МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. И. Колесникова

Методы решения основных задач уравнений математической физики

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2015

УДК 517.9

Колесникова С. И.
Методы решения основных задач уравнений математической физики. – уч. пособие. – М.: МФТИ, 2015. – 79 с.

УДК 517.9

В пособии приведены методы решения основных задач из курса уравнений математической физики, изучаемого на всех факультетах МФТИ. Эти задачи входят и в варианты письменных экзаменационных работ.

В пособии приведена не просто методика решений, но в каждом параграфе уделено внимание тем вопросам, которые вызывают наибольшие затруднения у студентов. Приводятся также элементы обоснования применяемой методики, что даёт возможность воспользоваться ею для решения более сложных прикладных задачах математической физики.

Предназначено для студентов и преподавателей математических, физико-математических, физико-технических и экономических специальностей, повышающих подготовку по прикладной математике в рамках инновационно-образовательной программы.

Оглавление

Введение

В пособии сформулированы условия, при которых по матрице коэффициентов при старших производных заданного уравнения определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду.

Рассмотрено решение задачи о колебании полубесконечной струны без применения формулы Даламбера и «сшивкой» по характеристике, а также с применением формулы Даламбера, но без «сшивки».

Приведено решение задачи о свободных колебаниях струны с закреплённым концом (свободным) с применением формулы Даламбера, приведены законы отражения от закреплённого (свободного) конца.

Рассмотрены примеры методов решения однородного и неоднородного волнового уравнения, или уравнения теплопроводности, без применения формул Пуассона или Кирхгофа в случаях, когда свободный член или начальные условия удовлетворяют некоторым специальным условиям.

Приведён пример решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$, когда начальные условия зависят только от $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а задача Коши сводится к смешанной задаче для полубесконечной струны с закреплённым концом.

Мы обращаем внимание на нахождение собственных функций различных задач Штурма–Лиувилля.

Постараемся познакомиться с довольно большим разнообразием краевых условий. Это или стандартные однородные на отрезке, или ограниченность на одном (в задачах на круге при $r = 0$), или обоих концах отрезка (при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi$ в задачах на сфере), или единственным условием является периодичность собственной функции (задачи на круге или сфере).

Выяснится, что одному собственному значению может соответствовать единственная собственная функция, а может и несколько.

Увидим, что собственные функции могут быть ортогональны: $\int_a^b u_n(x)u_m(x)\,dx = 0$, $n \neq m$, а могут быть ортогональны с так называемым весом: $\int_a^b g(x)u_n(x)u_m(x)\,dx = 0$, $n \neq m$.

Мы изложим суть метода разделения переменных на примере задачи на отрезке. Но для других задач, в частности, многомерных, усложняется лишь оператор Штурма–Лиувилля, а с ним и собственные функции.

Решения задач УМФ, как правило, ищется в виде формального ряда по всем *собственным функциям* с коэффициентами, зависящими от других переменных, входящих в задачу. Вопрос о том, получили ли мы классическое или обобщённое решение, а также вопросы существования и единственности классического или обобщённого решения, ответы на которые даёт теория (лекции), мы обсуждать не будем. Их решение зависит от того, какому классу принадлежат функции, входящие в условие задач, — свободный член, начальные условия или краевые и т. д.

Обычно потенциалы находят, вычисляя соответствующие интегралы. Этот метод мы опускаем. В данном пособии потенциалы находятся с помощью уравнений и свойств, которым они удовлетворяют.

§ 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью

Сформулированы условия, позволяющие по матрице коэффициентов при старших производных заданного уравнения определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=1,m=1}^{k=n,m=n} a_{km}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x,u,\nabla u) = 0.$$

Уравнения делятся на три типа. Каждый тип имеет свой так называемый канонический вид и описывает *свой* класс физических процессов.

Тип уравнения вида $\sum\limits_{k=1,m=1}^{k=n,m=n} a_{km}(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x,u,\nabla u) = 0$, $a_{km} = a_{mk}$, при $n > 2$ определяется в каждой точке отдельно.

Говорят, что уравнение имеет канонический вид в точке x_0, если все $a_{mk} = 0$, $k \neq m$, т. е. уравнение имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{k=n} a_k(x_0)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x_0,u,\nabla u) = 0$.

Так как физические процессы, описываемые уравнениями разных типов, различны, то, как только описана модель процесса, желательно знать тип получившегося уравнения.

Если уравнение приведено к каноническому виду, то тип определяется следующим образом.

1) Если все коэффициенты отличны от 0 и одного знака, то уравнение принадлежит к эллиптическому типу, например, уравнение Пуассона:
$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x).$$

2) Если все коэффициенты отличны от 0, но, по крайней мере, два разного знака, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу, например, волновое уравнение:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t) \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x,t).$$

3) Если хотя бы один коэффициент равен 0, уравнение принадлежит к параболическому типу, например, уравнение теплопроводности (уравнение диффузии):
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x,t) \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t).$$

Уравнение приводится к каноническому виду практически так же, как квадратичная форма $\sum\limits_{k=1,m=1}^{k=n,m=n} a_{km}(x_0) x_k x_m$ — это не самая простая работа.

Можно ли определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду?

Так как при невырожденных линейных преобразованиях сохраняется *ранг* матрицы и *количество* положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов, то можно определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду.

1) Если определитель матрицы $\|a_{km}\|$ отличен от 0 в точке, то

   а) уравнение *эллиптического* типа, если матрица или положительно определена, или отрицательно определена;

   б) уравнение *гиперболического* типа, если матрица не положительно определена и не отрицательно определена.

2) Если определитель матрицы a_{km} равен 0 в точке, то уравнение является уравнением *параболического* типа.

§ 2. Задача о колебании полубесконечной струны

Рассмотрено решение задачи о колебании полубесконечной струны без применения формулы Даламбера и «сшивкой» по характеристике, а также с применением формулы Даламбера, но без «сшивки».

Задача 1. Решите задачу о колебании полубесконечной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x > 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \ x \geqslant 0, \\ (\alpha u + \beta u_x)|_{x=0} = \varphi(t), \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Как решается задача?

1) Сначала находится частное решение заданного уравнения и выписывается его общее решение:

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) + u_{\text{частн}}.$$

2) Теперь решается задача Коши.

   Так как начальные условия заданы на струне, т. е. при $x \geqslant 0$, то и функции $f(x)$, $g(x)$ находятся для $x \geqslant 0$. А так как затем решение выписывается для $f(x+at)+g(x-at)$, то найденное решение имеет место в области, где

$x+at \geqslant 0$, $x-at \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $t > 0$. Эту область обозначим D_1. При этом оказывается, что $x+at \geqslant 0$ для всей первой четверти, где надо найти решение задачи, а потому $f(x+ + at)$ определилось во всей заданной области. Осталось определить $g(x-at)$ для $x - at \leqslant 0$, $t > 0$, $x > 0$.

3) Решаем краевую задачу.
Это решение имеет место в области D_2: $x + at \geqslant 0$, $x - - at \leqslant 0$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.
4) Решения в областях и записываются разными формулами — осталось «сшить» их. На самом деле, «сшивать» надо только $g(x - at)$, т. к. $f(x + at)$ — одно.

2.1. Как найти частное решение?

Оператор $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ называется волновым оператором, или оператором Даламбера.

1. Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$ выполнено условие
$$\Box f(x,t) = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta f(x,t) = bf(x,t), \quad b \neq 0,$$
т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора, то частное решение можно искать в виде
$$u_{\text{частн}} = cf(x,t).$$

► Действительно, $\Box cf(x,t) = cbf(x,t) = f(x,t) \iff c = \frac{1}{b}$, если $b \neq 0$, т. е. частное решение *всегда существует*, если $f(x,t)$ *не является* решением однородного волнового уравнения.

П р и м е ч а н и е. Если же $b = 0$, т. е. $f(x,t)$ *является* решением однородного волнового уравнения, то надо смотреть отдельно — см. пример 2. ◄

2. Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + g(x,t)$ свободный член имеет вид
$$g(x,t) = \varphi_0(t)\psi_0(x),$$
где $\Delta\psi_0(x) = \lambda\psi_0(x)$, т. е. $\psi_0(x)$ — собственная функция оператора Лапласа (в данном случае одномерного), то част-

ное решение можно искать в виде $u_{\text{частн}} = f(t)\psi_0(x)$, где $f(t)$ — искомая функция.

► Действительно, после подстановки в уравнение и сокращения на $\psi_0(x)$ получим

$$f''(t) = a^2\lambda f(t) + \varphi_0(t). \quad ◄$$

Пример 1. Решите задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + 90\cos(2x + 9t), \ x > 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = 8\cos 3x - 5\cos 2x, u_t|_{t=0} = 0, \ x \geqslant 0, \\ u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

► Так как $\Box\cos(2x + 9t) = -45\cos(2x + 9t)$, то

$$u_{\text{частн}} = c\cos(2x+9t) \Rightarrow -c\cdot 45\cos(2x+9t) = 90\cos(2x+9t) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow c = -2 \Rightarrow u_{\text{частн}} = -2\cos(2x + 9t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x,t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) - 2\cos(2x + 9t).$$

Первый способ (без перехода к однородному уравнению и без применения формулы Даламбера)

I. Решим задачу Коши.

$$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\cos 2x = 8\cos 3x - 5\cos 2x, \ x \geqslant 0, \\ f'(x) - g'(x) + 6\sin 2x = 0, \ x \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) + 3\cos 2x = 8\cos 3x, \\ f(x) - g(x) - 3\cos 2x = C \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = 4\cos 3x + \dfrac{C}{2}, \ x \geqslant 0, \\ g(x) = 4\cos 3x - 3\cos 2x - \dfrac{C}{2}, \ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Видим, что функции найдены только для неотрицательных значений аргумента, а отсюда непосредственно следует, что функции $f(x{+}3t)$, $g(x{-}3t)$ тоже найдены для неотрицательных значений аргумента, т. е.

$$f(x + 3t) = 4\cos 3(x + 3t) + \frac{C}{2}, \quad x + 3t \geqslant 0,$$
$$g(x - 3t) = 4\cos 3(x - 3t) - 3\cos 2(x - 3t) - \frac{C}{2}, \quad x - 3t \geqslant 0.$$

Итак, найдены $f(x+3t)$, $g(x-3t)$ для $x-3t \geqslant 0$, $x+3t \geqslant 0$ — это внутри угла AOB.

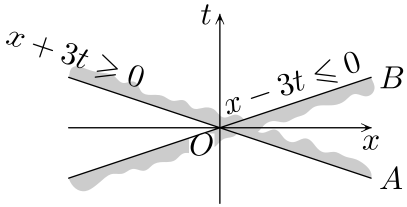

Рис. 1

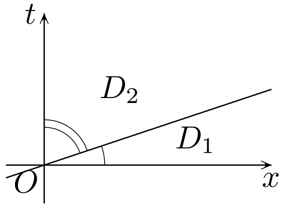

Рис. 2

Но мы ищем решения для $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Очевидно, что $f(x+3t)$ определилось во всей интересующей нас области, а $g(x-3t)$ только внутри угла D_1. Решение, естественно, определилось тоже *только* внутри угла D_1 — оно определилось *только начальными* условиями Коши:

$$u(x,t)_{D_1} =$$
$$= 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t) + 4\cos 3(x+3t) - 2\cos(2x+9t),$$
$$x-3t \geqslant 0, \quad x+3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

II. Теперь воспользуемся краевым условием

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, \quad t \geqslant 0.$$

Подставим условие в формулу решения

$$u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t) - 2\cos(2x+9t):$$

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t \iff 18t - 2\sin 9t = f'(3t) + g'(-3t) + 4\sin 9t.$$

Видно, что аргумент у f неотрицателен, а функции f и g для неотрицательных значений аргумента определены из условий Коши. Аргумент у g неположителен — функция не известна, обозначим её g_1. Подставим известную функцию f:

$$18t - 2\sin 9t = -12\sin 9t + g_1'(-3t) + 4\sin 9t \iff$$
$$\iff g_1'(-3t) = 18t + 6\sin 9t \iff$$
$$\iff g_1'(\xi) = -6\xi - 6\sin 3\xi, \quad -3t = \xi, \quad \xi \leqslant 0 \iff$$
$$\iff g_1(\xi) = -3\xi^2 + 2\cos 3\xi + B, \quad \xi \leqslant 0.$$

Решение примет вид

$$u(x,t)_{D_2} =$$
$$= 4\cos 3(x+3t) - 3(x-3t)^2 + 2\cos 3(x-3t) - 2\cos(2x+9t) + B + \frac{C}{2},$$
$$x - 3t \leqslant 0, \quad x + 3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

III. Теперь «сошьём» решения по характеристике $x = 3t$ (т. к. $f(x+3t)$ одна и та же, то «сшить» надо только $g(x-3t)$ и $g_1(x-3t)$ при $x = 3t$, т. е. $g(0)$ и $g_1(0)$):

$$u(x,t)_{D_1}|_{x=3t} = u(x,t)_{D_2}|_{x=3t} \Leftrightarrow B + \frac{C}{2} + 2 = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{C}{2} - 1.$$

Ответ. $u(x,t) = -2\cos(2x+9t) + 4\cos 3(x+3t) +$
$$+\left[\begin{array}{l} 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t), \ x - 3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \ t \geqslant 0; \\ 2\cos 3(x-3t) - 3(x-3t)^2 - 1, \ x - 3t < 0, \quad x \geqslant 0, \ t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

П р и м е ч а н и е. Полученное решение задачи дважды непрерывно дифференцируемо внутри D_1 и D_2, непрерывно по построению во всей первой четверти. Остался вопрос — является ли оно непрерывно дифференцируемым во *всей* четверти? Понятно, что надо проверить равенство первых и вторых производных $g(\xi)$ и $g_1(\xi)$ в 0:

$$\begin{cases} g'(\xi) = -12\sin 3\xi + 6\sin 2\xi, \quad g''(\xi) = -36\cos 3\xi + 12\cos 2\xi, \\ g_1'(\xi) = -6\xi - 6\sin 3\xi, \quad g_1''(\xi) = -6 - 18\cos 3\xi. \end{cases}$$

Видно, что первые и вторые производные одинаковы в 0 — решение классическое.

На самом деле, характеристики — это линии так называемого слабого разрыва, т. е. при переходе через них могут «рваться» производные. Поэтому решение не всегда достаточно гладкое во всей первой четверти — можем получить в том или ином смысле обобщённое решение.

Второй способ (с переходом к однородному уравнению и применением формулы Даламбера)

Конечно, можно применить формулу Даламбера сразу к исходной задаче, но никто этого не делает, потому что придётся вычислять двойной интеграл.

1) Поэтому большинство находит частное решение, делает «сдвиг», а затем применяет формулу Даламбера уже к однородному уравнению. Сделаем и мы так же:

$$v = u + 2\cos(2x + 9t).$$

Новая задача примет вид

$$\begin{cases} v_{tt} = 9v_{xx},\ x > 0,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = 8\cos 3x - 3\cos 2x, \quad v_t|_{t=0} = -18\sin 2x,\ x \geqslant 0, \\ v_x|_{x=0} = 18t - 6\sin 9t,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

2) Теперь, чтобы воспользоваться формулой Даламбера, надо знать, что решение задачи Коши в точке зависит от начальных условий на основании характеристического треугольника, т. е. на AB (см. рис. 3). Поэтому из рис. 3 видно, что формула Даламбера работает только внутри угла BOC, т. е. для $x - 3t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

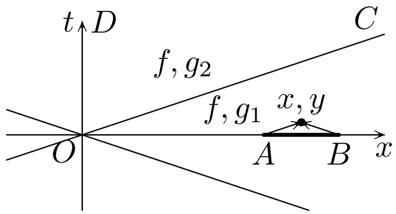

Рис. 3

Итак,

$$v(x,t)_{D_1} = \\ = \frac{1}{2}\Big(8\cos 3(x{+}3t) - 3\cos 2(x{+}3t) + 8\cos 3(x{-}3t) - 3\cos 2(x{-}3t)\Big) + \\ + \frac{3}{2}\left(\cos 2(x+3t) - \cos 2(x-3t)\right) = \\ 4\cos 3(x+3t) + 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t).$$

Решение найдено лишь в части первой четверти. Теперь воспользуемся краевым условием.

