УДК 514.174.5

*Е. Ю. Воронецкий*

Школа № 42 г. Петрозаводск

# О разбиении плоских множеств на четыре, пять и шесть частей без достаточно маленьких расстояний

В настоящей работе мы улучшаем прежнюю верхнюю оценку для минимального расстояния, которого нет между точками каждой из пяти частей некоторого разбиения произвольного множества диаметра 1 на плоскости.

**Ключевые слова:** проблема Борсука, диаметр, запрещенное расстояние, разбиение, универсальная покрышка.

## 1. Введение и формулировки результатов

В связи с классической проблемой Борсука о разбиении множеств в $\mathbb{R}^d$ на части меньшего диаметра (см. [1]) в 50-е годы XX века Х. Ленц поставил следующую задачу (см. [2]). Пусть $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ и диаметр $\Phi$ равен единице. Положим

$$d(\Phi, k) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k, \quad \forall i \quad \operatorname{diam} \Phi_i \leqslant x\right\}, \quad d(k) = \sup_{\Phi} d(\Phi, k).$$

Требуется найти или как можно точнее оценить указанные величины.

В настоящей работе мы рассмотрим нетривиальную модификацию величины $d(k)$, предложенную В. П. Филимоновым в 2008 году (см. [3]):

$$d'(\Phi, k) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k, \quad \forall i \quad \forall\, X, Y \in \Phi_i \quad \rho(X, Y) \neq x\right\},$$
$$d'(k) = \sup_{\Phi} d'(\Phi, k).$$

В своей работе [3] Филимонов показал, помимо всего прочего, что

$$d'(1) = d'(2) = 1, \quad d'(3) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d'(4) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad d'(5) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d'(6) \leqslant \sqrt{\frac{13}{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right),$$
$$d'(k) = 0 \quad \forall\, k \geqslant 7.$$

В разделах 2 и 3 статьи мы докажем следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Имеет место оценка* $d'(4) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Теорема 2.** *Имеет место оценка*

$$d'(6) \leqslant d'(5) \leqslant \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3} - 2} = 0.5055\ldots$$

Обе теоремы значительно уточняют оценки Филимонова, т.к., разумеется, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а $0.5055\ldots < \sqrt{\dfrac{13}{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right) = 0.5577\ldots < \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$ Кроме того, в этом же разделе сборника публикуется статья В. В. Буланкиной, где доказывается оценка $d'(6) \leqslant d'(5) \leqslant \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.517\ldots$ Хотя неравенства из теоремы 2 и сильнее, результат Буланкиной ценен тем методом, который развит для его получения.

## 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ — произвольное множество точек на плоскости, имеющее диаметр 1. Хорошо известно, что его заведомо можно покрыть правильным шестиугольником $\Omega = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, у которого расстояние между параллельными сторонами равно 1. Первым этот факт опубликовал Й. Пал (см. [4]), но подробное доказательство проще найти в книге [5]. Пусть $O$ — центр $\Omega$. На отрезках $OA_6, OA_2, OA_4$ отложим соответственно точки $C_1, C_2, C_3$, которые отстоят от $O$ на расстояние $\frac{1}{3}$ (рис. 1). Треугольник $C_1C_2C_3$, очевидно, равносторонний, и длина каждой его стороны равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

