} + A$, получаем уравнение

$$\gamma\lambda^{2\alpha-1}(-y' + \lambda y)w + bQ\xi = b\exp(-\lambda t)w. \qquad (9)$$

Следовательно, $-y'(0) + \lambda y(0) = b\lambda^{1-2\alpha}/\gamma$. Подействовав теперь на (8) оператором $\frac{d}{dt} + A$, приходим к уравнению $\gamma\lambda^{2\alpha-1}(-y'' + \lambda^2 y) + by = 0$, то есть $y'' = a^2 y$, где $a = \sqrt{\lambda^2 + b\lambda^{1-2\alpha}/\gamma}$. С учетом начальных условий находим его решение:

$$y(t) = \frac{b(\exp(-at) - \exp(a(t-2T)))}{\gamma\lambda^{2\alpha-1}(\lambda + a + (a-\lambda)\exp(-2aT))}.$$

Далее рассмотрим уравнение $-q_t + Aq = bQy(t)w$, $q(T) = 0$. Его решением будет $q = z(t)w$, где $-z'' + \lambda^2 z = by(t)$, $z(T) = 0$, $-z'(0) + \lambda z(0) = 0$, то есть

$$z(t) = \lambda^{2\alpha+1}(\sigma + \lambda^{2\beta-2\alpha-1}) \times$$
$$\times \left[\frac{\exp(-\lambda t) - \exp(\lambda(t-2T))}{2\lambda} - \right.$$
$$\left. - \frac{\exp(-at) - \exp(a(t-2T))}{\lambda + a + (a-\lambda)\exp(-2aT)}\right].$$

Заметив, что $Mw = \lambda^{-2\alpha}z(0)w$, получаем собственные значения M.

Для того чтобы построить разложение $\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n w_n$ для функции в правой части (7), вычислим

$$[\eta,w] = [\eta,\lambda^{-2\alpha}w]_\alpha =$$
$$= (A^{2\beta}\hat{u} - BQ_0u_0 - BQD^{-1}(\gamma A^{2\alpha-1}f^a +$$
$$+ Q^*A^{2\beta}\hat{u}), Q_0\lambda^{-2\alpha}w) =$$
$$= \lambda^{2\beta-2\alpha}(\hat{u},Q_0w) - b\lambda^{-2\alpha}(Q_0u_0,Q_0w) -$$
$$-(\gamma A^{2\alpha-1}f^a + Q^*A^{2\beta}\hat{u}, D^{-1}Q^*BQ_0\lambda^{-2\alpha}w) =$$
$$= \lambda^{2\beta-2\alpha}(\hat{u},Q_0w - Qy(t)w) - b\lambda^{-2\alpha}(Q_0u_0,Q_0w) -$$
$$-\gamma\lambda^{-1}(f^a,y(t)w) =$$
$$= \frac{\lambda^{2\beta-2\alpha}}{h(0)}\int_0^T h(t)[\hat{u},w]dt - \frac{1}{2}(\sigma + \lambda^{2\beta-2\alpha-1}) \times$$
$$\times (1 - \exp(-2\lambda T))[u_0,w] - \frac{\gamma}{\lambda}\int_0^T y(t)[f^a,w]dt,$$

где $h(t) = (\lambda + a)\exp(-at) + (a-\lambda)\exp(a(t-2T))$.

Далее воспользуемся равенствами

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n w_n/\mu_n$$

и $D^{-1}Q^*BQ_0w = y(t)w$ для вычисления $f = D^{-1}(Q^*A^{2\beta}\hat{u} + Q^*BQ_0r_0)$, что завершает доказательство теоремы.

Ниже мы подробно рассмотрим алгоритм численного решения задачи (2) — (3) на примере одномерного уравнения теплопроводности для частного случая $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$.

Алгоритм численного решения задачи. В ограниченной области $\Omega = (0,L) \times (0,T)$, $T < +\infty$, рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \qquad (10)$$

Будем обозначать через H действительное пространство $L_2(0,L)$ со скалярным произведением $[u.v] = \int_0^L u(x)v(x)dx$ и нормой $[u] = \sqrt{[u,u]}$ и через Y действительное пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u.v) = \iint_\Omega u(x,t)v(x,t)dxdt$ и нормой $\| u \| = \sqrt{(u,u)}$. Введем пространство $X = \{u(x) : u \in H, du/dx \in H, u(0) = u(L) = 0\}$.