3) Внутри угла COD стоит другая задача — задача типа Гурса: известны значения $v(x,t)$ на одной из характеристик и v_x на прямой, лежащей внутри угла характеристик. Решим эту задачу:

$$\begin{cases} v(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t),\ t > 0,\ x > 0, \\ v(x,t)_{D_1}|_{x-3t=0} = 4\cos 3(6t) + 1, \\ v_x|_{x=0} = 18t - 6\sin 9t,\ t \geqslant 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(6t)+g(0)=4\cos 3(6t)+1,\ t\geqslant 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow f(0)+g(0)\equiv v(0,0)=5, \\ f'(3t)+g'(-3t)=18t-6\sin 9t,\ t\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} f(\xi)=1+4\cos 3\xi - g(0),\ \xi\geqslant 0, \\ g'(-\xi)=6\xi-6\sin 3\xi+12\sin 3\xi,\ \xi\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} f(\xi)=1+4\cos 3(\xi)-g(0),\ \xi\geqslant 0, \\ g\,(\xi)=-3\xi^2+2\cos 3\xi+B,\ \xi\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v(x,t)_{D_2} =$

$$= 1+4\cos 3(x+3t)-g(0)-3(x-3t)^2+2\cos 3(x-3t)+B,$$

$$x+3t\geqslant 0, \quad x-3t\leqslant 0.$$

$$v(0,0)_{D_2}=1+4-g(0)+2+B=5 \iff -g(0)+B=-2.$$

Получим, что

$u(x,t)_{D_2} =$

$$= -2\cos(2x+9t)+4\cos 3(x+3t)+2\cos 3(x-3t)-3(x-3t)^2-1,$$

$$x-3t\geqslant 0, \quad x+3t\geqslant 0, \quad x\geqslant 0, \quad t\geqslant 0.$$

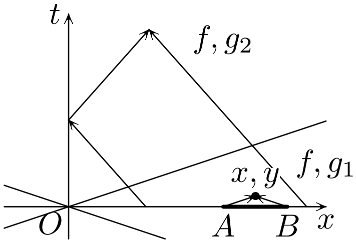

Рис. 4

«Сшивать» решения по характеристике не надо!

П р и м е ч а н и е. В области D_1 решением является сумма «прямой» и «обратной» волн, а в области D_2 — сумма «обратной» и отражённой от конца (см. рис. 4).

Ответ. $u(x,y)=-2\cos(2x+9t)+4\cos 3(x+3t)+$

$$+\left[\begin{array}{l} 4\cos 3(x-3t)-3\cos 2(x-3t),\ x-3t\geqslant 0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0; \\ 2\cos 3(x-3t)-3(x-3t)^2-1,\ x-3t\leqslant 0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0. \end{array}\right. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найдите частное решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+e^{x-at}.$$

► Заметим, что $\square e^{x-at}=0$. Если будем искать решение в виде $u_{\text{частн}}=cf(x,t)$, то получим $ca^2e^{x-at}=ca^2e^{x-at}+$ $+e^{x-at} \iff \varnothing$.

Поэтому воспользуемся вторым способом:

$$u_{\text{частн}} = f(t)e^x \Rightarrow f''(t)e^x = a^2 f(t)e^x + e^x e^{-at} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f''(t) = a^2 f(t) + e^{-at}.$$

Как мы видим, для искомой функции $f(t)$ имеет место резонанс:

$$f_{\text{частн}} = bte^{-at} \Rightarrow -2abe^{-at} + a^2bte^{-at} = a^2bte^{-at} + e^{-at} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow b = -\frac{1}{2a} \Rightarrow u_{\text{частн}} = \left(C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{1}{2a}\,te^{-at}\right)e^x.$$

В качестве частного можно взять, например, $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a}\,te^{x-at}$.

Ответ. $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a}\,te^{x-at}$. ◀

Пример 3. Найдите частное решение уравнения

$$9u_{tt} = u_{xx} + t\sin\frac{x}{3} + x\sin\frac{t}{3}\,.$$

► Так как

$$\left(9\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t\sin\frac{x}{3} = \frac{1}{9}\,t\sin\frac{x}{3}\,,$$
$$\left(9\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)x\sin\frac{t}{3} = -x\sin\frac{t}{3}\,,$$

то

$$u_{\text{частн}} = at\sin\frac{x}{3} + bx\sin\frac{t}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9}\,at\sin\frac{x}{3} - bx\sin\frac{t}{3} = t\sin\frac{x}{3} + x\sin\frac{t}{3} \Longleftrightarrow a = 9, \quad b = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_{\text{частн}}(x,t) = 9t\sin\frac{x}{3} - x\sin\frac{t}{3}\,.$$ ◀

2.2. Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом

Решение задачи о свободных колебаниях бесконечной струны, т. е. решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

даётся формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi.$$

Заметим, что если функции, задающие начальные условия, являются *нечётными*, т. е. $u_0(x) = -u_0(-x)$, $u_1(x) = -u_1(-x)$, то, во-первых,

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\begin{aligned} u(-x,t) &= \frac{u_0(-x+at)+u_0(-x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} u_1(\xi)\,d\xi = \\ &= \frac{-u_0(x-at)-u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} u_1(-\xi)\,d\xi = \\ &= -\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi = -u(x,t), \end{aligned}$$

т. е. решение $u(x,t)$ — тоже *нечётная* функция, а во-вторых,

$$u(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0(at)+u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} u_1(\xi)\,d\xi = 0.$$

Если же $u_0(x) = u_0(-x)$, $u_1(x) = u_1(-x)$ — *чётные*, то аналогично показывается, что $u(x,t)$ — *чётная* функция и

$$u_x(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0'(at)+u_0'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(u_1(at) - u_1(-at)\right) = 0.$$

Эти факты дают основание записать решение задачи о колебании *полубесконечной* струны с закреплённым или свободным концом формулой Даламбера.

Пусть задана смешанная задача на полуоси.

Задача 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \geqslant 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Продолжим начальные условия *нечётным* образом на отрицательную полуось, т. е. положим

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), \ x \geqslant 0, \\ -u_0(-x), \ x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad v_1(x) = \begin{cases} u_1(x), \ x \geqslant 0, \\ -u_1(-x), \ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Запишем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = v_0(x), \ u_t|_{t=0} = v_1(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

формулой Даламбера

$$u(x,t) = \frac{v_0(x+at) + v_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(\xi)\, d\xi.$$

Тогда, в силу приведённых выше рассуждений, это решение является решением смешанной задачи 2 (см. примеры 4, 9).

2.3. Закон отражения от закреплённого (свободного) конца

Функции $f(x+3t)$, $g(x-3t)$ для $x - 3t \geqslant 0$, $x + 3t \geqslant 0$ определяются из начальных условий Коши, а $g(x-3t)$ для $x - 3t \leqslant 0$ из краевого условия и условий Коши.

В частности, если конец закреплён, т. е.

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{то} \quad f(at) + g(-at) = 0,$$

мы получаем *закон отражения* от закреплённого конца

$$g(x-at) = -f(-x+at), \quad x - at \leqslant 0.$$

Если конец *свободен*, то закон отражения другой: $f'(at) + g'(-at) = 0 \Longleftrightarrow f(at) - g(-at) = C$, т. е.

$$g(x-at) = f(at-x) + C, \quad x - at \leqslant 0,$$

Пример 4.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x \sin x, \quad x \geqslant 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

► Продолжим начальные условия нечётным образом, полагая $v_0 = x|x|$, $v_1 = x|\sin x|$. Тогда решение задачи даётся формулой (учитывая, что во всей первой четверти $x + at \geqslant 0$):

$$u(x,t) = \frac{(x+at)^2 + (x-at)|x-at|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \xi|\sin\xi|\,d\xi.$$

П р и м е ч а н и е. К сожалению, далеко не всегда можно так просто записать нечётное продолжение. Поэтому, хоть в принципе такое возможно, часто проще решить задачу «в лоб» рассмотренными первым или вторым способами. ◄

§ 3. Задача Коши в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Приводятся примеры методов решения однородного и неоднородного волнового уравнения, или уравнения теплопроводности, без применения формул Пуассона или Кирхгофа в случаях, когда свободный член или начальные условия удовлетворяют некоторым специальным условиям.

Приведён пример решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$, когда начальные условия зависят только от $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Задача решается в сферических координатах, а с помощью замены переменных задача Коши свелась к *смешанной* задаче для полубесконечной струны с закреплённым концом.

Будем рассматривать следующие задачи Коши: для волнового уравнения

Задача 3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \ u_t|_{t=0} = u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$

где $m = 2$ или $m = 3$, и для уравнения теплопроводности

Задача 4. $\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m \in \mathbb{N}$.

Сначала рассмотрим методы, которые подходят для *обеих* задач. Тогда останется лишь *один* метод решения задачи Коши для *однородного* уравнения теплопроводности, который не годится для волнового уравнения.

3.1. Несколько способов нахождения частного решения неоднородного уравнения

a) Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$ выполнено условие $f(x,t) = \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta f(x,t) = bf(x,t)$, т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора (или оператора теплопроводности $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} - a^2 f(x,t) = bf(x,t)$), то частное решение можно искать в виде

$$u_{\text{частн}} = cf(x,t), \quad c \neq 0.$$

Если же $f(x,t)$ *является* решением однородного волнового уравнения, то надо смотреть отдельно (см. пример 2).

b) Если в уравнении $u_{tt} = a^2 u + f(x,t)$ свободный член имеет вид

$$f(x,t) = \varphi_0(t)\psi(x), \quad \text{где} \quad \Delta\psi(x) = \lambda\psi(x),$$

т. е. $\psi(x)$ — собственная функция оператора Лапласа, то частное решение можно искать в виде $u_{\text{частн}} = \varphi(t)\psi(x)$ (см. с. 9).

c) Если в задачах 1 или 2 $f(x,t) \equiv g(x)$, т. е. не зависит от t и $\exists\, n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\Delta^n g = 0, \quad \Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0,$$

то *решение задач* удобно искать в виде многочлена, расположенного по неотрицательным степеням t с неизвестными коэффициентами, зависящим от x, и удовлетворяющего начальным условиям, т. е. в виде

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\,\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\,\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\,\varphi_{m-1}(x),$$

где m мы не конкретизируем, т. к. оно автоматически определится в процессе решения задачи. Осталось удовлетворить уравнению. Подставим формулу в уравнение

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\,\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\,\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\,\varphi_{m-1}(x),$$

$$\varphi_1(x) + \frac{t}{1!}\,\varphi_2(x) + \frac{t^2}{2!}\,\varphi_3(x) + \frac{t^3}{3!}\,\varphi_4(x) + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\,\varphi_{m-1}(x) =$$

$$= a^2\Bigg(\Delta u_0(x) + t\Delta u_1(x) + \frac{t^2}{2!}\,\Delta\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\,\Delta\varphi_2(x) + \ \ldots +$$

$$+ \frac{t^m}{m!}\,\Delta\varphi_{m-1}(x)\Bigg) + g(x) \Longleftrightarrow \varphi_1(x) = a^2\Delta u_0(x) + g(x),$$

$$\varphi_2(x) = a^2\Delta u_1(x),$$

$$\varphi_3(x) = a^2\Delta\varphi_1(x) = a^2\Delta(a^2\Delta u_0(x) + g(x)) =$$
$$= a^4\Delta^2 u_0(x) + a^2\Delta g(x),$$

$$\varphi_4(x) = a^2\Delta\varphi_2(x) = a^4\Delta^2 u_1(x),$$

$$\ldots \quad \ldots$$

Видно, что начиная с некоторого k все φ_i будут равны 0.

Если в задачах 3, 4 начальные условия $u_0(x)$, $u_1(x)$ не удовлетворяют условиям этого пункта, то *частное решение* удобно искать в виде $u(x,t) = \frac{t^2}{2!}\,\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\,\varphi_2(x) + \ \ldots + \frac{t^m}{m!}\,\varphi_{m-1}(x)$, т. е. удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Так как общего решения однородного волнового уравнения или однородного уравнения теплопроводности в случае $x \in \mathbb{R}^n$, $m > 1$, *не существует*, то после нахождения частного решения *необходимо* сделать сдвиг: $v(x,t) = u(x,t) - u_{\text{частн}}(x,t)$, чтобы уравнение стало однородным.

3.2. Некоторые способы решения задач Коши для однородного уравнения

Будем рассматривать задачи Коши для однородного волнового уравнения

Задача 5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ u_t|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$

Задача 6. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$

где $m = 2, 3$, и однородного уравнения теплопроводности

Задача 7. $\begin{cases} u_t = a^2\Delta u,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m \in \mathbb{N}$.

1. Если

$$\Delta u_0 = \lambda u_0 \quad \text{или} \quad \Delta u_1 = \lambda u_1,$$

то решения задач 5–7 ищется в виде произведения искомой функции $f(t)$ на собственную функцию оператора Лапласа (u_0 или u_1 соответственно), удовлетворяющего начальным условиям, т. е.

$$u(x,t) = f(t)u_0(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0; \tag{5}$$

$$u(x,t) = f(t)u_1(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1; \tag{6}$$

$$u(x,t) = f(t)u_0(x), \quad f(0) = 1. \tag{7}$$

2. Если

$$u_0 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad \text{или} \quad u_1 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

то решения задач (5) – (7) находим в виде

$$u = f(t, \alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Обозначим $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Тогда задачи станут одномерными и примут вид

$$\begin{cases} f_{tt} = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi), \\ f_t|_{t=0} = 0; \end{cases} \tag{5*}$$

$$\begin{cases} f_{tt} = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = 0, \\ f_t|_{t=0} = u_1(\xi); \end{cases} \tag{6*}$$

$$\begin{cases} f_t = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi). \end{cases} \tag{7*}$$

Решение задач (5*) – (6*) легко записать с помощью формулы Даламбера. Решение задачи (7*) можно получить с помощью формулы Пуассона или как-то по-другому, если это возможно.

3. Если в задаче $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \ u_t|_{t=0} = u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ или задаче (7) начальные условия таковы, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0,$$

то решение задачи можно искать в виде $u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-2}(x)$.

4. Если u_0 или u_1 являются произведением некоторой гармонической функции на некоторую функцию от других независимых переменных, т. е.

$$u_0(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_k)g(x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad \Delta f = 0$$

(например, $u_0(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^{-z^2}$), то решение можно искать в виде

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_k)h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$
$$h|_{t=0} = g(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

если это, например, уравнение теплопроводности. Если это задача 5, то

$$h|_{t=0} = g(x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad h_t|_{t=0} = 0.$$

► Подставим

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_k)h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

например, в уравнение задачи 7:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = f(x_1, \ldots, x_k)g(x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &a^2\Delta(f(x_1, \ldots, x_k)h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)) = \\ &\qquad = a^2(h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\Delta f(x_1, \ldots, x_n)) + \\ &\qquad\qquad + f(x_1, \ldots, x_k)\Delta h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow h_{tt}(t, x_{k+1}, \ldots, x_n) = a^2\Delta h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \begin{cases} h_{tt}(t, x_{k+1}, \ldots, x_n) = a^2\Delta h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n), \\ h(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)|_{t=0} = g(x_{k+1}, \ldots, x_n), \\ h_t(t, x_{k+1}, \ldots, x_n)|_{t=0} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$ ◄

5. Довольно часто встречается выражение вида

$$u_0 = x\sin(ax + by + cz).$$

Вычислим Δu_0: $\Delta u_0 = 2a\cos(ax + by + cz) - (a^2 + b^2 + c^2)x\sin(ax + by + cz)$.

Значит, решение можно искать в виде $u = g(t)\cos(ax+by+ + cz) + f(t)x\sin(ax+by+cz)$, удовлетворяющем начальным условиям $f(0)=0$, $g(0)=1$, если это, например, задача 7.

► Подставим выражение в уравнение и начальные условия:

$$u = f(t)x\sin(ax+by+cz) + g(t)\cos(ax+by+cz),$$
$$f(0)=1, \quad g(0)=0,$$
$$f'(t)x\sin(ax+by+cz) + g'(t)\cos(ax+by+cz) =$$
$$= -g(t)(a^2+b^2+c^2)\cos(ax+by+cz)+$$
$$+f(t)\left(2a\cos(ax+by+cz) - (a^2+b^2+c^2)x\sin(ax+by+cz)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f'(t) + f(t)(a^2+b^2+c^2) = 0,\ f(0)=1, \\ g'(t) + g(t)(a^2+b^2+c^2) = 2af(t),\ g(0)=0. \end{cases}$$

Получили две задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. ◄

Пример 5.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + (x^2+y^2)\sin t,\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = (2x-y+2z)\sin(2x-y+2z)^2, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

► Найдём частное решение уравнения $u_{tt} = \Delta u + x^2\sin t$. Так как $(\sin t)'' = -\sin t$, то

$$u_{\text{частн}} = f(x)\sin t \Rightarrow: -f(x) = f''(x) + x^2 \iff$$
$$\iff f''(x) + f(x) = -x^2 \iff f(x) = C_1\sin x + C_2\cos x + 2 - x^2.$$

В качестве частного решения можно взять $u_{\text{частн}} = (2-x^2)\sin t$. Аналогично получится частное решение $u_{\text{частн}} = (2-y^2)\sin t$ для уравнения $u_{tt} = u + y^2\sin t$.

