Методическое пособие по теме "Неопределенный интеграл"

Головко А.Ю.

Введение

В настоящем пособии в компактной форме изложены основные методы нахождения неопределенных интегралов. Сборник состоит из пяти параграфов.

В первом параграфе введены основные свойства и список табличных интегралов, также рассмотрены основные методы интегрирования: метод алгебраических преобразований для приведения к табличным интегралам, метод замены переменных, метод интегрирования по частям. Приведены задачи, которые решаются комбинированными методами и методом сведения к уравнению относительно интеграла.

Второй параграф посвящен интегрированию рациональных функций. В нем рассмотрен метод неопределенных коэффициентов и метод Остроградского. Эти методы позволяют свести интегралы от рациональных функций к табличным интегралам.

В третьем параграфе рассмотрены интегралы от тригонометрических и гиперболических функций: с помощью замен мы будем сводить эти интегралы к интегралам от рациональных функций (или табличным интегралам).

Четвертый параграф посвящен интегралам от иррациональных функций определенных видов, сводящимся к интегралам от рациональных и тригонометрических функций (или табличным интегралам).

В пятом параграфе приведены задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы, в том числе задачи с письменных экзаменационных работ по курсу "Введение в математический анализ". Большое количество аналогичных задач можно также найти, например, в [1].

Данное пособие соответствует программе семинарских занятий для студентов первого курса МФТИ по теме "Неопределенный интеграл". Большинство разобранных задач взяты из сборника задач [1]. Автор благодарит Иванову С.В. за обсуждение данного пособия и ряд полезных замечаний.

Все замеченные ошибки и неточности просьба присылать по эл. адресу andrewgolovko@yandex.ru.

§1. Неопределенный интеграл: определение, основные свойства и методы интегрирования

Введем вначале основные понятия: первообразная и неопределенный интеграл. Их можно найти в [2] — [6].

Определение. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и на $\langle a; b\rangle$[1] заданы функции f и F. Тогда функция F называется первообразной функции f, если при всех $x \in \langle a; b\rangle$ $F'(x) = f(x)$. При этом в случае $a \in \langle a; b\rangle$, $b \in \langle a; b\rangle$ производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как соответствующие односторонние.

Определение. Совокупность всех первообразных функции f называют неопределенным интегралом функции f и обозначают $\int f(x)dx$.[2]

Структуру множества первообразных описывает следствие теоремы Лагранжа.

Утверждение. Пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции f. Тогда $F_2(x) - F_1(x) = C$, где C — константа.

Таким образом, неопределенный интеграл является совокупностью всех функции, отличающихся на константу от фиксированной первообразной (если первообразная существует).

Отметим свойство *линейности* неопределенного интеграла.

Утверждение. Если функции f и g имеют первообразные на $\langle a; b\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то на $\langle a; b\rangle$ существует $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ и верно равенство

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Составим таблицу неопределенных интегралов, которую легко получить из таблицы производных.

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$, $x > 0$.

2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, в частности $\int e^x dx = e^x + C$.

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$; $x \neq 0$, $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x + a| + C$, $x \neq -a$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$; $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$; $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, $x \neq 0$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C = -\arccos \frac{x}{|a|} + C$, $|x| < |a|$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$, $x^2 > -a$.

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

[1] $\langle a; b\rangle$ — промежуток, т. е. либо отрезок $[a; b]$, либо полуинтервал $[a; b)$, либо полуинтервал $(a; b]$, либо интервал $(a; b)$.

[2] Иногда неопределенный интеграл определяют как одну фиксированную первообразную (см. §9.1, [2]).

9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $x \neq \pm a$, $a \neq 0$.

Интегралы 1-5 сразу находятся из таблицы производных. Для доказательства равенства интегралов 6-8 тому, что написано в правых частях, достаточно вычислить производные правых частей. Интеграл 9 можно найти следующим образом:

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Замечание. В интеграле 6 одной и той же первообразной, записанной в виде $\arcsin\frac{x}{|a|} + C$ и $-\arccos\frac{x}{|a|} + C$, соответствуют различные константы ($\arcsin\frac{x}{|a|} = -\arccos\frac{x}{|a|} + \frac{\pi}{2}$). Тоже самое касается и интеграла 8.