Обозначим через A сужение оператора $(-d^2/dx^2)$ на класс функций, равных нулю на концах отрезка $[0,L]$, и через $w_n = w_n(x) = \sin(\pi nx/l)$, $\lambda_n = (\pi nx/l)^2$, где $l = L/2$, собственные функции и собственные значения A. Оператор A^2 введем следующим образом: если $u = \sum_{n=1}^{\infty}u_n w_n(x)$, то $A^2u = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 u_n w_n(x)$.

Как и ранее, будем предполагать, что имеются данные наблюдений $\hat{u}(x,t)$ за поведением решения (10), которые используются для отыскания неизвестной правой части $f(x,t)$ при заданном начальном состоянии $u_0(x)$. Определим функционал стоимости:

$$S(u) = \frac{\gamma}{2}\|u_t + Au - f^a\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|Au\|^2 + \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2,$$

где γ, σ — неотрицательные параметры регуляризации, $f^a \in L_2(\Omega)$ — некоторое априорно известное приближенное значение f.

Для всех $f \in Y$, $v_0 \in X$ обозначим через $z = Qf$ и $v = Q_0v_0$ решения задач

$$\begin{cases} z_t + Az = f, \quad x \in (0,L), t \in (0,T), \\ z(0,t) = z(L,t) = 0, \quad z(x,0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t + Av = 0, \quad x \in (0,L), t \in (0,T), \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad v(x,0) = v_0. \end{cases}$$

В этих обозначениях решение задачи (10) записывается как $u = Qf + Q_0u_0$. Сопряженные линейные операторы Q^* и Q_0^* определим соотношениями $Q^*g = q$, $Q_0^*g = q(x,0)$, где функция $q = q(x,t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} -q_t + Aq = g, \quad x \in (0,L),\, t \in (0,T), \\ q(0,t) = q(L,t) = 0, \quad q(x,T) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Интегрируя по частям, нетрудно проверить, что выполняются равенства

$$(Qf,g) = (f,Q^*g), \quad (Q_0v_0,g) = [v_0,Q_0^*g].$$

Для целей дальнейшего исследования введем также операторы $B = E + \sigma A^2$, где E — тождественный оператор, $D = \gamma E + Q^*BQ$, $M = Q_0^*BQD^{-1}Q^*BQ_0$.

Сформулированное во введении условие 1 можно записать в виде

$$S(u) \leqslant S(u + Q_0v_0) \qquad \forall v_0 \in X. \tag{12}$$

Рассмотрим первую вариацию $S(u)$ относительно переменной u_0:

$$\left.\frac{dS(u+\theta Q_0v_0)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \sigma(Au,AQ_0v_0) + (u-\hat{u},Q_0v_0) =$$
$$= (Bu - \hat{u},Q_0v_0) = [Q_0^*(Bu-\hat{u}),v_0] = 0$$
$$\forall v_0 \in X.$$

Таким образом, (12) равносильно уравнению $Q_0^*(Bu - \hat{u}) = 0$, то есть

$$Q_0^*BQf = Q_0^*\hat{u} - Q_0^*BQ_0u_0. \tag{13}$$

В теореме 1 показано, что множество F функций, удовлетворяющих (13), не является пустым при любых $u_0 \in X$, $\hat{u} \in Y$. Обозначим через F_0 множество всех допустимых приращений $g = \tilde{f} - f$, где $f,\tilde{f} \in F$. Из (13) вытекает, что приращения удовлетворяют уравнению $Q_0^*BQg = 0$, то есть F_0 совпадает с ядром оператора Q_0^*BQ.

Сформулированное во введении условие 2 можно записать в виде

$$S(u) \leqslant S(u + Qg) \quad \forall g \in F_0. \tag{14}$$

Рассмотрим первую вариацию $S(u)$ относительно переменной f:

$$\delta S(u)g = \left.\frac{dS(u+\theta Qg)}{d\theta}\right|_{\theta=0} =$$
$$= \gamma(f - f^a,g) + \sigma(Au,AQg) + (u - \hat{u},Qg) =$$
$$= \gamma(f - f^a,g) + (Bu - \hat{u},Qg) =$$
$$= \gamma(f - f^a,g) + (Q^*(Bu-\hat{u}),g) = 0 \quad \forall g \in F_0. \tag{15}$$