Тогда $v = u - (4-x^2-y^2)\sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} = v,\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \\ v|_{t=0} = (2x-y+2z)\sin(2x-y+2z)^2, \\ v_t|_{t=0} = x^2+y^2-4. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде суммы решений $v = w(x,y,z,t) + + f(x,y,t)$ двух задач:

1. $\begin{cases} w_{tt} = \Delta w, t > 0, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ w|_{t=0} = (2x - y + 2z)\sin(2x - y + 2z)^2, \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ w(x,y,z,t) =$

$= g(2x - y + 2z, t)$. Обозначим $2x - y + 2z = \xi$. Тогда

$$\begin{cases} g_{tt} = 9g_{\xi\xi}, \ t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}, \\ g|_{t=0} = \xi \sin \xi^2, \\ g_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff g(\xi, t) = \frac{(\xi + 3t)\sin(\xi + 3t)^2 + (\xi - 3t)\sin(\xi - 3t)^2}{2}.$$

2. $\begin{cases} f_{tt} = \Delta f, \ t > 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ f|_{t=0} = 0, \\ f_t|_{t=0} = x^2 + y^2 - 4. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x,y,t) =$$

$$= 0 + t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x,y) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x,y) + \frac{t^4}{4!}\varphi_3(x,y) + \ldots +$$

$$+\varphi_1(x,y) + t\varphi_2(x,y) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x,y) + \ \ldots =$$

$$= t(4) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x,y) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x,y) + \ \ldots \iff$$

$$\iff \varphi_1(x,y) = 0, \quad \varphi_2(x,y) = 4,$$

$$\varphi_3(x,y) = \varphi_1(x,y) = 0, \quad \varphi_4(x,y) = \varphi_2(x,y) = 0,$$

$$f(x,y,t) = t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{4t^3}{3!} = t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{2t^3}{3}.$$

Ответ. $u(x,y,t) = (4 - x^2 - y^2)\sin t + t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{2t^3}{3} +$ $+ \frac{1}{2}\Big((2x - y + 2z + 3t)\sin(2x - y + 2z + 3t)^2 + (2x - y + 2z -$ $- 3t)\sin(2x - y + 2z - 3t)^2\Big)$. ◀

Пример 6. $\begin{cases} u_t = \Delta u, \ t > 0, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = xyz\cos x. \end{cases}$

► В этом примере

$$(\Delta yzx\cos x) = -2yz\sin x - yzx\cos x.$$

Поэтому решение можно искать в виде

$$u = f(t)yz\sin x + g(t)yzx\cos x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Тогда

$$f'(t)yz\sin x + g'(t)yzx\cos x =$$
$$= -f(t)yz\sin x - g(t)(2yz\sin x + yzx\cos x) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} g'(t) + g(t) = 0,\ g(0) = 1 \Longleftrightarrow g(t) = e^{-t}; \\ f'(t) + f(t) = -2g(t) = -2e^{-t},\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t) = Ce^{-t} - 2te^{-t}, \quad f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = -2te^{-t}.$$

Отсюда следует

Ответ. $u(x,y,z,t) = e^{-t}yzx\cos x - 2te^{-t}yz\sin x.$ ◀

Пример 7. $\begin{cases} 2u_t = 7u + \dfrac{\sin x \operatorname{ch} z}{\sqrt{t+4}}\ ,\ t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = (x - 2y + z)\sin x \operatorname{ch} z. \end{cases}$

▶ Произведение обычного синуса (или косинуса) на гиперболический синус (или косинус) является гармонической функцией

$$\Delta \sin x \operatorname{ch} z = 0.$$

Поэтому ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн.}} = f(t)\sin x \operatorname{ch} z, \quad f(0) = 0:$$
$$2f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}} \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} + C,$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} - 2 \Rightarrow u_{\text{частн.}} = \left(\sqrt{t+4} - 2\right)\sin x \operatorname{ch} z.$$

Теперь делаем сдвиг:

$$v = u - u_{\text{частн}} \Rightarrow \begin{cases} 2v_t = 7\Delta v,\ t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ v|_{t=0} = (x - 2y + z)\sin x \operatorname{ch} z. \end{cases}$$

Интересно, что $\Delta^2(x - 2y + z)\sin x \operatorname{ch} z \equiv 0$ (проверьте!). Поэтому решение ищем в виде

$$v = (x - 2y + z)\sin x \operatorname{ch} z + t\varphi_1(x,y,z) +$$
$$+ \frac{t^2}{2!}\varphi_2(x,y,z) + \frac{t^3}{3!}\varphi_3(x,y,z) + \ \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left(\varphi_1(x,y,z) + t\varphi_2(x,y,z) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x,y,z) + \ \ldots\right) =$$
$$= 7(2\cos x \operatorname{ch} z + 2\sin x \operatorname{sh} z) + t\varphi_1(x,y,z) +$$

$$+\frac{t^2}{2!}\,\varphi_2(x,y,z)+\frac{t^3}{3!}\,\varphi_3(x,y,z)+\,\ldots\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\varphi_1(x,y,z)=14(\cos x\operatorname{ch}z+\sin x\operatorname{sh}z),$$

$$2\varphi_2(x,y,z)=7\Delta\varphi_1(x,y,z)=0,$$

$$2\varphi_3(x,y,z)=\Delta\varphi_2(x,y,z)=0.$$

$$v=(x-2y+z)\sin x\operatorname{ch}z+7t(\cos x\operatorname{ch}z+\sin x\operatorname{sh}z)\Rightarrow$$

Ответ. $u=\left(\sqrt{t+4}-2\right)\sin x\operatorname{ch}z+(x-2y+z)\sin x\operatorname{ch}z+ + 7t(\cos x\operatorname{ch}z+\sin x\operatorname{sh}z).$ ◀

Пример 8. $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\ u|_{t=0}=\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)e^{-z^2},\\ u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$

▶ Так как $\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\equiv 0$, то решение находим в виде $u= =f(t,z)\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)$, $f(t,z)|_{t=0}=e^{-z^2}$, $f_t(t,z)|_{t=0}=0$.

Подставив в уравнение и начальные условия, получаем задачу:

$$\begin{cases} f_{tt}(t,z)=f_{zz}(t,z),\\ f(t,z)|_{t=0}=e^{-z^2},\ f^t(t,z)|_{t=0}=0,\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(t,z)=\frac{e^{-(z+t)^2}+e^{-(z-t)^2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\frac{\left(e^{-(z+t)^2}+e^{-(z-t)^2}\right)}{2}.$$

Ответ. $u=\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\frac{\left(e^{-(z+t)^2}+e^{-(z-t)^2}\right)}{2}.$ ◀

Пример 9. $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u,\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\ u|_{t=0}=(x^2+y^2+z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3,\\ u_t|_{t=0}=\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{cases}$

▶ Это довольно *важный и интересный* пример. Решается он с помощью перехода к сферическим координатам и последующей заменой переменных, которая сведёт задачу Коши в R^3 к одномерной *смешанной задаче на полуоси* $r>0$. Перейдём к сферическим координатам, и, поскольку начальные условия зависят только от расстояния, то и решение будем искать в виде $u(r,t)$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r\right),\ t > 0,\ r \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = r^2 \operatorname{sh}^3 r, \\ u_t|_{t=0} = \cos r. \end{cases}$$

Но уравнение мы решать не умеем. Поэтому сделаем замену переменных: $\varphi(r,t) = ru(r,t) \iff u(r,t) = \dfrac{\varphi(r,t)}{r}$, из которой следует, что $\varphi(r,t)|_{r=0} = 0$. Подставляем в условия задачи:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2\varphi_{rr},\ t > 0,\ r \geqslant 0, \\ \varphi|_{t=0} = r^3(\operatorname{sh} r)^3, r \geqslant 0, \\ \varphi_t|_{t=0} = r\cos r,\ r \geqslant 0, \\ \varphi|_{r=0} = 0,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Получилась задача о колебании полубесконечной струны с закреплённым концом. Решение можно получить с помощью формулы Даламбера, если продолжим начальные условия на отрицательную полуось нечётным образом.

В нашем случае $r\cos r$ — уже нечётная функция, а новое $\varphi|_{t=0}$ можно записать в виде $\varphi|_{t=0} = r^3|\operatorname{sh}^3 r|$ — получим задачу Коши на всей оси:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2\varphi_{rr},\ t > 0,\ r \in R, \\ \varphi|_{t=0} = r^3|\operatorname{sh}^3 r|, r \in R, \\ \varphi_t|_{t=0} = r\cos r,\ r \in R, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$u(r,t) = \frac{(r+at)^3\left|\operatorname{sh}^3(r+t)\right| + (r-at)^3\left|\operatorname{sh}^3(r-at)\right|}{2r} + \\ + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \xi\cos\xi\,d\xi.$$

Так как во всей интересующей нас области $r+at \geqslant 0$, то можно записать

Ответ. $u(r,t) = \dfrac{(r+at)^3\operatorname{sh}^3(r+at) + (r-at)^3\left|\operatorname{sh}^3(r-at)\right|}{2r} +$
$+\,\frac{1}{2ar}\left((r+at)\sin(r+at) - (r-at)\sin(r-at) - 2\sin r\sin at\right).$ ◄

Пример 10. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = (y+z)\operatorname{arctg}(y-z), \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

► Этот пример отличается от предыдущих тем, что мы сделаем замену независимых переменных: $\xi = y+z$, $\eta = y-z \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$ и задача примет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u, \\ u|_{t=0} = \xi \operatorname{arctg}\eta, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \Rightarrow \ (\text{т. к. } \ \Delta\xi = 0) u = \xi f(\eta, t) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{tt}(\eta, t) = 2f_{\eta\eta}(\eta, t), \\ f|_{t=0} = \operatorname{arctg}\eta, \\ f_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \iff$$

$$\iff f(\eta, t) = \frac{\operatorname{arctg}(\eta - \sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(\eta + \sqrt{2}t)}{2}.$$

Ответ. $u(y,z,t) = (y+z)\cdot\frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(y-z-\sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(y - {}$ ${} - z + \sqrt{2}t)\Big).$ ◄

§ 4. Метод Фурье на отрезке

Рассматривается метод разделения переменных Фурье на отрезке для уравнений гиперболического (например, волновое уравнение) и параболического (например, уравнение теплопроводности) типов. Для отыскания собственных функций и собственных значений задачи возникает оператор $L_1^* = a^2(x)\,\dfrac{d^2}{dx^2} + b(x)\,\dfrac{d}{dx} + c(x)$. Рассматриваются два случая: оператор $-L_1^*$ является оператором Штурма–Лиувилля и оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма–Лиувилля.

4.1. Метод Фурье на отрезке, когда оператор $-L_1^*$ является оператором Штурма–Лиувилля

Будем рассматривать следующие задачи на отрезке:

Задача 8.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = L_1 u + f(x,t),\ t > 0,\ a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = \varphi_1(t),\ (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = \varphi_2(t),\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

Задача 9.

$$\begin{cases} u_t + \alpha u = L_1 u + f(x,t),\ t > 0,\ a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = \varphi_1(t),\ (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = \varphi_2(t),\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

где оператор $L_1 \equiv a^2(x)\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x} + c(x)$, $\alpha, \beta, c_i, d_i \in \mathbb{R}$.

Но сначала рассмотрим задачи с соответствующими однородными уравнениями и однородными краевыми условиями:

Задача 8*.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = L_1 u,\ t > 0,\ a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ u_t|_{t=0} = u_1(x),\ a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = 0,\ (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0,\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

Задача 9*.

$$\begin{cases} u_t + \alpha u = L_1 u,\ t > 0,\ a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x),\ a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = 0,\ (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

В обеих задачах, что важно, уравнения и краевые условия — *однородные*. Такие задачи принято решать методом разделения переменных Фурье.

I. Для этого проведём разделение переменных в *однородном* уравнении и *однородных* краевых условиях. Это является ключевым моментом при применении метода Фурье. В нашем случае после разделения переменных получатся обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В других задачах, например, в том же уравнении теплопроводности или волновом, но в пространстве большей размерности, получаются более сложные уравнения.

Ищем решение уравнения, например, задачи 9^* в виде $u(x,t) = T(t)X(x)$.

Подставим $u(x,t) = T(t)X(x)$ в уравнение:

$$T'(t)X(x) + \alpha T(t)X(x) = T(t)L_1^*X(x) \Longleftrightarrow$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} + \alpha = \frac{L_1^*X(x)}{X(x)} = \mathrm{const} = \nu, \tag{8}$$

где оператор $L_1^* = a^2(x)\,\dfrac{d^2}{dx^2} + b(x)\,\dfrac{d}{dx} + c(x)$ — оператор уже с обыкновенными производными.

Теперь разделим переменные в однородных краевых условиях:

$$c_1T(t)X(a) + d_1T(t)X'(a) = 0 \Longleftrightarrow c_1X(a) + d_1X'(a) = 0,$$
$$c_2T(t)X(b) + d_2T(t)X'(b) = 0 \Longleftrightarrow c_2X(b) + d_2X'(b) = 0.$$

Для $X(x)$ возникла краевая задача

$$\begin{cases} L_1^*X(x) = \nu X(x), \ a < x < b, \\ c_1X(a) + d_1X'(a) = 0, \\ c_2X(b) + d_2X'(b) = 0. \end{cases}$$

Решение всей задачи 9* теперь зависит от решения этой краевой задачи. А краевая задача, как известно, не всегда имеет нетривиальное решение — всё зависит от оператора L_1^*.

Оператор $-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}) + q(x)$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, называется оператором *Штурма–Лиувилля*.

В одномерном случае он принимает вид

$$L \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{d}{dx}\right) + q(x).$$

Если $L_1^* = -L$, то условия задачи примут вид

$$\begin{cases} LX(x) = -\nu X(x), \ a < x < b, \\ c_1X(a) + d_1X'(a) = 0, \\ c_2X(b) + d_2X'(b) = 0. \end{cases}$$

Такая задача называется задачей Штурма–Лиувилля.

Любое *нетривиальное* решение этой задачи называется *собственной функцией* задачи Штурма–Лиувилля, а те $(-\nu)$, при которых таковые существуют, называются *собственными значениями* задачи Штурма–Лиувилля.

В теории курса доказывается, что если $p(x) \in C^1[a;b]$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \in C[a;b]$, $q(x) \geqslant 0$, то собственных значений счётное множество, они неотрицательны, т. е. $-\nu = \lambda^2$, каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, а собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны, т. е. $\int_a^b X_k(x)X_n(x)\,dx = 0$, $k \neq n$, и представляют собой полную ортогональную в $L_2[a,b]$ систему.

Очень часто в наших задачах $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, и тогда $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, а $L_1^* \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}$.

В этом случае задача примет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), \ a < x < b, \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0, \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0. \end{cases}$$

Особенность этих задач на метод Фурье состоит в том, что если в каждом из классических краевых условий отличен от 0 лишь один коэффициент, то свойства получающихся собственных функций известны из математического анализа 2-го курса.

Пример 11. Решите задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), \ x \in (0;\pi), \\ X'(0) = 0, \\ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

► Так как теория не всем известна, а задача простая, то решим её при всех возможных значениях параметра μ :

2) $\mu = 0:\ X(x) = C_1 x + C_2$.

$$X'(0) = 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0,\ X'(\pi) = 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X_0(x) = 1.$$

1) $\mu < 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda^2 < 0:\ X(x) = X(x) = C_1 \operatorname{ch}\lambda x + C_2 \operatorname{sh}\lambda x$.

$$X'(0) = 0 \Longleftrightarrow C_2 = 0,\ X'(\pi) = -C_1\lambda \operatorname{sh}\lambda\pi = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

3) $\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu = \lambda^2 > 0:\ X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$.

$$X'(0) = 0 \Longleftrightarrow C_2 = 0,\ X'(\pi) = -C_1\lambda \sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\pi = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow X_k(x) = \cos kx,\ k \in \mathbb{N}.$$

Свойства полученной системы собственных функций хорошо известны из математического анализа 2-го курса: система $\{\cos kx\}$, $k = 0,\, 1,\, 2,\ \ldots$ ортогональна и полна в $L_2[0;\pi]$.

Ответ. $\{\cos kx\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ◀

Итак, найдены собственные функции $X_k(x)$ и собственные значения λ_k^2. Теперь находим $T_k(t)$: $\dfrac{T_k'(t)}{T_k(t)} + \alpha = \mu_k = -\lambda_k^2 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow T_k'(t) + (\alpha + \lambda_k^2)T_k(t) = 0$ и получаем множество решений уравнения задачи $u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x)$, удовлетворяющих краевым условиям. Осталось удовлетворить начальным условиям.

II. Теперь уже ищем решение *всей* задачи в виде формального ряда

$$u(x,t) = \sum_k^{\infty} T_k(t)X_k(x).$$

Подставим начальные условия:

$$u(x,t)|_{t=0} = \sum_k^{\infty} T_k(0)X_k(x) = u_0(x).$$

Возникла необходимость разложить $u_0(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи: $u_0(x) = \sum\limits_k^{\infty} a_k X_k(x)$. Вот здесь-то и потребовались свойства $u_0(x)$ и собственных функций. Так как наша система ортогональна и полна в $L_2[a;b]$, то всякую $u_0(x) \in L_2[a;b]$ можно разложить в ряд Фурье, где $a_n = \dfrac{\int_a^b u_0(x)X_n(x)\,dx}{\int_a^b X_n^2(x)\,dx}$.