Проллюстрируем на примерах общие методы интегрирования (которые сводят интегралы к табличным): метод алгебраических преобразований для приведения к табличным интегралам (в том числе использование линейности, понижение степени тригонометрических и гиперболических функций), метод замены переменных, метод интегрирования по частям, сведение к уравнению относительно интеграла (задача 1.11).

1. Метод преобразований для приведения к табличным интегралам.

Задача 1.1 Найти интеграл $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$.

Замечание. В последней задаче мы использовали линейность неопределенного интеграла.

Задача 1.2. Найти интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Решение.

Для вычисления данного интеграла целесообразно понизить степень синуса, для чего можно воспользоваться формулой косинуса двойного угла: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,

$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Замечание. В последней задаче мы понизили степень тригонометрической функции (аналогичным образом можно проинтегрировать функции $\cos^2 x$, $\sin^3 x$ и т. п.).

Задача 1.3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+7}$.

Решение.

Для того, чтобы свести данный интеграл к табличному, вынесем из знаменателя двойку:

$\int \frac{dx}{2x^2+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7/2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + C$.

2. Метод замены переменных.

Теорема. Пусть функция f имеет первообразную на $\langle a; b\rangle$, функция φ: $\langle \alpha; \beta\rangle \to \langle a; b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha; \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha; \beta\rangle$ существует $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ и верно равенство

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Замечание. После замены в неопределенном интеграле переменную интегрирования можно считать независимой переменной.

Замечание. В некоторых задачах мы будем делать замену "в обратную сторону"(при переходе от переменной интегрирования t к переменной интегрирования x использовать замену $t = \psi(x)$).

Задача 1.4. Найти интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$.

Решение.

Так как x^2 с точностью до постоянного множителя является производной подкоренного выражения, используем замену $t = x^3+1$. Тогда $dt = 3x^2dx$ и

$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Задача 1.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

Решение.

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$I = \int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}.$

С помощью замены $x - \frac{5}{4} = t$ (при этом $dx = dt$) сводим интеграл к табличному:

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{31}/4\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{31}}\mathrm{arctg}\frac{4t}{\sqrt{31}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\mathrm{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.$

Задача 1.6. Найти интеграл $\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx$.

Решение.

Представим числитель в виде линейной комбиниции производной знаменателя и константы:

$$x - 1 = \alpha(2x-1) + C = \frac{1}{2}(2x-1) + C = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2},$$

т.е. мы подбираем α, уравнивая коэффициенты при x, а потом находим C, уравнивая коэффициенты при x^0 (константы).

Таким образом,

$\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

Замечание. Этот способ применим для нахождения интегралов вида $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ при $D = p^2 - 4q < 0$, что будет использоваться в §2.

Задача 1.7. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}dx$.

Решение.

Вначале используем замену $\sin x = t$ (при этом $\cos x dx = dt$), что позволит *убрать из подынтегральной функции тригонометрические функции*:

$I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}.$

Для того, чтобы *избавиться от иррациональности*, сделаем замену $u = \sqrt{e^t-1}$. При этом $e^t = u^2+1$, $e^t dt = 2udu$ и исходный интеграл

$I = \int \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \int \frac{2udu}{u(u^2+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\, u + C = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^t-1} + C = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1} + C.$

3. Метод интегрирования по частям.

Теорема. Пусть на некотором промежутке функции u и v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)dx$. Тогда на этом промежутке существует $\int u(x)v'(x)dx$ и верно равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

а) Интегралы вида $\int P_n(x)f(x)dx$, где P_n — многочлен, а f равна $\sin ax$, $\cos ax$, a^x, $\operatorname{sh} ax$, или $\operatorname{ch} ax$.

Задача 1.8. Найти интеграл $\int x \operatorname{sh} x dx$.

Решение.

Используем метод интегрирования по частям: $u(x) = x$, $v(x) = \operatorname{ch} x$ (*выбираем наиболее простую первообразную* функции $\operatorname{sh} x$).

$\int x \operatorname{sh} x dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$.

Если вместо x в подынтегральной функции стоял бы многочлен произвольной степени n, то мы смогли бы найти интеграл, используя метод интегрирования по частям несколько раз. При этом на каждом шаге степень многочлена в подынтегральной функции уменьшалась бы на один, и через n шагов мы бы пришли к табличному интегралу. Аналогично мы можем найти интегралы от функции, являющейся произведением многочлена и одной из функций $\sin ax$, $\cos ax$, a^x, $\operatorname{sh} ax$, $\operatorname{ch} ax$. Решим такую задачу.