Заметим, что $(Q^*BQ_0u_0,g) = (u_0,Q_0^*BQg) = 0$, поэтому (15) преобразуется к виду

$$\gamma(f - f^a,g) + (Q^*(BQf - \hat{u}),g) =$$
$$= (Df - \gamma f^a - Q^*\hat{u},g) = 0 \quad \forall g \in F_0.$$

Таким образом, (14) равносильно тому, что функция $Df - \gamma f^a - Q^*\hat{u}$ ортогональна ядру оператора Q_0^*BQ. Тогда $Df - \gamma f^a - Q^*\hat{u}$ принадлежит области значений сопряженного оператора Q^*BQ_0, то есть существует функция $r_0(x)$, для которой $Df - \gamma f^a - Q^*\hat{u} = Q^*BQ_0r_0$. Выражая из последнего соотношения

$$f = D^{-1}(Q^*\hat{u} + \gamma f^a) + D^{-1}Q^*BQ_0r_0 \tag{16}$$

и подставляя результат в (13), получаем уравнение для определения $r_0(x)$:

$$Mr_0 = \eta, \tag{17}$$

где

$$\eta = Q_0^*(\hat{u} - BQD^{-1}(\gamma f^a + Q^*\hat{u}) - BQ_0u_0). \tag{18}$$

Из доказательства теоремы 2 вытекает, что оператор M имеет собственные функции $w_n(x)$, отвечающие собственным значениям

$$\mu_n = \lambda_n(\sigma + \lambda_n^{-2})\times$$
$$\times\left[\frac{1-\exp(-2\lambda_nT)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda_n(1-\exp(-2a_nT))}{a_n + \lambda_n + (a_n - \lambda_n)\exp(-2a_nT)}\right],$$

где $a_n = \lambda_n\sqrt{1 + (\sigma + \lambda_n^{-2})/\gamma}$.

Таким образом, вычислив функцию $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_nw_n(x)$, мы можем найти решение уравнения (17) по формуле

$$r_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{\mu_n}w_n(x),$$

а затем найти $f(x,t)$ в соответствии с (16).

При реализации алгоритма необходимо обращать оператор $D = \gamma E + Q^*BQ$, который является самосопряженным и положительно определенным. Действительно, обозначив через $z = Qf$, $z_1 = Qf_1$, имеем

$$(Df,f_1) = \gamma(f,f_1) + (z,z_1) + \sigma(Az,Az_1) = (f,Df_1),$$
$$(Df,f) = \gamma||f||^2 + ||z||^2 + \sigma||Az||^2 > \gamma||f||^2.$$

Для оценки сверху спектра оператора D воспользуемся равенствами

$$(f,z) = (z_t + Az,z) \geqslant (Az,z),$$
$$(f,Az) = (z_t + Az,Az) \geqslant ||Az||^2 \quad \forall z \in QY,$$

из которых следует, что

$$||z||^2 \leqslant (Az,z)/\lambda_1 \leqslant (f,z)/\lambda_1 \leqslant ||f||\cdot||z||/\lambda_1,$$

$||Az|| \leqslant ||f||$. Тогда $(Df,f) \leqslant \Lambda||f||^2$ при $\Lambda = \gamma + \sigma + 1/\lambda_1$, то есть максимальное собственное значение D не превосходит Λ. Уравнение вида $Df = y$ равносильно системе

$$z_t + Az = f, \quad z|_{t=0} = 0,$$

$$-q_t + Aq = Bz, \quad q|_{t=T} = 0,$$
$$\gamma f + q = y,$$

где функции z и q равны нулю на концах отрезка $[0,L]$. Для её решения воспользуемся методом простой итерации:

$$\begin{cases} z_t^{(n)} + Az^{(n)} = f^{(n)}, \quad z^{(n)}|_{t=0} = 0, \\ -q_t^{(n)} + Aq^{(n)} = Bz^{(n)}, \quad q^{(n)}|_{t=T} = 0, \\ f^{(n+1)} = f^{(n)} - \beta(\gamma f^{(n)} + q^{(n)} - y). \end{cases}$$

В [21] показано, что итерационный процесс будет сходящимся, если $\beta \in (0,2/\Lambda)$. Поэтому можно взять $\beta = \frac{3}{2\Lambda}$.