Тогда $\sum\limits_k^{\infty} T_k(0)X_k(x) = u_0(x) = \sum\limits_k^{\infty} a_k X_k(x) \Longleftrightarrow T_k(0) = a_k$. Получили для $T_k(t)$ задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k'(t) + \alpha T_k(t) = -\lambda_k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = a_k, \end{cases}$$

которые, как известно, имеют единственное решение.

Формальное решение $u(x,t) = \sum\limits_{k}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$ найдено, т. к. найдены все $X_k(x)$, $T_k(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Обратите внимание на то, что задача Штурма–Лиувилля соответствует оператору L_1 и *не зависит* от того, что стоит *слева* в наших уравнениях задач 8*, 9*.

4.2. Как быть, если уравнение неоднородное и краевые условия неоднородные?

Рассмотрим теперь **задачи 8 и 9**.

Теперь решение задач состоит из ***трёх*** этапов.

I. Находим функцию $w_0(x,t)$, которая удовлетворяет заданным краевым условиям.

Общих правил для нахождения $w_0(x,t)$ не существует. Поэтому рассмотрим несколько примеров. Например,

а) $u|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u_x|_{x=b} = \varphi_2(t)$. Тогда в качестве $w_0(x,t)$ можно взять функцию $w_0(x,t) = \varphi_1(t) + (x-a)\varphi_2(t)$, а можно и любую другую — лишь бы она удовлетворяла заданным краевым условиям.

б) $u_x|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u_x|_{x=b} = \varphi_2(t) \Rightarrow w_0(x,t) = \dfrac{(x-b)^2}{2(a-b)}\,\varphi_1(t) + {}$ $+ \dfrac{(x-a)^2}{2(b-a)}\,\varphi_2(t)$.

в) $u|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u|_{x=b} = \varphi_2(t)$. Тогда в роли $w_0(x,t)$ можно взять функцию

$$w_0(x,t) = \frac{(x-b)}{a-b}\,\varphi_1(t) + \frac{(x-a)}{b-a}\,\varphi_2(t)$$

и т. д.

Теперь необходимо сделать сдвиг, чтобы свести к задаче с *однородными* краевыми условиями:

$$v(x,t) = u(x,t) - w_0(x,t) \Longleftrightarrow u(x,t) = v(x,t) + w_0(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v + g(x,t), \ t > 0, \ a < x < b, \\ v|_{t=0} = u_0(x) - w_0(x,t)|_{t=0}, \ v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_{0t}(x,t)|_{t=0}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0, \ (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Видно, что изменился, вообще говоря, свободный член $g(x,t) \equiv -w_{0tt} - \alpha w_{0t} - \beta w_0 + L_1 w_0 + f(x,t)$ и начальные условия. Переобозначим их для удобства и получим задачу

$$\begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v(x,t) + g(x,t), \ t > 0, \ a < x < b, \\ v|_{t=0} = v_0(x), \ v_t|_{t=0} = v_1(x), \ a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0, \ (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

II. Теперь найдём собственные функции задачи.

Для этого разделим переменные в *соответствующем* однородном уравнении и *однородных* краевых условиях. Пусть $v = T(t)X(x)$. Подставляем в *соответствующее* однородное уравнение и *однородные* краевые условия:

$$T''(t)X(x) + \alpha T'(t)X(x) + \beta T(t)X(x) = T(t)L_1^* X(x) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \ \frac{T''(t) + \alpha T'(t)}{T(t)} + \beta = \frac{L_1^* X(x)}{X(x)} = \text{const} = \mu,$$
$$c_1 T(t)X(a) + d_1 T(t)X'(a) = 0 \Longleftrightarrow c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0,$$
$$c_2 T(t)X(b) + d_2 T(t)X'(b) = 0 \Longleftrightarrow c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0.$$

Если $-L_1^* \equiv L$ — оператор Штурма–Лиувилля, то получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} LX(x) = \lambda^2 X(x), \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0, \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0. \end{cases}$$

(Теперь, в отличие от задач 8^* и 9^*, уравнение для T решать не будем, т. к. делили переменные в «чужом» однородном уравнении.)

Общего аналитического решения такой задачи не существует. Поэтому в наших заданиях чаще всего встречается «решабельный» вариант, где $L \equiv -\dfrac{d^2}{dx^2}$, т. е. задача имеет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0, \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0. \end{cases}$$

Решаем задачу для $\lambda = 0$ и $\lambda^2 > 0$, находим $X_n(x)$.

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$v(x,t) = \sum_k^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

Подставляем в уравнение

$$\sum_k^{\infty} T_k''(t)X_k(x) + \alpha \sum_k^{\infty} T_k'(t)X_k(x) + \beta \sum_k^{\infty} T_k(t)X_k(x) =$$
$$= -\sum_k^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2 X_k(x) + g(x,t).$$

Придётся разложить $g(x,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям: $g(x,t) = \sum\limits_k^{\infty} a_k(t)X_k(x)$, $a_n(t) = \dfrac{\int_a^b g(x,t)X_n(x)\,dx}{\int_a^b X_n^2(x)dx}$.

Подставим ряд вместо $g(x,t)$ и приравняем коэффициенты при линейно независимых X_k:

$$T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + (\beta + \lambda_k^2)T_k(t) = a_k(t).$$

Выходим на начальные условия, которые тоже приходится разлагать в ряд Фурье по собственным функциям задачи:

$$\sum_k^{\infty} T_k(0)X_k(x) = v_0(x) = \sum_k^{\infty} b_k X_k(x) \Longleftrightarrow T_k(0) = b_k,$$
$$\sum_k^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = v_1(x) = \sum_k^{\infty} c_k X_k(x) \Longleftrightarrow T_k'(0) = c_k.$$

Решаем задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + (\beta + \lambda_k^2)T_k(t) = a_k(t), \\ T_k(0) = b_k, \\ T_k'(0) = c_k \end{cases}$$

и записываем ответ.

Пример 12.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u - \dfrac{t(3x^2+2)}{\pi} + x\cos t,\ t > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u|_{t=0} = \cos 2x,\ u_t|_{t=0} = \frac{x^2}{\pi},\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

► **I.** В качестве функции $w_0(x,t)$ возьмём, например, функцию $w_0(x,t) = \frac{x^2 t}{\pi}$, удовлетворяющую краевым условиям. Теперь делаем сдвиг

$$v = u - \frac{x^2 t}{\pi} \iff u = v + \frac{x^2 t}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 3v = v_{xx} + x\cos t, \ t > 0, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ v|_{t=0} = \cos 2x, \ v_t|_{t=0} = 0, \ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ v_x|_{x=0} = 0, \ v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

и переходим ко второму пункту.

II. Делим переменные в *соответствующем* однородном уравнении и *однородных* краевых условиях:

$$v_{tt} - 3v = v_{xx}, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=\pi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XT'' - 3XT = X''T \iff \frac{T''}{T} - 3 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

$$X'(0)T(t) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t) = 0 \iff X'(0) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Решаем возникшую классическую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\lambda = 0: \ X(x) = Ax + B \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow X_0 = 1,$$

$$\lambda^2 > 0: \ X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda A \sin\lambda\frac{\pi}{2} = 0 \iff \lambda\frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$X_k(x) = \cos 2kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Система найденных собственных функций $\{\cos 2kx\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ортогональна и полна в $L_2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos 2kx.$$

Помним, что свободный член и начальные условия (в данном случае $u_0(x) = X_1(x)$) надо разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx} = \frac{\pi}{4}, \quad a_m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2mx\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2mx\,dx} = \frac{((-1)^m - 1)}{\pi m^2},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\cos 2kx - 3\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos 2kx =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} 4T_k(t)k^2\cos 2kx + \cos t\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos 2kx \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow T_k''(t) + (4k^2 - 3)T_k(t) = a_k\cos t,$$

$$v|_{t=0} = \cos 2x \Rightarrow T_1(0) = 1, \quad T_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, 3, \ldots$$

$$v_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow T_k'(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Получились задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 - 3)T_k(t) = a_k\cos t, \\ T_1(0) = 1,\ T_k(0) = 0,\ k = 0, 2, 3, \ldots \\ T_k'(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Что *особенное* ждёт нас при решении задач Коши?

1. Надо обратить внимание на коэффициент при T_k. Может оказаться, что при некоторых значениях k он может быть положительным, при других отрицательным или нулевым, и решения при этом будут выражаться *разными* формулами.
2. При некоторых значениях k может быть *резонанс*.
3. *Начальные* условия могут быть *разными* для разных T_k.

В нашем случае

$$k=0:\ \begin{cases} T_0''(t)-3T_0(t)=a_0\cos t,\\ T_0(0)=0,\\ T_0'(0)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} T_0(t)=A_0\operatorname{ch}\sqrt{3}t+B_0\operatorname{sh}\sqrt{3}t-\frac{a_0}{4}\cos t,\\ T_0(0)=0,\\ T_0'(0)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff T_0(t)=\frac{a_0}{4}\left(\operatorname{ch}\sqrt{3}t-\cos t\right).$$

$$k=1:\ \begin{cases} T_1''(t)+T_1(t)=a_1\cos t,\\ T_1(0)=1,\\ T_1'(0)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} T_1(t)=A_1\cos t+B_1\sin t+\frac{a_1}{2}\,t\sin t,\\ T_1(0)=1,\\ T_1'(0)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff T_1(t)=\cos t+\frac{a_1}{2}\,t\sin t$$

— здесь резонанс (частное решение ищется в виде $t(a\cos t+$ $+\,b\sin t))$.

$$k\geqslant 2:\ \begin{cases} T_k''(t)+(4k^2-3)T_k(t)=a_k\cos t,\\ T_k(t)=0,\\ T_k'(t)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} T_k(t)=A_k\cos t\sqrt{4k^2-3}+B_k\sin t\sqrt{4k^2-3}+\\ \qquad\qquad +\dfrac{a_k\cos t}{(4k^2-3)-1},\\ T_k(t)=0,\\ T_k'(t)=0, \end{cases} \iff$$

$$\iff T_k(t)=\frac{a_k}{(4k^2-3)-1}\left(\cos t-\cos\sqrt{4k^2-3}t\right).$$

Записываем **Ответ.**

$$u(x,t)=\frac{x^2t}{\pi}+\frac{\pi}{16}\left(\operatorname{ch}\sqrt{3}t-\cos t\right)+3\left(\cos t-\frac{t\sin t}{\pi}\right)\cos 2x+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi\left((4k^2-3)-1\right)k^2}\left(\cos t-\cos t\sqrt{4k^2-3}\right)\cos 2kx.$$

П р и м е ч а н и е. Решение искалось в виде формального ряда, вопрос о почленном дифференцировании которого оставался открытым. Теперь, когда получен конкретный ряд, можно выяснить, является ли он дважды почленно дифференцируемым, а значит, классическим решением, или не является, а значит, будет обобщённым решением.

Как видно в нашем случае, решение является классическим, т. к. ряд можно почленно дифференцировать два раза. ◀

Пример 13.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l; \\ (u_x - hu)|_{x=0} = 0, \ (u_x + hu)|_{x=l} = 0, \ t \geqslant 0, \ h > 0. \end{cases}$$

Пример *отличается* от предыдущего тем, что в краевых условиях оба коэффициента отличны от 0, а потому собственные значения явно не определяются, а задаются трансцендентным уравнением, а ортогональность собственных функций не так очевидна — приходится обратиться к теории.

▶ **II.** Так как в задаче уравнение и краевые условия — *однородные*, то можно приступать сразу ко второму пункту — ищем решение уравнения в виде $T(t)X(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$T(t)X'(0) - hT(t)X(0) = 0 \Longleftrightarrow X'(0) - hX(0) = 0,$$

$$T(t)X'(l) + hT(t)X(l) = 0 \Longleftrightarrow X'(l) + hX(l) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2.$$

Решаем классическую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\lambda = 0, \quad X = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} A - hB = 0, \\ A + h(Al + B) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow X(x) \equiv 0,$$

$$\lambda^2 > 0, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ -A\lambda\sin\lambda l + B\lambda\cos\lambda l + Ah\cos\lambda l + Bh\sin\lambda l = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ (B\lambda + Ah)\cos\lambda l + (Bh - A\lambda)\sin\lambda l = 0 \Longleftrightarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\lambda l = \dfrac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}\,. \end{cases}$$

Обозначим, для удобства, $\lambda_n l = \mu_n \Longleftrightarrow \lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, тогда μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\mu_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{hl} - \frac{hl}{\mu_n}\right)$, $n \in \in \mathbb{N}$ (т. к. левая и правая части уравнения нечётные функции), и $X_n(x) = \mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l} \Rightarrow T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}$.

В задаче собственные числа удовлетворяют довольно сложному уравнению. Поэтому воспользуемся следующими из теории свойствами собственных значений (их счётное множество) и собственных функций (система ортогональна и полна) задачи Штурма–Лиувилля. Поэтому

$$u_0(x) = \sum_1^\infty a_n\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a_k = \frac{\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{\int_0^l\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)^2 dx} =$$

$$= \frac{\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl)}\,.$$

Подставим ряд в начальные условия:

$$\sum_1^\infty C_n\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) =$$

$$= u_0(x) = \sum_1^\infty a_n\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) \Longleftrightarrow C_n = a_n.$$

Решаем задачи Коши: $T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}$, $T_n(0) = a_n \Rightarrow \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \Rightarrow$

Ответ. $\sum\limits_1^\infty \dfrac{\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl)} \times$
$\times\, e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right).$ ◀

4.3. Что делать, если оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма–Лиувилля?

Если $-L_1^*$ не является оператором Штурма–Лиувилля, то умножением обеих частей уравнения на некоторую функцию $g(x)$, $g(x) > 0$ всегда можно привести левую часть уравнения к виду

$$LX(x): \quad \begin{cases} g(x)L_1^*X(x) \equiv LX(x) = \lambda^2 g(x)X(x), \\ c_1X(a) + d_1X'(a) = 0, \\ c_2X(b) + d_2X'(b) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при этом решение задачи останется прежним (потому что всё было однородным). Но! Изменилась правая часть уравнения. Что это даёт? Оказывается, изменились свойства собственных функций. Собственных значений по-прежнему счётное множество, система собственных функций остаётся полной, но теперь они не просто ортогональны, а ортогональны уже *«с весом»* $g(x)$, т. е. $\int_a^b g(x)X_k(x)X_n(x)\,dx = 0$, $k \neq n$.

Пример 14.

$$\begin{cases} u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x + f(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < \pi; \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = x, \ 0 < x < \pi; \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=\pi} = \pi t, \ t > 0. \end{cases}$$

В этом примере оператор в уравнении на собственные функции не является оператором Штурма–Лиувилля!

Решаем задачу по пунктам.

► **I.** Подбираем функцию, удовлетворяющую краевым условиям: $w_0 = xt$. Делаем сдвиг: $v = u - xt \iff u = v + xt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x + f(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < \pi; \\ v|_{t=0} = 0, \ v_t|_{t=0} = 0, \ 0 < x < \pi; \\ v|_{x=0} = 0, \ v|_{x=\pi} = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

II. Найдём собственные функции задачи. Делим, как всегда, переменные в соответствующем однородном уравнении:

$$T''(t)X(x) - 7T'(t)X(x) = X''(x)T + 2T(t)X'(x) \iff$$

$$\iff \frac{T''(t) - 7T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \mathrm{const},$$
$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \iff X(0) = X(\pi) = 0.$$

Получилась задача Штурма–Лиувилля с незнакомым оператором, поэтому решаем задачу

$$\begin{cases} -X''(x) - 2X'(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

для всех λ.

$\lambda = 0: \; X_0''(x) + 2X_0'(x) = 0 \iff$

$$\iff X_0(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 e^{-2\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0(x) = 0,$$

$\lambda = -\mu^2 < 0: \; X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) - \mu^2 X_\mu(x) = 0 \iff$

$$\iff X_\mu(x) = e^{-x}\left(A_\mu e^{x\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1+\mu^2}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_\mu + B_\mu = 0, \\ A_\mu e^{\pi\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-\pi\sqrt{1+\mu^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_\mu(x) = 0,$$

$\lambda = \mu^2 > 0: \; X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) + \mu^2 X_\mu(x) = 0 \Rightarrow X_\mu(x) = e^{\nu x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu = -1 \pm \sqrt{1-\mu^2} \Rightarrow$$

1) $1 - \mu^2 > 0: \; X_\mu(x) = e^{-x}\left(A_\mu e^{x\sqrt{1-\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1-\mu^2}}\right) \iff$

$$\iff X_\mu(x) = 0.$$

2) $1 - \mu^2 = 0: \; X_{\pm 1}(x) = e^{-x}(A + Bx) \iff X_\mu(x) = 0.$

3) $1 - \mu^2 < 0: \; X_\mu(x) =$

$$= e^{-x}\left(A_\mu \sin\left(x\sqrt{\mu^2-1}\right) + B_\mu \cos\left(x\sqrt{\mu^2-1}\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X_\mu(0) = 0 \iff B_\mu = 0, \\ X_\mu(\pi) = 0 \iff A_\mu \sin\left(\pi\sqrt{\mu^2-1}\right) = 0 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \pi\sqrt{\mu^2-1} = \pi k \iff \mu_k^2 = 1 + k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Итак, $X_k(x) = e^{-x}\sin kx$. Для нас это незнакомая система. Каковы её свойства?