Задача 1.9. Найти интеграл $\int (x^2 + x) \sin 2x dx$.

Решение.

Будем находить интеграл, дважды используя метод интегрирования по частям. Для этого в качестве функции u берем многочлен подынтегральной функции:

$\int (x^2+x) \sin 2x dx = (x^2+x)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int (2x+1)\cos 2x dx = -(x^2+x)\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x - \int \sin 2x dx\right) = -(x^2+x)\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}(2x+1)\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + C$.

б) Интегралы вида $\int P_n(x)f(x)dx$, где P_n — многочлен, а f — функция, которую сложно проинтегрировать, но легко продифференцировать (например, обратная тригонометрическая функция или логарифм (возможно, от сложного аргумента)).

Задача 1.10. Найти интеграл $\int x^2 \arcsin x dx$.

Решение.

Функцию арксинус сложно проинтегрировать, но ее производная является табличной, поэтому используем метод интегрирования по частям с $u(x) = \arcsin x$, $v'(x) = x^2$. Пусть $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда получаем, что исходный интеграл

$I = \int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

В последнем интеграле удобно использовать замену $x^2 = t$, которая упростит подынтегральную функцию. При этом $2xdx = dt$ и

$I_1 = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t}}$.

Для того чтобы избавиться от иррациональности, используем замену $\sqrt{1-t} = u$. При этом $1 - t = u^2$, $-dt = 2udu$, то есть

$I_1 = -\int (1-u^2)du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{1-t} + C = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{1-x^2} + C$.

Таким образом, исходный интеграл

$I = \arcsin x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C$.

в) Интегралы вида $\int a^x\{\sin bx; \cos bx\}dx$, $\int a^x\{\operatorname{sh} bx;\ \operatorname{ch} bx\}dx$,
$\int\{\sin ax; \cos ax\}\{\operatorname{sh} bx;\ \operatorname{ch} bx\}dx$.

Задача 1.11. Найти интеграл $\int a^x \sin bx dx$, при $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$.

Решение.

Используем метод интегрирования по частям два раза, беря в качестве функции v степень, а в качестве функции u тригонометрическую функцию:

$\int a^x \sin bx dx = \frac{a^x \sin bx}{\ln a} - \frac{b}{\ln a} \int a^x \cos bx dx = \frac{a^x \sin bx}{\ln a} - \frac{b}{\ln a} \left(\frac{a^x \cos bx}{\ln a} + \frac{b}{\ln a} \int a^x \sin bx dx \right) = \frac{a^x \sin bx}{\ln a} - \frac{b\, a^x \cos bx}{\ln^2 a} - \frac{b^2}{\ln^2 a} \int a^x \sin bx dx.$

Мы получаем уравнение относительно $\int a^x \sin bx dx$. Для того, чтобы его решить, перенесем в левую часть слагаемое $\frac{b^2}{\ln^2 a} \int a^x \sin bx dx$. При этом в правой части появится константа (так если в левой части зафиксировать первообразную, то в правой части вместо интеграла будет тоже первообразная (возможно, отличающаяся от первообразной в левой части на константу), а все первообразные отличаются от зафиксированной первообразной на константу).

$\left(1 + \frac{b^2}{\ln^2 a}\right) \int a^x \cos bx dx = \frac{a^x \sin bx}{\ln a} - \frac{b\, a^x \cos bx}{\ln^2 a} + C.$

Разделив последнее равенство на $\left(1 + \frac{b^2}{\ln^2 a}\right)$ (константу C в силу произвольности можно не делить), получаем ответ:

$\int a^x \cos bx dx = \frac{\ln a\, a^x \sin bx - b\, a^x \cos bx}{\ln^2 a + b^2} + C$

Замечание. В последней задаче мы использовали *метод составления уравнения относительно интеграла.*

4. Комбинированые методы.

Следующие две задачи допускают различные решения. В таких задачах важно выбрать наиболее простой способ решения.

Задача 1.12. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$.

Решение, 1 способ.