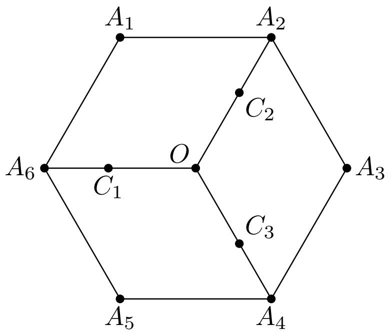


Рис. 1

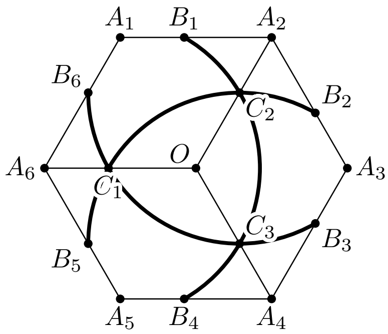


Рис. 2

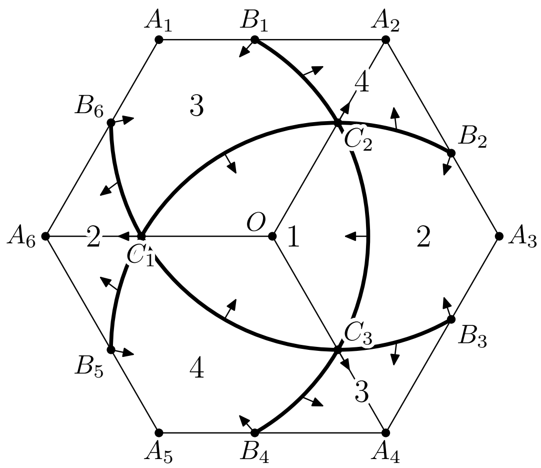


Рис. 3

Проведем окружности с центрами в точках $C_1, C_2, C_3$ и радиусами $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Возникнут новые точки $B_1, \ldots, B_6$, как показано на рис. 2. Наконец, на рис. 3 дана схема разбиения шестиугольника $\Omega$, а вместе с ним и исходного множества $\Phi \subset \Omega$. Цифра от 1 до 4 означает номер части, к которой относится (открытая) область, содержащая эту цифру. Чтобы пояснить, к части с каким номером относится данная дуга или данная точка, мы рисуем стрелочку, направленную от этой дуги или точки в сторону области с надлежащим номером. Например, точка $C_2$ относится к части 4, а дуга $C_1C_2$ (без концов) — к части 1.

Остается проверить, что ни в одной из частей нет пары точек на расстоянии $\frac{1}{\sqrt{3}}$. У части 1 (она называется «треугольником Рело») диаметр равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Однако пары точек, которые друг другу «диаметрально противоположны», лежат на границе треугольника Рело и аккуратно разнесены по разным частям. Например, $\rho(C_1, X) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, коль скоро $X$

принадлежит дуге $C_2C_3$. Но точки дуги относятся к частям 1, 3, 4, тогда как $C_1$ находится в части 2. И так далее.

Посмотрим на части 2, 3 и 4. Они совершенно одинаковы, поэтому достаточно разобраться с частью 2. Она состоит из двух кусков — «левого» и «правого». Правый кусок просто по построению имеет диаметр $\frac{1}{\sqrt{3}}$, и снова те его точки, что отстоят друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$, аккуратно разнесены по разным частям. В левом куске диаметр реализуется точками $B_5, B_6$. Легко понять, что $\rho(B_5, B_6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, но $B_5$ — в части 4, а $B_6$ — в части 3. Опять все в порядке. Наконец, если одна точка в левой части, а другая — в правой, то между ними расстояние больше $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Теорема 1 доказана.

## 3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим конструкцию с рис. 2. Если гомотетично уменьшать треугольник Рело, взяв за центр гомотетии точку $O$, то длина орезка $B_1A_2$ будет непрерывно расти. Легко видеть, что найдется момент, когда $\rho(B_1, A_2) = \rho(C_1, C_2) = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}-2}$. При этом $B_1$ лежит по-прежнему между $A_1$ и $A_2$, ведь $\rho(A_1, A_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, картинка по сути не меняется. Однако расстояния между $B_1, B_2$, между $B_3, B_4$ и между $B_5, B_6$ увеличиваются. Поэтому нужно разрезать прежний левый кусок части 2 и аналогичные куски частей 3 и 4 пополам, назвать одну из половинок 5 (всего таких половинок три) и получить разбиение с рис. 4. Нетрудно убедиться в том, что при таком разбиении ни в одной из пяти частей нет расстояния $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}-2}$. Теорема 2 доказана.

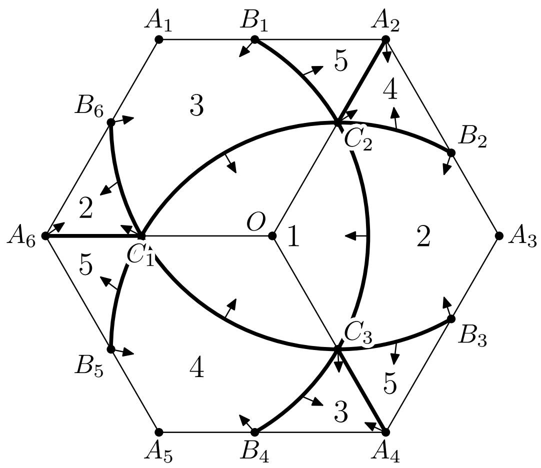


Рис. 4

## Литература


1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die $n$-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math.— 1933.— V. 20.— P. 177—190.

2. *Lenz H.* Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von moglichst kleineren Durchmesser // Jahresbericht d. DMV Bd. — 1956. — V. 58. — P. 87–97.

3. *Филимонов В. П.* О покрытии плоских множеств // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 127–160.
4. *Pál J.* Über ein elementares Variationsproblem // Danske Videnskab. Selskab. Math.-Fys. Meddel. — 1920. — V. 3, N 2.
5. *Болтянский В. Г.*, *Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М: Наука, 1965.

*Поступила в редакцию 09.08.2011*