Вот здесь уже придётся свести нашу задачу к классической задаче Штурма–Лиувилля, у которой свойства известны.

Умножим обе части уравнения на $g(x)=e^{2x}$:

$$-e^{2x}X''(x)-2e^{2x}X'(x)=\lambda e^{2x}X(x)\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -\left(e^{2x}X'(x)\right)'=\lambda e^{2x}X(x).$$

Слева стоит оператор Штурма–Лиувилля, справа появился множитель $g(x)=e^{2x}$, а это означает, что система собственных функций этой задачи ортогональна «с весом» e^{2x}, т. е. $\int_0^\pi e^{2x}X_m(x)X_n(x)\,dx=0$, $n\neq m$, или в нашем случае, $\int_0^\pi e^{2x}\left(e^{-x}\sin kx\right)\left(e^{-x}\sin mx\right)dx=\int_0^\pi \sin kx\sin mx\,dx=\frac{\pi}{2}\,\delta_{km}$, и полна в $L_2[0;\pi]$.

III. Дальше задачу решать можно по обычной схеме, разложив свободный член в ряд Фурье:

$$f(x,t)=\sum_1^\infty a_k(t)e^{-x}\sin kx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n(t)=\frac{\int_0^\pi e^{2x}f(x,t)e^{-x}\sin nx\,dx}{\int_0^\pi e^{2x}\left(e^{-x}\sin nx\right)^2dx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x,t)e^{x}\sin nx\,dx. \blacktriangleleft$$

Пример 15. Решить пример 14, если $f(x,t)\equiv e^{-x}\sin 3x$.

$$\begin{cases} v_{tt}-7v_t=v_{xx}+2v_x-e^{-x}\sin 3x,\ t>0,\ 0<x<\pi;\\ v|_{t=0}=0,\ v_t|_{t=0}=0,\ 0<x<\pi;\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=\pi}=0,\ t>0.\end{cases}$$

► Так как $e^{-x}\sin 3x$ — собственная функция, то решение задачи можно искать в виде

$$v=f(t)e^{-x}\sin 3x,\quad f(0)=0,\quad f'(0)=0.$$

Краевые условия выполнены — осталось удовлетворить уравнению и начальным условиям.

Подставим в уравнение:

$$f''(t)e^{-x}\sin 3x-7f'(t)e^{-x}\sin 3x=$$
$$=f(t)\left(-6e^{-x}\cos 3x-8e^{-x}\sin 3x\right)+$$
$$+2\left(-e^{-x}\sin 3x+3e^{-x}\cos 3x\right)f(t)-e^{-x}\sin 3x\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f''(t)-7f'(t)+10f(t)=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t)=C_1e^{5t}+C_2e^{2t}-\frac{1}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t,x) = \left(\frac{1}{6}\,e^{2t} - \frac{1}{15}\,e^{5t} - \frac{1}{10}\right) e^{-x}\sin 3x.$$

Ответ. $v(x,t) = \left(\frac{1}{6}\,e^{2t} - \frac{1}{15}\,e^{5t} - \frac{1}{10}\right) e^{-x}\sin 3x.$ ◀

§ 5. Метод Фурье на круге. Функции Бесселя

В этом параграфе собственные функции задач — это собственные функции оператора Лапласа в круге при условии, что $u|_{r=r_0} = 0$. Они имеют вид

$$\nu_{nk} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где в свою очередь $A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \ \lambda_n = n^2, \ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \end{cases}$$

$J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} -(rR_n(r))' + \frac{n^2}{r}\,R_n(r) = \lambda^2 rR_n(r), \\ R_n(r_0) = 0, \quad |R_n(0)| < \infty, \end{cases} \qquad \lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2,$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения Бесселя порядка n: $J_n(\mu_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Так как справа в уравнении Штурма–Лиувилля стоит не $\lambda^2 R_n(r)$, а $\lambda^2 rR_n(r)$, то собственные функции, соответствующие разным k (при фиксированном n), не просто ортогональны, а ортогональны с весом r: $\int_0^{r_0} rR_n^k R_n^n\,dr = 0$, $k \neq m$.

Решение задач можно искать в виде

$$u(t,r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi).$$

Собственные функции задач удовлетворяют уравнению $\Delta v_{nk} = -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 v_{nk}$.

Сформулируем задачу о колебании круглой мембраны, закреплённой по краю.

Задача 11*.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,x,y), \ \sqrt{x^2+y^2} < r_0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x,y), \ u_t|_{t=0} = u_1(x,y), \ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant r_0, \\ u|_{\sqrt{x^2+y^2}=r_0} = 0. \end{cases}$$

Так как задача поставлена в круге, перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Так как точка (r,φ) и $(r,\varphi+2\pi k)$ — одна и та же точка нашей мембраны, то решение должно удовлетворять условию $u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi)$. Как известно, такая замена переменных даже локально не всюду является взаимно однозначной — якобиан в точке $r = 0$ равен 0.

Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

уравнение имеет особенность в точке $r = 0$. Поэтому можно ожидать некоторых особенностей решения задачи в этой точке.

В примере 9 мы уже столкнулись с тем, что переход от декартовых координат к криволинейным (сферическим) изменил задачу — перевел задачу Коши в $\mathbb{R}^3$ в одномерную задачу о колебании полубесконечной струны.

Итак, сделаем замену переменных.

Задача 11.**

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,r,\varphi), \\ \qquad\qquad r < r_0, \ t > 0, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r,\varphi), \ u_t|_{t=0} = u_1(r,\varphi), \ r \leqslant r_0, \\ u|_{r=r_0} = 0. \end{cases}$$

► **I.** Первый пункт схемы решения по методу Фурье выполнен — краевые условия однородные. Приступаем сразу ко второму.

II. Делим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях.

Отделим пространственные переменные от времени:

$$u(r,\varphi,t) = T(t)v(r,\varphi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T''(t)v(r,\varphi) + bT'(t)v(r,\varphi) + cT(t)v(r,\varphi) = a^2T(t)\Delta v(r,\varphi) \Leftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)} + b\,\frac{T'(t)}{a^2T(t)} + \frac{c}{a^2} = \frac{\Delta v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} = \mathrm{const} = \mu,$$
$$u|_{r=r_0} = 0 \Longleftrightarrow T(t)v(r_0,\varphi) = 0 \Longleftrightarrow v(r_0,\varphi) = 0,$$
$$T(t)v(r,\varphi+2\pi) = T(t)v(r,\varphi) \Longleftrightarrow v(r,\varphi+2\pi) = v(r,\varphi).$$

Для уравнения $\Delta v(r,\varphi) = \mu v(r,\varphi)$ получилась краевая задача Штурма–Лиувилля.

Здесь мы должны поверить, что задача

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, \ x \in D, \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

имеет положительные собственные значения $\mu = \lambda^2 > 0$.

Продолжим деление переменных

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

т. к. уравнение и краевые условия по-прежнему однородны.

$$\frac{1}{R(r)}\left(R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r)\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\,\frac{1}{r^2}\,\Phi''(\varphi) = -\lambda^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{R(r)}\,(r^2R''(r) + rR'(r)) + \lambda^2r^2 = -\,\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu,$$
$$R(r_0)\Phi(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow R(r_0) = 0,$$
$$R(r)\Phi(\varphi) = R(r)\Phi(\varphi+2\pi) \Longleftrightarrow \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi).$$

Получились две задачи Штурма–Лиувилля.

Первая задача, $\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \nu\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi), \end{cases}$ с *незнакомым* нам краевым условием периодичности решения, и вторая, для $R(r)$, более сложная и незнакомая:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - \nu)R(r) = 0, \ r < r_0, \\ R(r_0) = 0. \end{cases}$$

Первую систему легко решить:

$$\nu = 0: \ \Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = 1,$$

$$\nu > 0 \iff \nu = \mu^2 > 0: \ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \iff$$

$$A\cos\mu\varphi + B\sin\mu\varphi = A\cos\mu(\varphi + 2\pi) + B\sin\mu(\varphi + 2\pi) \iff$$

$$\iff (-A\sin\mu(\varphi + \pi) + B\cos\mu(\varphi + \pi))\sin\mu\pi = 0 \Rightarrow \mu = n,$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \ \ldots$$

$$\nu < 0 \iff \nu = -\mu^2 < 0: \ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \iff$$

$$A\,\mathrm{ch}\,\mu\varphi + B\,\mathrm{sh}\,\mu\varphi = A\,\mathrm{ch}\,\mu(\varphi + 2\pi) + B\,\mathrm{sh}\,\mu(\varphi + 2\pi) \iff \varnothing.$$

Отсюда следует, что собственные значения $\nu = n^2$ неотрицательны, причём $n = 0$ соответствует одна собственная функция $\Phi_0(\varphi) = 1$, а любому $n \geqslant 1$ соответствуют две собственные функции: $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $\mu = n$, $n \in \mathbb{N}$. Иногда пишут так:

$$\begin{cases} \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \ n = 0, 1, 2, \ \ldots; \\ \Phi_m(\varphi) = \sin|m|\varphi, \ m = -1, -2, \ \ldots \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = n^2\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \, \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \, \mu = n, \, n \in \mathbb{N} \iff$$

$$\iff \{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь займёмся второй задачей. Перепишем её по-другому:

$$\begin{cases} -r^2R_n''(r) - rR_n'(r) + n^2R_n(r) = \lambda^2r^2R_n(r), \ r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0. \end{cases}$$

Получились краевые задачи для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и неизвестных λ.

Стоящий слева оператор не является оператором Штурма–Лиувилля. Сделаем его таковым, разделив обе части на r:

$$-rR_n''(r) - R_n'(r) + n^2\,\frac{R_n(r)}{r} = \lambda^2 rR_n(r) \iff$$

$$\Longleftrightarrow\ -(rR_n'(r))' + \frac{n^2}{r}\, R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r).$$

Это *новая* для нас задача Штурма–Лиувилля (производные «свернулись» в одночлен) на собственные функции, но только с одним однородным краевым условием $R_n(r_0) = 0$:

$$\begin{cases} -(rR_n'(r))' + \frac{n^2}{r}\, R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r), & r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0. \end{cases}$$

Однако заметим, что оператор Штурма–Лиувилля *не является* классическим — условие $p(r) \geqslant p_0 > 0$ не выполнено, потому что $p(r) = 0$ при $r = 0$.

Отступление.* Рассмотрим однородное уравнение Штурма–Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x) = \lambda y(x).$$

► В классическом случае $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $p(x) \in C^1[a;b]$, $q(x) \in C[a;b]$. Но не всегда это выполнено — бывает, что $p(x) = 0$ в одном или обоих концах отрезка.

Как это влияет на решения?

Выпишем вронскиан фундаментальной системы решений:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{p'(x)}{p(x)}} = Ce^{-\ln|p(x)|} = \frac{C*}{p(x)}.$$

Отсюда следует, что если $p(x)$ в какой-нибудь точке обращается в 0, то не существует двух линейно-независимых решений $y(x) \in C^1[a;b]$.

Поэтому задача, если имеет, то только одно решение, ограниченное вместе с производной в окрестности точки, в которой $p(x) = 0$. ◄

Нас интересует решение уравнения 2-го порядка на отрезке $[0;r_0]$ — оно, по крайней мере, ограничено вместе с производной.

Для наших задач достаточно вынести условие ограниченности при $r = 0$ в условие исходной **задачи 11****, и оно является второй частью однородного условия на границе при нахождении собственных функций задачи. Окончательно задача примет следующий вид.

Задача 10.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,r,\varphi),\ r < r_0,\ t > 0, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi + 2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r,\varphi),\ u_t|_{t=0} = u_1(r,\varphi),\ r \leqslant r_0, \\ u|_{r=r_0} = 0,\ |u|\Big|_{r=0} < \infty. \end{cases}$$

Наша задача Штурма–Лиувилля теперь имеет вид

$$\begin{cases} -(rR_n'(r))' + \frac{n^2}{r}\,R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r),\ r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0,\ |R_n(0)| < \infty. \end{cases}$$

Итак, свойства $R_n(r)$ при фиксированном n и различных λ стали понятны: $R_n^{\lambda_m}(r)$ и $R_n^{\lambda_k}(r)$ ортогональны с «весом r»: $\int_0^{r_0} rR_n^{\lambda_k}R_n^{\lambda_m}dr = 0$, $\lambda_k \neq \lambda_m$ и представляют полную в $L_2[0;r_0]$ систему.

Осталось решить эту задачу.

Сделаем замену переменных (у нас $\lambda^2 > 0$): $\lambda r = x \Rightarrow \dfrac{d}{dr} = \lambda\,\dfrac{d}{dx}$, $R_n(r) = \tilde{R}_n(x)$ и перепишем уравнение по-другому. Тогда уравнение примет вид уравнения Бесселя порядка n:

$$x^2\tilde{R}_n''(x) + x\tilde{R}_n'(x) + (x^2 - n^2)\tilde{R}_n(x) = 0.$$

Так как $p(0) = 0$, то, в силу отступления*, может существовать только одно ограниченное вместе с производной в окрестности 0 решение. Такое решение существует, и оно называется функцией Бесселя порядка n:

$$R_n(r) = \tilde{R}_n(\lambda r) = J_n(\lambda r).$$

Подставим краевое условие:

$$R_n(r_0) = \tilde{R}_n(\lambda r_0) = 0 \Longleftrightarrow J_n(\lambda r_0) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \lambda r_0 = \mu_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}, \quad k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_n^k(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь $\mu_k^{(n)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_n(x)$: $J_n(\mu_k^{(n)}) = 0$, $\mu_k^{(n)} > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

При этом при любом фиксированном n система собственных функций $J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right)$ полна в $L_2[0; r_0]$ и ортогональна с «весом» r: $\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right) J_n\left(\frac{\mu_l^{(n)}}{r_0}\,r\right) dr = 0$, $k \neq l$.

Отсюда следует: для решения всей задачи *необходимо* запомнить, что

$$\Delta v_{nk} = -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 v_{nk} =$$
$$= \Delta\left(I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\right) =$$
$$= -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 \left(I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\,r\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\right),$$
$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

III. Находим решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t)v_{nk}(r, \varphi).$$

Если уравнение неоднородное, то при фиксированном t разлагаем $f(t, r, \varphi)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $f(t, r, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)v_{nk}(r, \varphi)$. То же придётся сделать и с начальными условиями:

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} g_{nk}v_{nk}(r, \varphi), \quad u_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h_{nk}v_{nk}(r, \varphi),$$

Это можно сделать последовательно.

Сначала можно разложить при фиксированных значениях t и r функцию $f(t,r,\varphi)$ в знакомый ряд по тригонометрической системе:

$$f(t,r,\varphi)=\sum_{0=0}^{\infty}a_n(t,r)\cos n\varphi+\sum_{1}^{\infty}b_n(t,r)\sin n\varphi,$$

а затем каждый коэффициент по системе функций Бесселя.

Например,

$$a_n(t,r)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}(t)I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\iff$$
$$\iff c_{nk}(t)=\frac{\int_0^{r_0}ra_n(t,r)I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0}rI_n^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)dr}.$$

К сожалению, кроме написания формул, мы ничего вычислить не можем — так их и оставляем.

Подставляем полученные ряды в уравнение и начальные условия:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T''_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)+b\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T'_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)+\\ \qquad+c\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)=\\ \quad=-a^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(t)\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2v_{nk}(r,\varphi)+\\ \qquad+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi),\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(0)v_{nk}(r,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_{nk}v_{nk}(r,\varphi),\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T'_{nk}(0)v_{nk}(r,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{nk}v_{nk}(r,\varphi).\end{cases}\iff$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}T''_{nk}(t)+bT'_{nk}(t)+cT_{nk}(t)=-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2T_{nk}(t)+f_{nk}(t),\\ T_{nk}(0)=g_{nk},\quad T'_{nk}(0)=h_{nk}.\end{cases}$$

Получили задачи Коши для уравнений относительно $T_{nk}(t)$, которые имеют единственные решения.

Выкладки здесь громоздкие — поэтому в наших задачах чаще всего попадаются такие свободные члены и начальные условия, где можно ограничиться одномерными рядами по функциям Бесселя.

Пример 16.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{1}{4}\,\mu_2^{(3)} r\right)\cos 3\varphi + f(r)\sin 2\varphi, \\ \qquad\qquad\qquad r < 4,\ t > 0,\ u = u(r,\varphi,t), \\ u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi), \\ u|_{r=4} = 0,\ |u(0)| < \infty, \end{cases}$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;4]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

► Так как в уравнение и начальные условия входят только $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, то решение задачи можно сразу искать в виде суммы двух рядов $u(t,r,\varphi) = \sum\limits_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\, r\right)\cos 3\varphi + \sum\limits_1^\infty Q_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\, r\right)\sin 2\varphi$, а можно отдельно решить две задачи.