Пусть $\tau = T/K$ — шаг сетки по времени, будем обозначать верхним индексом k функции, относящиеся к моменту $t = t_k = k\tau$. Для решения задач вида (10) и (11) воспользуемся неявными конечно-разностными схемами:

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} + Au^k = f^k, \quad u^k(0) = u^k(L) = 0,$$
$$k = 1, ..., K, \quad u^0 = u_0(x),$$
$$\frac{q^k - q^{k+1}}{\tau} + Aq^k = g^k, \quad q^k(0) = q^k(L) = 0,$$
$$k = K-1, ..., 0, \quad q^K = 0.$$

На каждом временном слое все функции раскладываются в ряд Фурье по системе $\{w_n(x)\}$. Поскольку оператор M заменяется своим конечно-разностным аналогом M^τ, то полезно уточнить его собственные значения, непосредственно вычислив функции $M^\tau w_n$, $n = \overline{1,N}$.

IV. Заключение

В настоящей работе предложена процедура ассимиляции данных наблюдений такая, что функционал стоимости минимизируется на множестве управлений, при которых заданное начальное состояние является точкой минимума. Доказаны существование и единственность решения оптимизационной задачи, вычислены собственные значения основного оператора, входящего в уравнение для управления. Подробно рассмотрен алгоритм численного решения задачи на примере одномерного уравнения теплопроводности. Полученные результаты могут быть использованы на практике для вариационной ассимиляции данных наблюдений в линейных моделях и в моделях с малой нелинейностью.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1-500) и РФФИ (проект 09-01-00284-а).

Литература

1. *Agoshkov V.I., Marchuk G.I.* On solvability and numerical solution of data assimilation problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1993. — V. 8, N. 1. — P. 1–16.

2. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* Разрешимость одной задачи вариационного усвоения данных наблюдений // ДАН. — 1998. — Т. 360, № 4. — С. 439–441.

3. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 151–153.

4. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифф. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1064–1075.

5. *Agoshkov V.I., Ipatova V.M.* Convergence of solutions to the problem of data assimilation for a multilayer quasigeostrophic model of ocean dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2010. — V. 25, N. 2. — P. 105–115.

6. *Агошков В.И., Лебедев С.А., Пармузин Е.И.* Численное решение проблемы вариационного усвоения оперативных данных наблюдений о температуре поверхности океана // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 76–107.

7. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // ЖВМ и МФ. — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1371–1391.

8. *Bennett A.F.* Inverse modeling of the ocean and atmosphere. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

9. *Венцель М., Залесный В.Б.* Усвоение данных в одномерной модели конвекции-диффузии тепла в океане // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 613–629.

10. *Castruccio F., Verron J., Gourdeau L., Brancart J.-M., Brasseur P.* Joint altimetric and in-situ data assimilation using GRACE mean dynamic topography: 1993–1998 hind cast experiment in the Tropical Pacific Ocean. // Ocean Dynamics. — 2008. — V. 58. — P. 43–63.

11. *Ипатова В.М.* Сходимость численных решений задачи вариационного усвоения данных альтиметрии в квазигеострофической модели циркуляции океана // Дифф. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 411–418.

12. *Ипатова В.М.* Задача ассимиляции данных об определении коэффициентов и начального условия для трехмерной модели гидротермодинамики океана // Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики. — М.: МФТИ, 2010. — С. 102–111.

13. *Liu C., Xiao Q., Wang B.* An ensemble-based 4D-Var data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test // American Weather Review. — 2008. — V. 136. — P. 3363–3373.

14. *Malanottee–Rizzoli P., Holland W.R.* Data constrains applied tomodels of the ocean general circulation // J. Phys. Oceanogr. — 1988. — V. 18. — P. 1093–1107.

15. *Moore A.M.* Data assimilation in quasigeostrophic open-ocean model of the Gulf Stream region using the adjoint method // J. Phys. Oceanogr. — 1991. — V. 21. — P. 398–447.

16. *Taillandier V., Echevin V., Mortier L., Devenon J.-L.* Controlling boundary conditions with a four-dimensional variational data-assimilation method in a non-stratified open coastal model // Ocean Dynamics. — 2004. — V. 54, N. 2. — P. 284–298.

17. *Zalesny V.B., Gusev A.V.* Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2009. — V. 24, N. 2. — P. 171–190.

18. *Dimet F.-X., Shutyaev V.P.* On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2005. — V.12 — P. 481–490.

19. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.* On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2008. — V. 30, N. 4. — P. 1847–1874.

20. *Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E.I.* On error analysis in variational data assimilation problem for a nonlinear convection-diffusion model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2006. — V. 21, N. 2. — P. 169–183.

21. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 28.06.2010.