Пример 16*.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\, r\right)\cos 3\varphi, \\ \qquad\qquad r < 4,\ t > 0,\ u = u(t,r,\varphi), \\ u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi), \\ u|_{r=4} = 0,\ |u(0)| < \infty. \end{cases}$$

Пример 16.**

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + f(r)\sin 2\varphi,\ r < 4,\ t > 0,\ u = u(t,r,\varphi), \\ u|_{t=0} = 0, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi), \\ u|_{r=4} = 0,\ |u(0)| < \infty. \end{cases}$$

Решение первой задачи — Пример 16*.

Ищем решение в виде $u(t,r,\varphi)=\sum\limits_{1}^{\infty}T_k(t)J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)\cos 3\varphi$. Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при линейно-независимых множителях:

$$\begin{cases} T_k'(t)=-T_k(t)\left(5\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2+3\right),\ k\neq 2,\\ T_2'(t)=-T_2(t)\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)+1. \end{cases}$$

Теперь подставляем $t=0$: $T_k(0)=a_k$, где

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)\Rightarrow a_k=\frac{\int_0^4 rf(r)J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)dr}{\int_0^4 rJ_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)dr}.$$

Решаем задачи Коши:

$$T_k(t)=a_ke^{-\left(5\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)t},\ k\neq 2,$$

$$T_2(t)=\frac{1}{5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2+3}\left(1-e^{-\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)t}\right)+a_2e^{-\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2+3\right)t}.$$

Решение второй задачи — Пример 16**.

Разложим свободный член в ряд Фурье:

$$f(r)=\sum_{1}^{\infty}b_kJ_2\left(\frac{1}{4}\mu_k^{(2)}r\right),\text{ где } b_k=\frac{\int_0^4 rf(r)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)dr}{\int_0^4 rJ_2^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)dr}.$$

Получим решение задачи в виде ряда

$$u(t,r,\varphi)=\sum_{1}^{\infty}Q_k(t)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)\sin 2\varphi.$$

После подстановки в уравнение и начальное условие получим

$$Q_k'(t) = -Q_k(t)\left(5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2 + 3\right) + b_k, \quad Q_k(0) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow Q_k(t) = \frac{b_k}{\left(5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2 + 3\right)}\left(1 - e^{-\left(5\ \frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2 + 3\Big)t}\right).$$

Ответ. $u(r,\varphi,t) = \sum\limits_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\, r\right)\cos 3\varphi +$
$+\sum\limits_1^\infty Q_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\, r\right)\sin 2\varphi$, где все входящие сюда выражения определены выше. ◀

§ 6. Эллиптические уравнения

В отличие от смешанных задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, для эллиптических уравнений ставится только краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x),\ x \in D, \\ \left(\alpha u + \beta\, \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \partial D} = u_0(x), \end{cases}$$

где n — внешняя нормаль к границе области D.

При этом, если $\beta = 0$, задача называется задачей Дирихле, если $\alpha = 0$, задача называется задачей Неймана, если $\alpha\beta \neq 0$, задача называется смешанной задачей.

Задачи будут решаться в полярных или сферических координатах. Заданные краевые условия произвольные, неоднородные. Однородные краевые условия для нахождения собственных функций возникают из-за того, что области имеют специальный вид, а потому решение должно иметь период 2π, а в случае $\mathbb{R}^3$ прибавляются условия $\theta = 0$, $\theta = \pi$ (уравнение Лапласа в новых координатах при этом имеет особенность).

6.1. Уравнение Лапласа в $\mathbb{R}^2$

Задачи будем решать внутри круга, вне круга или внутри кольца. В отличие от задач гиперболического и параболического типа, рассмотренных в предыдущем параграфе, краевые условия *неоднородные*.

Решение будем искать в полярных координатах.

А тогда, как и в предыдущих задачах на круглой мембране, опять необходимо, чтобы $u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi)$.

Будем решать следующие задачи.

Задача 11. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi), \ r < R_0 \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi), \\ u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi). \end{cases}$

Задача 12. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi), \ R_1 < r < R_2, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_r)|_{r=R_1} = u_0(\varphi), \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=R_1} = u_1(\varphi), \\ u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi). \end{cases}$

Задача 13. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi), \ r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi), \\ u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi). \end{cases}$

I. При решении неоднородного уравнения Пуассона прежде всего находим частное решение $w_0(r,\varphi)$, $w_0(r,\varphi+2\pi) = w_0(r,\varphi)$, затем делаем сдвиг $v = u - w_0(r,\varphi)$, сводя уравнение Пуассона к уравнению Лапласа. При этом могут измениться неоднородные краевые условия. Например, в задаче 11:

$$v = u - w_0 \Longleftrightarrow u = v + w_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \ r < R_0; \\ (\alpha v + \beta v_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi) - (\alpha w_0 + \beta w_{0r})|_{r=R_0} = v_0(\varphi), \\ v(r,\varphi+2\pi) = v(r,\varphi). \end{cases}$$

II. Теперь уравнение однородное, остальные условия, кроме краевого, тоже однородные — приступаем ко второму пункту метода Фурье — можем делить переменные.

Будем искать решение уравнения $\Delta v \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ в виде $u = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставим в уравнение и однородное условие

$$\Phi(\varphi)r(rR'(r))' + R(r)\Phi''(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{r(rR'(r))'}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \text{const} = \mu^2,$$
$$R(r)\Phi(\varphi + 2\pi k) = R(r)\Phi(\varphi) \Longleftrightarrow \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Мы сразу написали, что $\text{const} = \mu^2$, т. к. $-\Phi''(\varphi)$ — одномерный оператор Штурма–Лиувилля. Получилась знакомая задача (см. с. 47):

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С $\Phi(\varphi)$ определились. Так как мы делили переменные в «родном» уравнении, а не в соответствующем, то решим уравнение и для R:

$$\frac{r(rR'(r))'}{R(r)} = n^2 \Longleftrightarrow r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ (т. к. это уравнение Эйлера) } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad R_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что мы получили решения уравнения Лапласа в виде

$$v_0(r, \varphi) = R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad n = 0,$$
$$v_n(r, \varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

III. Теперь, в зависимости от того, какую из трёх задач решаем, будем искать решение в виде формального ряда, удовлетворяющего соответствующим условиям при $r = 0$ или $r = \infty$.

1) Если задача внутри круга, то

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_1^\infty r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

2) Если задача вне круга, то

$$u(r,\varphi)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)+C_0.$$

3) Если задача в кольце, то

$$u(r,\varphi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{1}^{\infty}\left(C_nr^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{1}^{\infty}\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\sin n\varphi.$$

6.2. Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi)=ar^n\cos m\varphi$ или $f(r,\varphi)=ar^n\sin m\varphi$, $(n+2)^2\neq m^2$?

► В этом случае решение можно искать в виде $u_{\text{частн}}=$ $=br^{n+2}\cos m\varphi$, т. е. увеличив степень r на 2. Подставляем в уравнение $u_{rr}+\frac{1}{r}\,u_r+\frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi}=ar^n\cos m\varphi$:

$$b(n+2)(n+1)r^n\cos m\varphi+b(n+2)r^n\cos m\varphi-bm^2r^n\cos m\varphi=$$
$$=ar^n\cos m\varphi\Longleftrightarrow b=\frac{a}{(n+2)^2-m^2}\,.$$

Видно, что так можно делать, если $(n+2)^2\neq m^2$. ◄

6.3. Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi)=ar^n\cos m\varphi$ или $f(r,\varphi)=ar^n\sin m\varphi$, $(n+2)^2=m^2$?

► В этом случае $r^{n+2}\cos(n+2)\varphi$ является решением уравнения Лапласа. Решение ищется в виде $u_{\text{частн}}=\varphi(r)\cos m\varphi$ (см. пример 18). ◄

Пример 17. $\begin{cases}\Delta u=y^2,\ r<2,\\ u|_{r=2}=\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos 2\varphi.\end{cases}$

► Ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн}}=ar^4+br^4\cos 2\varphi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12ar^2+4ar^2+12br^2\cos 2\varphi+4br^2\cos 2\varphi-4br^4\cos 2\varphi=$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{r^2\cos 2\varphi}{2} \Rightarrow u_{\text{частн}} = \frac{r^4}{32} - \frac{r^4}{24}\cos 2\varphi$$

Делаем сдвиг:

$$v = u - \frac{r^4}{32} + \frac{r^4}{24}\cos 2\varphi \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \ r < 2, \\ v|_{r=2} = -\frac{1}{2} + \sin\varphi + \frac{4}{3}\cos\varphi. \end{cases}$$

Так как это задача Дирихле на круге, то решение находится «устно»:

$$v = -\frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)\sin\varphi + \frac{4}{3}\left(\frac{r}{2}\right)\cos\varphi.$$

Ответ. $u = \frac{r^4}{32} - \frac{r^4}{24}\cos 2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{r}{2}\sin\varphi + \frac{2r}{3}\cos\varphi.$ ◀

Пример 18. $\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\cos 3\varphi}{r^5}, \ r > 2, \\ u|_{r=2} = \sin 2\varphi + \cos\varphi. \end{cases}$

► В этом примере, если увеличить степень на 2, то $\frac{\cos 3\varphi}{r^3}$ является решением уравнения Лапласа. Поэтому частное решение надо искать в общем виде:

$$u_{\text{частн}} = f(r)\cos 3\varphi \Rightarrow r^2 f''(r) + rf'(r) - 9f(r) = r^{-3},$$
$$f_{\text{однор}}(r) = Ar^3 + \frac{B}{r^3}.$$

Видно, что имеет место *резонанс*:

$$f_{\text{частн}} = br^{-3}\ln r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12br^{-3}\ln r - 7br^{-3} - 3br^{-3}\ln r + br^{-3} - 9br^{-3}\ln r = r^{-3} \iff$$
$$\iff b = -\frac{1}{6} \Rightarrow f_{\text{частн}} = -\frac{\ln r}{6r^3}.$$

В качестве частного решения можно взять $-\frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi$.

Делаем сдвиг:

$$v = u + \frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi \iff u = v - \frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \ r > 2, \\ v|_{r=2} = \sin 2\varphi + \cos\varphi + \frac{\ln 2}{48}\cos 3\varphi. \end{cases}$$

Полученная задача Дирихле решается устно:

$$v = \left(\frac{2}{r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 \sin 2\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^3 \frac{\ln 2}{48}\cos 3\varphi.$$

Ответ. $u = \dfrac{2\cos\varphi}{r} + \dfrac{4\sin 2\varphi}{r^2} + \dfrac{(\ln 2 - \ln r)\cos 3\varphi}{6r^3}$. ◀

Пример 19. $\begin{cases} \Delta u = 12(x^2 - y^2), \ 1 < r < 2, \\ u_r|_{r=1} = -6\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi, \\ u_r|_{r=2} = 28\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi. \end{cases}$

► Заметим, что $12(x^2 - y^2) = 12r^2\cos 2\varphi$. Поэтому ищем частное решение и делаем сдвиг:

$$u_{\text{частн}} = r^4\cos 2\varphi \Rightarrow v = u - r^4\cos 2\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \\ v_r|_{r=1} = -10\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi, \\ v_r|_{r=2} = -4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi. \end{cases}$$

Теперь ищем решение задачи:

$$v = \cos 2\varphi\left(ar^2 + \frac{b}{r^2}\right) + \sin 4\varphi\left(cr^4 + \frac{d}{r^4}\right) + C.$$

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} -10\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi = \\ \qquad = \cos 2\varphi(2a - 2b) + \sin 4\varphi(4c - 4d), \\ -4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi = \\ \qquad = \cos 2\varphi\left(4a - \frac{2b}{8}\right) + \sin 4\varphi\left(32c - \frac{4d}{32}\right). \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{15}, \ b = 4\,\frac{64}{15}, \\ c = 0, \ d = -4. \end{cases}$$

Ответ. $u(r,\varphi) = r^4\cos 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{15}\left(-11r^2 + \frac{64}{r^2}\right) - \frac{4}{r^4}\sin 4\varphi +$ $+ C$.

П р и м е ч а н и е. Обратите внимание на то, что при решении задачи Неймана мы не определили число C. Это правильно, потому что решение задачи Неймана для уравнения Лапласа определено с точностью до произвольной постоянной. ◀

§ 7. Метод Фурье с применением сферических функций

7.1. Схема решения

Теперь будем решать краевые задачи для внутренности шара, внешности шара и шарового слоя.

Задача 14. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta),\ r < R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$

Задача 15. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta),\ r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$

Задача 16. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta),\ R_1 < r < R_2, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_r)|_{r=R_1} = u_0(\varphi,\theta), \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=R_2} = u_1(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$

I. Как всегда при решении уравнения Пуассона сначала находим частное решение и сводим с помощью сдвига к решению уравнения Лапласа.

II. Поэтому сразу начнём со второго пункта: будем решать уравнение Лапласа — ищем решение в виде $u(r,\varphi,\theta) = R(r)V(\varphi,\theta)$:

$$V(\varphi,\theta)\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{R(r)}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{R(r)}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{1}{R(r)}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\,\frac{1}{V(\varphi,\theta)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda.$$

Оператор $-\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$ называется оператором Бельтрами. Найдём собственные функции и собственные значения задачи

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right)=\lambda V(\varphi,\theta),\\ V(\varphi+2\pi,\theta)=V(\varphi,\theta). \end{cases}$$

Опять разделим переменные: $V(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)\Theta(\theta) \Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\cdot\Theta'(\theta)\right)' - \lambda\sin^2\theta = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2.$

Появилась знакомая задача Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \mu^2=k^2 \Rightarrow \Phi_0(\varphi)=1,\ \ \Phi_k(\varphi)=A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi,\ \ k\in\mathbb{N},$$

и незнакомое уравнение

$$-\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k^2\,\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}=\lambda\Theta(\theta).$$

Сделаем замену переменных: $\xi=\cos\theta$, $\xi\in[-1;1]$. Уравнение примет вид уравнения Штурма–Лиувилля:

$$-\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\,\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)+\frac{k^2}{1-\xi^2}\,\Theta(\xi)=\lambda\Theta(\xi),$$

у которого, на первый взгляд, нет никаких краевых условий. Заметим, что при решении наших задач $\theta\in[0;\pi]$, т.е. есть $\theta=0$ и $\theta=\pi$, или в новых переменных $\xi=1$ и $\xi=-1$. При этом в этих точках $p(\xi)=0$. Это, в силу отступления на с. 48 означает, что может существовать не более одного решения, ограниченного вместе с производной на отрезке $[-1;1]$.

Условие ограниченности на отрезке $[-1;1]$ *играет роль* однородных краевых условий для задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\,\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)+\frac{k_0^2}{1-\xi^2}\,\Theta(\xi)=\lambda\Theta(\xi),\ \ \xi\in[-1;1],\\ |\Theta(\xi)|<\infty,\ \ \xi\in[-1;1]. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала задачу при $k=0$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\,\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)=\lambda\Theta(\xi),\\ |\Theta(\xi)|<\infty,\ \ \xi\in[-1;1]. \end{cases}$$

Полученное уравнение называется *уравнением Лежандра*, который доказал, что ограниченное на отрезке $\xi \in [-1;1]$ решение существует, если $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и оно выражается формулой

$$\Theta_n(\xi) = P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\,(\xi^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $P_n(\xi)$ называется *полиномом Лежандра* (другого, линейно независимого с этим и ограниченного вместе с первой производной решения на отрезке нет). Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $[-1;1]$: $\int_{-1}^{1} \Theta_n(\xi)\Theta_m(\xi)\,d\xi = 0$, $n \neq m$, и представляют полную в $L_2[-1;1]$ систему.

Итак,

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\,\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right) = n(n+1)\Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)| < \infty,\ \xi \in [-1;1], \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Theta_n(\xi) = P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\,(\xi^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тогда решением задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\,\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right) + \frac{k_0^2}{1-\xi^2}\,\Theta(\xi) = n(n+1)\Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)| < \infty, \quad \xi \in [-1;1] \end{cases}$$

при каждом фиксированном значении k_0 являются так называемые присоединённые полиномы Лежандра:

$$\Theta_n^{k_0}(\theta) = P_n^{k_0}(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{k_0}{2}}\,\frac{d^{k_0}}{d\xi^k}\,P_n(\xi) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P_n^{k_0}(\xi) = \sin^{k_0}\theta \cdot P_n^{(k_0)}(\cos\theta), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k_0 \leqslant n.$$

Система $\{P_n^{k_0}(\theta)\}$, $n \geqslant k_0$, $n = k_0,\ k_0+1,\ k_0+2,\ \ldots$ ортогональна на отрезке $[-1;1]$: $\int_{-1}^{1} P_n^{k_0}(\xi)P_m^{k_0}(\xi)\,d\xi = 0$, $n \neq m$ (производные одного порядка у полиномов разных степеней) и является полной в $L_2[-1;1]$.

Видно, что каждому *фиксированному* n соответствует $2k+$ $+\,1$ собственных функций оператора Бельтрами:

$$Y_n^0(\varphi,\theta) = P_n^{(0)}(\cos\theta) \equiv P_n(\cos\theta),$$

$$Y_n^k(\varphi,\theta) = \left[\begin{array}{l} \sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi,\ \ k = 0, 1, 2,\ \ldots,\ n; \\ \sin^{|k|}\theta P_n^{(|k|)}(\cos\theta)\sin|k|\varphi,\ \ k = -1, -2,\ \ldots,\ -n, \end{array}\right.$$

каждая из которых называется *сферической функцией.* Их алгебраическая сумма $\sum\limits_{k=-n}^{n} a_{nk}Y_n^k(\varphi,\theta)$ тоже является сферической функцией. Она обозначается Y_n, называется *сферической функцией* порядка n, и, как собственная функция оператора Бельтрами, удовлетворяет уравнению

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y_n(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y_n(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right) = \\ = n(n+1)Y_n(\varphi,\theta), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_{nk}Y_n^k(\varphi,\theta).$$

Заметим, что порядок функции определяется *степенью полинома Лежандра* (независимо от порядка производной в присоединённом полиноме).

Система $\{Y_n^k(\varphi,\theta)\}$ ортогональна на поверхности единичной сферы и полна на ней в $L_2(S_1)$.

Так как деление переменных происходило в однородном уравнении, то придётся найти и $R(r)$:

$$\frac{1}{R(r)}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR(r)}{dr}\right) = \lambda = n(n+1) \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = C_nr^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\,.$$

Функция

$$\left(a_nr^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)(c_k\cos k\varphi + d_k\sin k\varphi),\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ k \leqslant n$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и называется *шаровой функцией.*

III. Теперь ищем решение задачи в виде формальных рядов, где каждое слагаемое является решением уравнения Лапласа:

а) внутри шара в виде ряда

$$u(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n Y_n(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\sum_{k=-n}^{n} a_{nk}Y_n^k(\varphi,\theta),\quad r<R,$$

б) вне шара в виде

$$u(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{r^{n+1}}\,Y_n(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=-n}^{n} a_{nk}Y_n^k(\varphi,\theta),\ r>R$$

и

в) внутри шарового слоя в виде

$$u(r,\varphi,\theta)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)\sum_{k=0}^{n}\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)(C_k\cos k\varphi+D_k\sin k\varphi),$$
$$R_1<r<R_2.$$

Осталось удовлетворить краевым условиям. Для этого придётся разложить их в ряды Фурье по сферическим функциям.

Пример 20. Задача Дирихле в шаре:

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ r<r_0,\\ u|_{r=r_0}=u_0(\varphi,\theta),\\ u(r,\varphi+2\pi,\theta)=u(r,\varphi,\theta).\end{cases}$$

► Пусть краевое условие разложено в ряд по сферическим функциям: $u_0(\varphi,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n Y_n(\varphi,\theta)$.

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r_0^n Y_n(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n Y_n(\varphi,\theta)\Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha_n r_0^n=\beta_n\Leftrightarrow\alpha_n=\frac{\beta_n}{r_0^n}\Rightarrow u(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n(\varphi,\theta).$$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n(\varphi,\theta)$. ◄

В явном виде мы ничего не получим, кроме формул (как и для функций Бесселя), так как при разложении по сферическим функциям приходится раскладывать по присоединённым полиномам.

В принципе это можно сделать так.

Сначала можно разложить, например, $u_0(\varphi, \theta)$ в ряд по обычной тригонометрической системе: $u_0(\varphi, \theta) = \frac{a_0(\theta)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k(\theta) \cos k\varphi + b_k(\theta) \sin k\varphi)$, а затем коэффициенты по системе присоединенных полиномов:

$$a_k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn} P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn} \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

где

$$c_{km} = \frac{\int_0^\pi a_k(\theta) \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos\theta) d\theta}{\int_0^\pi \left(\sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\right)^2 d\theta},$$

Аналогично,

$$b_k(r, \theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn} P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn} P \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos\theta).$$

Поэтому, чтобы избежать этой громоздкости, в наших задачах краевые условия являются конечными суммами сферических функций.

7.2. Как у конкретной сферической функции определить её порядок?

При решении задач часто по сферической функции, присутствующей в краевом условии, необходимо определить соответствующую шаровую. Как?

Пример 21. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ u_0(\varphi, \theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cos^2\theta \sin\theta, \\ u(r, \varphi, \theta) = u(r, \varphi + 2\pi, \theta), \\ \lim\limits_{r \to \infty} u = 0. \end{cases}$$

► Т. к. в выражении $u_0(\varphi,\theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta\sin\theta$ присутствует $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, то $k = 1$, и речь пойдёт о функции $Y_?^1$, для которой уже присутствует необходимый множитель $\sin\theta$. Осталось выяснить, *первая* производная какого полинома Лежандра равна $\cos^2\theta$. Ясно, это связано с многочленом 3-й степени:

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right) \Rightarrow P_3'(\cos\theta) = \frac{15\cos^2\theta}{2} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2\theta = \frac{2P_3'(\cos\theta)}{15} + \frac{P_1'(\cos\theta)}{10}.$$

Видно, что первая производная содержит не только $\cos^2\theta$, но и константу. Поэтому пришлось поискать ещё полином Лежандра, *первая* производная которого равна константе, это полином первой степени. Поэтому

$$u_0(\varphi,\theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2P_3^{(1)}}{15} + \frac{1}{10}\right)\sin\theta =$$

$$= \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2P_3^{(1)}}{15}\right)\sin\theta + \frac{1}{10}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{15}\left(\frac{R}{r}\right)^4\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_3^{(1)}(\cos\theta) +$$

$$+ \frac{1}{10}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)}(\cos\theta).$$

Ответ. $u = \frac{2}{15}\left(\frac{R}{r}\right)^4\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_3^{(1)}(\cos\theta) +$
$+ \frac{1}{10}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)}(\cos\theta).$ ◄

Пример 22. $\begin{cases} \Delta u = 20,\ r < \sqrt{3}, \\ u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi, \\ u(r,\varphi,\theta) = u(r,\varphi + 2\pi,\theta). \end{cases}$

► Найдём сначала частное решение уравнения и сделаем сдвиг:

$$u_{\text{частн.}} = ar^2 \Rightarrow 2a + 4a = 20 \Longleftrightarrow$$

$$\iff a = \frac{10}{3} \Rightarrow u_{\text{частн.}} = \frac{10r^2}{3} \Rightarrow v = u - \frac{10r^2}{3}\,.$$

Перепишем задачу в новых переменных:

$$\begin{cases} \Delta v = 0,\ r < \sqrt{3}, \\ v|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi - 10. \end{cases}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:

$$15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi - 10 =$$
$$= 5 + 15(2\cos^2\theta - 1) - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi =$$
$$= -10 + 30\,\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}P_1^1\sin\varphi =$$
$$= 20P_2 - \sqrt{3}P_1^1\sin\varphi.$$

Теперь запишем решение в шаровых функциях:

$$u(r,\varphi,\theta) = \frac{10r^2}{3} + 20P_2\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)P_1^1\sin\varphi =$$
$$= r^2\left(\frac{10}{3} + \frac{20}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right) - r\sin\theta\sin\varphi =$$
$$= 10r^2\cos^2\theta - r\sin\theta\sin\varphi.$$

Ответ. $u = 10r^2\cos^2\theta - r\sin\theta\sin\varphi.$ ◀

Пример 23.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4}\,,\ r > 2, \\ (u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right),\ u(\infty) = 0. \end{cases}$$

▶ Найдём сначала частное решение уравнения:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r = \frac{1}{r^4}\,,$$

$$u_{\text{частн}} = \frac{a}{r^2} \Rightarrow a(6-4) = 1 \iff a = \frac{1}{2} \Rightarrow v = u - \frac{1}{2r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0,\ r > 2, \\ (v - v_r)|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \frac{1}{4}\,,\ v(\infty) = 0. \end{cases}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:

$$\sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)-\frac{1}{4}=\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\,(1+\cos\theta)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)+\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot\frac{2}{3}\,P_2^{(1)}(\cos\theta)-\frac{1}{4}\,P_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(r,\varphi,\theta)=\frac{a}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)+$$

$$+\frac{b}{r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta)+\frac{d}{r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot\frac{1}{3}\,P_2^{(1)}(\cos\theta)-\frac{1}{4}\,P_0=$$

$$=\frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)+\frac{b}{8}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta)+\frac{d}{2}-$$

$$-\left(-\frac{2a}{8}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{3b}{16}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta)-\frac{d}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{a}{2}\,,\\ \frac{1}{6}=\frac{5b}{16}\,,\\ \frac{3d}{4}=-\frac{1}{4}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=\frac{8}{15}\,,\\ d=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)+$$

$$+\frac{8}{15r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta)-\frac{1}{3r}=$$

$$=\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{3r}+\frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\sin\theta+\frac{8}{5r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\cdot\sin\theta\cos\theta.$$

Ответ. $u=\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{3r}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)+$
$+\frac{8}{5r^3}\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right).$ ◀

§ 8. Потенциалы

Обычно потенциалы находят, вычисляя соответствующие интегралы. Этот метод мы опускаем. В данном пособии потенциалы для шара, сферы, сферического слоя находятся с помощью уравнений и свойств, которым они удовлетворяют. Это даёт возможность лучше усвоить и запомнить свойства потенциалов.

8.1. Объёмный потенциал в $\boldsymbol{R^3}$

Пусть ρ — обобщённая функция.

Свёртка $V_3 = \dfrac{1}{|x|} * \rho$ называется *ньютоновым* потенциалом.

Свойства потенциала V_3

1. Если $\rho(x)$ — финитная обобщённая функция, то потенциал V_3 существует в D' и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta V_3 = -4\pi\rho$.
2. Если ρ — *финитная, абсолютно интегрируемая* функция в R^3, то соответствующий ньютонов потенциал V_3 называется *объёмным* потенциалом. При этом *объёмный* потенциал V_3 является локально абсолютно интегрируемой функцией в R^3 и выражается формулами $V_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\rho(y)\,dy}{|x-y|}$.
3. Если $\rho \in C(\overline{G})$ и G — ограниченная область, $\rho = 0$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$, то объёмный потенциал V_3

а) принадлежит $C^1(\mathbb{R}^3)$,

б) гармоничен в G_1 и $V(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, $|x| \to \infty$.

4. Если $\rho \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, то $V \in C^2(G)$.

При решении задач приходится отдельно находить потенциалы для точек, принадлежащих ограниченной области G. Этот потенциал будем обозначать V_i, а для точек, лежащих вне её, этот потенциал будем обозначать V_e.

Тогда, если $\rho \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, из предыдущего следует, что

1) $\Delta V_i(x) = -4\pi\rho(x)$, $\Delta V_e(x) = 0$, $V_e(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, $|x| \to \infty$.

2) $V_e(x)|_{\partial G} = V_i(x)|_{\partial G}$.

3) $\dfrac{\partial}{\partial n} V_i|_{\partial G} = \dfrac{\partial}{\partial n} V_e|_{\partial G}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

Обычно потенциалы находят, вычисляя соответствующие интегралы.

Так как в наших задачах в роли области выступают либо шар, либо сферический слой, то будем находить потенциалы с помощью уравнений и свойств, которым они удовлетворяют.

В силу специфики рассматриваемых областей будем искать V_3, зависящий только от расстояния, т. е. $V_3 = V_3(r)$.

Пример 24. Вычислите объёмный потенциал для шара $|x| < R$ с плотностью $\rho = \sqrt{|x|}$.

▶ Попробуем искать решение задачи в виде $V = V(r)$. Воспользуемся свойствами объёмного потенциала:

1) $\Delta V_i(r) = -4\pi\sqrt{r} \iff \frac{1}{r^2}\,(r^2 V_i'(r))' = -4\pi\sqrt{r} \iff V_i(r) = -\frac{16}{35}\,\pi r^{\frac{5}{2}} - \frac{C}{r} + D$.

Так как $V_i = V_3(r)$, $r \leqslant R$, а $\rho \in C(G)$, то $V_3(r)$ принадлежит $C^1(\mathbb{R}^3)$. Поэтому $C = 0 \Rightarrow V_i(r) = -\frac{16}{35}\,\pi r^{\frac{5}{2}} + D$, $\Delta V_e(r) = 0 \iff V_e(r) = \frac{A}{r} + B$.

Так как $V_e = V_3(r)$, $r \geqslant R$, а $V_3(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)$, $r \to \infty$, то $B = 0 \Rightarrow V_e(r) = \frac{A}{r}$.

Теперь воспользуемся свойствами 2) – 3):

$$\begin{cases} 2)\ \ -\frac{16}{35}\,\pi R^{\frac{5}{2}} + D = \frac{A}{R}\,, \\ 3)\ \ -\frac{8}{7}\,\pi R^{\frac{3}{2}} = -\frac{A}{R^2} \iff A = \frac{8}{7}\,\pi R^{\frac{7}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{8}{7}\,\pi R^{\frac{7}{2}}, \\ D = \frac{56}{35}\,\pi R^{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_e(r) = \frac{8\pi}{7r}\,R^{\frac{7}{2}}, \quad V_i(r) = \frac{8\pi}{35}\left(7R^{\frac{5}{2}} - 2r^{\frac{5}{2}}\right).$$

Ответ. $\frac{8\pi}{35}\left(7R^{\frac{5}{2}} - 2r^{\frac{5}{2}}\right)$, $r \leqslant R$; $\frac{8\pi}{7r}\,R^{\frac{7}{2}}$, $r \geqslant R$. ◀

Можно решить более общую задачу.

Пример 25. Вычислить объёмный потенциал для шара $|x| < R$ с плотностью $\rho = \rho(|x|) \in C$.

▶ Попробуем искать решение задачи в виде $V = V(r)$.

Найдём сначала потенциал внутри шара:

$(r^2 V_i'(r))' = -4\pi r^2 \rho(r) \iff$

$$\Longleftrightarrow V_i'(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)d\xi + \frac{C_1}{r^2}\,.$$

Так как $V_i = V_3(r)$, $r \leqslant R$, а $\rho \in C(G)$, то $V_3(r)$ принадлежит $C^1(\mathbb{R}^3)$. Поэтому $C_1 = 0$ и

$$V_i(r) = -4\pi\int_0^r \left(\frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \xi^2\rho(\xi)d\xi\right)d\eta + C_2 =$$
$$= -4\pi\left(\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\left(\int_\xi^r \frac{1}{\eta^2}\,d\eta\right)d\xi\right) + C_2 =$$
$$= \frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^r \xi\rho(\xi)\,d\xi + C_2.$$

Теперь найдём потенциал вне шара:

$$\Delta V_e(r) = 0 \Longleftrightarrow \left(r^2 V_t'(r)\right)' = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow r^2 V_t'(r) = C_3 \Longleftrightarrow V_e(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4.$$

Так как $V_e = V_3(r)$, $r \geqslant R$, а $V_3(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)$, $r \to \infty$, то $C_4 = 0 \Rightarrow V_e(r) = -\frac{C_3}{r}$.

Теперь воспользуемся свойствами 2) – 3):

2) $$-\frac{C_3}{R} = \frac{4\pi}{R}\int_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^R \xi\rho(\xi)\,d\xi + C_2;$$

3) $$\frac{C_3}{R^2} = -\frac{4\pi}{R^2}\int_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi \Longleftrightarrow C_3 = -4\pi\int_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

a) $$V_e(r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi,$$

b) $$\frac{4\pi}{R}\int\limits_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{R}\int\limits_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int\limits_0^R \xi\rho(\xi)\,d\xi = C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi\int_0^R \xi\rho(\xi)\,d\xi = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_i = \frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^r \xi\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_0^R \xi\rho(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_r^R \xi\rho(\xi)\,d\xi.$$

Ответ. $\frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_r^R \xi\rho(\xi)\,d\xi$, $r \leqslant R$;
$\frac{4\pi}{r}\int_0^R \xi^2\rho(\xi)\,d\xi$, $r \geqslant R$. ◀

Пример 26. Для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ вычислить объёмный потенциал с плотностью $\rho = \rho(|x|) \in C$.

▶ Найдём решение в виде $V = V(r)$:

1) a) $R_1 < r < R_2$:

$$\frac{1}{r^2}\,(r^2V_i'(r))' = -4\pi\rho(r) \Longleftrightarrow (r^2V_i'(r))' = -4\pi r^2\rho(r) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow V_i'(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + \frac{C_1}{r^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow V_i(r) = -4\pi\int_0^r\left(\frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta \xi^2\rho(\xi)\,d\xi\right)d\eta - \frac{C_1}{r} + C_2 =$$

$$= -4\pi\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi\left(\int_\xi^r \frac{1}{\eta^2}\,d\eta\right) - \frac{C_1}{r} + C_2 =$$

$$= 4\pi\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\xi}\right) - \frac{C_1}{r} + C_2 =$$

$$= \frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^r \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{C_1}{r} + C_2 = V_i(r);$$

b) $r \geqslant R_2$: $\frac{1}{r^2}\left(r^2V_{e_1}'(r)\right)' = 0 \Longleftrightarrow V_{e_1}(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4 \Rightarrow$
$\Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow V_{e_1}(r) = -\frac{C_3}{r}$;

c) $r \leqslant R_1$: $\frac{1}{r^2}\,(r^2V_{e_2}'(r))' = 0 \Longleftrightarrow V_{e_2}(r) = -\frac{C_5}{r} + C_6 \Rightarrow$
$\Rightarrow C_5 = 0 \Rightarrow V_{e_2}(r) = C_6$.

Воспользуемся свойствами 2) – 3) на сферах $r = R_1$: и $r = R_2$.

На $r = R_1$:

2) $\frac{4\pi}{R_1}\int_0^{R_1} \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^{R_1} \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{C_1}{R_1} + C_2 = C_6$;

3) $-\frac{4\pi}{R_1^2}\int_0^{R_1} \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + \frac{C_1}{R_1^2} = 0 \Longleftrightarrow C_1 = 4\pi\int_0^{R_1} \xi^2\rho(\xi)\,d\xi \Rightarrow$

a) $V_i(r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,d\xi - 4\pi\int_0^r \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{r}\int_0^{R_1} \xi^2\rho(\xi)\,d\xi +$
$+ C_2 = -4\pi\int_0^r \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{r}\int_r^{R_1} \xi^2\rho(\xi)\,d\xi + C_2$;

b) $\frac{4\pi}{R_1}\int\limits_0^{R_1}\xi^2\rho\left(\xi\right)d\xi - 4\pi\int\limits_0^{R_1}\xi\rho\left(\xi\right)d\xi - \frac{4\pi\int\limits_0^{R_1}\xi^2\rho\left(\xi\right)d\xi}{R_1} + C_2 =$
$= C_6 \Longleftrightarrow\ - 4\pi\int\limits_0^{R_1}\xi\rho\left(\xi\right)d\xi + C_2 = C_6.$

На $r = R_2$:

2) $-4\pi\int_0^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{R_2}\int_{R_2}^{R_1}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + C_2 = -\frac{C_3}{R_2}$;

3) $-\frac{4\pi}{R_2^2}\int_0^{R_2}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + \frac{4\pi}{R_2^2}\int_0^{R_1}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi = \frac{C_3}{R_2^2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -4\pi\int_{R_1}^{R_2}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi = C_3.$

Сразу находим $V_{e_1} = \frac{4\pi}{r}\int_{R_1}^{R_2}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi$.

Затем найдём C_2 и V_i:

$$-4\pi\int_0^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{R_2}\int_{R_2}^{R_1}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + C_2 =$$
$$= \frac{4\pi}{R_2}\int_{R_1}^{R_2}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi \Longleftrightarrow C_2 = 4\pi\int_0^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_i(r) = -4\pi\int\limits_0^{r}\xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{4\pi}{r}\int\limits_r^{R_1}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int\limits_0^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi =$$
$$= \frac{4\pi}{r}\int_{R_1}^{r}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_r^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi.$$

Теперь можно найти C_6 и V_{e_2}:

$$-4\pi\int_0^{R_1}\xi\rho(\xi)\,d\xi + C_2 = C_6 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\ - 4\pi\int_0^{R_1}\xi\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_0^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi = C_6 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow V_{e_2} = 4\pi\int_{R_1}^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi,$$
$$\frac{4\pi}{r}\int_{R_1}^{r}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_r^{R_2}\xi\rho(\xi)\,d\xi = V_i(r).$$

Ответ. $4\pi \int_{R_1}^{R_2} \xi\rho(\xi)\, d\xi, \quad r \leqslant R_1; \quad \frac{4\pi}{r} \int_{R_1}^{r} \xi^2\rho(\xi)\, d\xi +$ $+ 4\pi \int_{r}^{R_2} \xi\rho(\xi)\, d\xi$, $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; $\frac{4\pi}{r} \int_{R_1}^{R_2} \xi^2\rho(\xi)\, d\xi$, $r \geqslant R_2$. ◄

8.2. Потенциал простого слоя в $\mathbb{R}^3$

Пусть S — ограниченная кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность с выбранным направлением нормали $\mathbf{n}$ к ней, а μ — непрерывная функция на S. Ньютонов потенциал $V^0 = \frac{1}{|x|} * \mu\delta_S$ называется потенциалом простого слоя, выражается интегралом

$$V^0(x) = \int_S \frac{\mu(\xi)\, ds}{|x-\xi|}$$

и является локально абсолютно интегрируемой функцией в $\mathbb{R}^3$.

При этом потенциал простого слоя

1) удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta V^0 = -4\pi\mu\delta_S$, является гармонической функцией вне поверхности S, т.е.

$$\Delta V_i^0(x) = 0, \quad \Delta V_e^0(x) = 0, \quad V_e^0(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \to \infty;$$

2) является непрерывной функцией во всём пространстве, т.е. $V^0(x) \in C(\mathbb{R}^3)$;

3) производная по внешней нормали терпит разрыв, если S — поверхность Ляпунова:

$$\frac{\partial}{\partial n} V_e^0\bigg|_S - \frac{\partial}{\partial n} V_i^0\bigg|_S = -4\pi\mu(x).$$

Пример 27. Для сферы радиуса R вычислить потенциал простого слоя с плотностью $\mu = \mathrm{const}$.

► Решение будем искать в виде $V^0 = V^0(r)$.

Найдём потенциал внутри сферы:

$$\Delta V_i^0(r) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{r^2}\left(r^2(V_i^0(r))'\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (V_i^0(r))' = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow C_1 = 0, \quad V_i^0(r) = C_2.$$

Теперь найдём потенциал вне сферы:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2(V_e^0(r))'\right)' = 0 \Longleftrightarrow (V_e^0(r))' = \frac{C_1}{r^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow V_e^0(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_e^0(r) = -\frac{C_1}{r}\,.$$

Воспользуемся свойствами 2) – 3):

2) $C_2 = -\frac{C_1}{R}$,

3) $\frac{C_1}{R^2} - 0 = -4\pi\mu \Longleftrightarrow C_1 = -4\pi\mu R^2 \Rightarrow$

а) $V_e^0(r) = \frac{4\pi\mu R^2}{r}$;

б) $C_2 = 4\pi\mu R \Rightarrow V_i^0(r) = 4\pi\mu R.$

Ответ. $4\pi\mu R$, $r \leqslant R$; $\frac{4\pi\mu R^2}{r}$, $r \geqslant R$. ◀

8.3. Потенциал двойного слоя в $\mathbb{R}^3$

Пусть S — ограниченная кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность с выбранным направлением нормали $\mathbf{n}$ к ней, а ν — непрерывная функция на S. Ньютонов потенциал $V^1 = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}\mu\delta_S$ называется *потенциалом двойного слоя*, выражается интегралом

$$V^1(x) = \int_S \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{|x-\xi|}\,ds$$

и является локально абсолютно интегрируемой функцией в $\mathbb{R}^3$. При этом потенциал двойного слоя

1) удовлетворяет уравнению $\Delta V^1 = -4\pi\frac{\partial}{\partial n}\mu\delta_S$, является гармонической функцией вне поверхности S:

$$\Delta V_i^1(x) = 0, \quad \Delta V_e^1(x) = 0, \quad V^1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}^{2}\right), \quad |x| \to \infty;$$

2) потенциал при переходе через поверхность Ляпунова терпит разрыв $V_e^1(x)|_S - V_i^1(x)|_S = 4\pi\nu(x)$, при этом

$$V_e^1(x)|_S = 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{|x-\xi|}\,ds,$$

$$V_i^1(x)|_S = -2\pi\nu(x) + \int_S \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{|x-\xi|}\,ds,$$

где $V_i^1(x)|_S$ — предельное значение $V_i^1(x)$, когда x стремится к границе изнутри, $V_e^1(x)|_S$ — предельное значение $V_e^1(x)$, когда x стремится к границе извне.

Преобразуем подынтегральное выражение. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-\xi|} = \left(\nabla\frac{1}{|x-\xi|}, n\right) = \\ = \left(\nabla\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_2)^2}}, n\right) = \\ = \left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}, n\right) = \frac{\cos(x-\xi, n)}{|x-\xi|^2} = \frac{\cos\varphi_{x\xi}}{|x-\xi|^2}\,.$$

Теперь потенциал двойного слоя можно записать в виде

$$V^1(x) = \int_S \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2}\,,$$

где $\cos\varphi_{x\xi}$ — косинус угла между вектором $x-\xi$ и внешней нормалью.

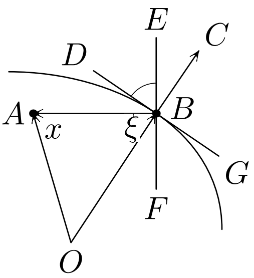

Рис. 5

Замечательно то, что на самом деле можно представить потенциал двойного слоя ещё в одном виде, который даст возможность решить следующую задачу устно.

Рассмотрим $V_i^1(x)$. Пусть $\overline{BC}$ — внешняя нормаль, DG — касательная, $EF \perp AB$, $\angle DBE = \pi - \varphi_{x\xi}$. Поэтому $\dfrac{ds\cos(\pi-\varphi_{x\xi})}{|x-\xi|^2} = d\omega = -\dfrac{ds\cos\varphi_{x\xi}}{|x-\xi|^2}$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, под которым из точки x виден элемент поверхности.

Отсюда следует, что

$$V_i^1(x) = \int_S \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}ds}{|x-\xi|^2} = -\int_S \nu(\xi)\,d\omega.$$

Пример 28. Найдите потенциал двойного слоя с постоянной плотностью ν_0 на сфере $|x| = R$.

► Воспользуемся последней формулой потенциала двойного слоя. $V_i^1(x) = -\nu_0\int_S d\omega$. На рис. 6–8 видно, что $V^1(x)|_{|x|<R} =$

$= -4\pi\nu_0$, $V^1(x)|_{|x|>R} = 0$ — одна сторона поверхности видна под одним углом, заключённым в касательном конусе, а другая — под тем же углом, но видна другая сторона поверхности, $V^1(x)|_{|x|=R} = -2\pi\nu_0$.

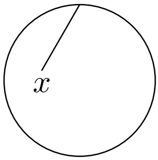

Рис. 6

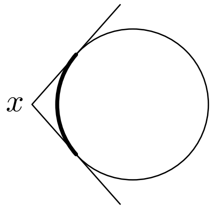

Рис. 7

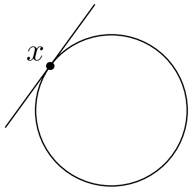

Рис. 8

П р и м е ч а н и е. Опыт показывает, что некоторым учащимся значение $V^1(x)|_{|x|=R} = -2\pi\nu_0$ кажется неочевидным. Тогда его можно найти из соотношения

$$V_i^1(x)|_S = -2\pi\nu(x) + \int_S \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{|x-\xi|}\;ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{|x-\xi|}\;ds = -4\pi\nu_0 + 2\pi\nu_0 = -2\pi\nu_0.$$

Ответ. $V^1(x)|_{|x|<R} = -4\pi\nu_0$, $V^1(x)|_{|x|>R} = 0$, $V^1(x)|_{|x|=R} = -2\pi\nu_0$. ◀

Пример 29. Решите задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = u_0(x), \ u_0(x) \in C(x, |x| = R) \end{cases}$$

с помощью суммы потенциалов простого и двойного слоёв.

► Пусть $u(x) = V_i^0(x) + V_i^1(x) = \int\limits_{|\xi|=R} \frac{\mu(\xi)\,ds}{|x-\xi|} + \int\limits_{|\xi|=R} \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2}$, $|x| < R$, где $\mu(\xi), \nu(\xi)$ — искомые функции. Так как внутри шара $\Delta V_i^0(x) = 0$, $\Delta V_i^1(x) = 0$, то $\Delta u = 0$, $|x| < R$. Осталось удовлетворить краевому условию.

Потенциал простого слоя непрерывен во всём пространстве R^3, поэтому $V_i^0(x)|_{|x|=R} = \int_{|\xi|=R} \frac{\mu(\xi)\,ds}{|x-\xi|}$, $|x| = R$, где $V_i^0(x)|_{|x|=R}$ — предельное значение $V_i^0(x)$, когда x стремится к границе изнутри шара.

С потенциалом двойного слоя сложнее — предельные значения изнутри и извне разные, притом значение на самой поверхности имеет третье значение:

$$V_i^1(x)|_{|x|=R} = -2\pi\nu(x) + \int_{|\xi|=R} \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2}\,, \quad |x| = R,$$

где $V_i^1(x)|_{|x|=R}$ — предельное значение $V_i^1(x)$, когда x стремится к границе изнутри шара, а $\int_{|\xi|=R} \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2}$ — значение потенциала двойного слоя на самой поверхности.

Итак,

$$u_0(x) = \int_{|\xi|=R} \frac{\mu(\xi)\,ds}{|x-\xi|} + \left(-2\pi\nu(x) + \int_{|\xi|=R} \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2}\right), \quad |x| = R.$$

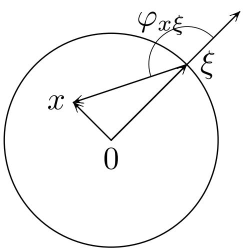

Рис. 9

Заметим, что $x^2 = R^2 + |x-\xi|^2 + 2R|x-\xi|\cos\varphi_{x\xi} \iff \cos\varphi_{x\xi} = \frac{x^2 - R^2 - |x-\xi|^2}{2R|x-\xi|}$ (см. рис. 9), откуда следует, что если x на окружности, то $\cos\varphi_{x\xi} = -\frac{|x-\xi|}{2R}$. Подставим это значение:

$$\int\limits_{|\xi|=R} \nu(\xi)\,\frac{\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{|x-\xi|^2} = -\int\limits_{|\xi|=R} \frac{\nu(\xi)\,ds}{2R|x-\xi|}\,.$$

Тогда

$$u_0(x) = \int_{|\xi|=R} \frac{\mu(\xi)\,ds}{|x-\xi|} + \left(-2\pi\nu(x) - \int_{|\xi|=R} \frac{\nu(\xi)\,ds}{2R|x-\xi|^2}\right) \iff$$

$$\iff u_0(x) + 2\pi\nu(x) = \int_{|\xi|=R} \frac{\left(\mu(\xi) - \frac{\nu(\xi)}{2R}\right)ds}{|x-\xi|}\,, \quad |x| = R.$$

Выберем $\mu(\xi), \nu(\xi)$ так, чтобы краевое условие выполнилось:

$$\begin{cases} u_0(x) + 2\pi\nu(x) = 0, \\ \mu(\xi) - \frac{\nu(\xi)}{2R} = 0 \end{cases} \iff \nu(x) = -\frac{u_0(x)}{2\pi}\,, \quad \mu(x) = -\frac{u_0(x)}{4\pi R}\,.$$

Подставим полученные плотности простого и двойного слоёв:

$$u(x) = -\int_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)\,ds}{4\pi R|x-\xi|} - \int_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)\cos\varphi_{x\xi}\,ds}{2\pi|x-\xi|^2}\,, \quad |x|<R.$$

Теперь подставим найденное выражение для $\cos\varphi_{x\xi}$:

$$\cos\varphi_{x\xi} = \frac{x^2 - R^2 - |x-\xi|^2}{2R|x-\xi|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = -\int\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)\,ds}{4\pi R|x-\xi|} - \int\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)(x^2 - R^2 - |x-\xi|^2)\,ds}{4\pi R|x-\xi|^3} =$$

$$= \int_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)(R^2 - x^2)\,ds}{4\pi R|x-\xi|^3}\,, \quad |x|<R.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле, других решений нет.

Обратите внимание, что ответ показывает, что с формулами потенциала надо работать «осторожно»: хотя мы и имеем, что

$$u(x) = (R^2 - x^2)\int_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)}{4\pi R|x-\xi|^3\,ds}\,,$$

но $u(x)|_{R^2-x^2} \neq 0$, а $u(x)|_{R^2-x^2} = u_0$.

Ответ. $(R^2 - x^2)\int_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)\,ds}{4\pi R|x-\xi|^3}$, $|x|<R$. ◀

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
2. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.
3. *Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2004.

Учебное издание

Методы решения основных задач уравнений математической физики

Учебное пособие
по курсу *Уравнения математической физики*

Составитель **Колесникова Софья Ильинична**

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *Л.В. Себова*

Подписано в печать ??.??.2015. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 2,5.
Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 500 экз. Заказ № ??.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–58–22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–84–30, e-mail: polygraph@mipt.ru