Используем метод интегрирования по частям, взяв $u(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $v'(x) = 1$, $v(x) = x$. Тогда $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$ (случай б)), а исходный интеграл

$I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}.$

Сделав в последнем интеграле замену $t = \sqrt{x}$ (при этом $2tdt = dx$), получаем:

$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1} = \int \frac{2t^2 dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

Таким образом, исходный интеграл

$I = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

Решение, 2 способ.

Сделаем замену $t = \sqrt{x}$ (при этом $2tdt = dx$), что позволит нам избавиться от иррациональности:

$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx = 2\int t \operatorname{arctg} t dt.$

Используем метод интегрирования по частям, взяв $u(t) = \operatorname{arctg} t$, $v'(t) = t$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$. Тогда $u'(t) = \frac{1}{t^2+1}$ (случай б)), а исходный интеграл равен

$2\int t \operatorname{arctg} t dt = t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = t^2 \operatorname{arctg} t - \int dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt = t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + C = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

Задача 1.13. Найти интеграл $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение, 1 способ.

Используем метод интегрирования по частям, взяв $u(x) = \arcsin x$, $v'(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $v(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (аналог случая б)). Тогда $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а

$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

Решение, 2 способ.

Сделаем замену $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ (так как $\cos t \geqslant 0$), а исходный интеграл

$I = -\int \frac{t \sin t}{\cos^2 t} dt.$

Используем метод интегрирования по частям, взяв $u(t) = t$, $v'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$, $v(t) = \frac{1}{\cos t}$. Тогда $u'(t) = 1$ (аналог случая а)), а

$I = -\frac{t}{\cos t} + \int \frac{dt}{\cos t}.$

Сделав в последнем интеграле обратную замену, находим

$I = -\frac{\arcsin x}{\cos(\arcsin x)} + \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

§2. Интегрирование рациональных функций

Теоретической основой интегрирования рациональных функций являются следующие утверждения.

Утверждение. Любой многочлен Q (с действительными коэффициентами) можно разложить на неприводимые множители (неприводимыми многочленами являются многочлены первой степени и квадратные трехчлены без корней):

$$Q(x) = a(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

где $D_i = p_i^2 - 4q_i < 0$ при $i = \overline{1,t}$.

Замечание. Многочлен x^4+1 не является неприводимым. Он раскладывается на неприводимые множители следующим образом: $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$.

Утверждение. Пусть Q — многочлен из предыдущего утверждения, P — многочлен, степень которого ниже степени многочлена Q. Тогда рациональную функцию $\frac{P}{Q}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{s1}}{x-a_s} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{t1}x+C_{t1}}{x^2+p_tx+q_t} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}.$$

Отметим, что в каждом слагаемом степень многочлена в числителе на 1 меньше степени *неприводимого многочлена в знаменателе*, а знаменатели — это неприводимые многочлены в степенях, не превышающих их степень в исходной рациональной функции.

Пример.
$\frac{2x+7}{(x-2)^3(x+1)(x^2-2x+2)^2(x^2+3x+10)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-2x+2} + \frac{Gx+H}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{Ix+K}{x^2+3x+10}$.

Рациональную функцию (частное двух многочленов) называют правильной, если степень числителя ниже степени знаменателя. В противном случае рациональную функцию называют неправильной. Если рациональная функция является неправильной, то числитель можно поделить на знаменатель с остатком, в результате чего рациональная функция будет представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции. Так как интеграл от многочлена является табличным, а интеграл суммы равен сумме интегралов, то все сводится к интегрированию дробей $\frac{A}{(x-a)}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$ (где $n \geqslant 2$), $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ (где $p^2-4q<0$), $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ (где $p^2-4q<0$, $n \geqslant 2$), которые называют *элементарными дробями*. Интеграл от первых трех элементарных дробей легко найти:

$\int \frac{A}{(x-a)} dx = A\ln|x-a| + C$;

$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -A\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$;

$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + \tilde{C}$ (в задаче 1.6 мы проделали эти выкладки для частного случая).

Замечание. Рекомендуется проделывать соответствующие выкладки в каждой задаче, а не запоминать последнюю формулу.

Алгоритм нахождения интеграла от четвертой элементарной дроби можно найти, например, в [2], §9.6.

Опишем основные методы нахождения интеграла от рациональной функции.

1. Метод неопределенных коэффициентов.

Алгоритм нахождения интеграла следующий:

1) если степень числителя не ниже степени знаманателя, то представляем ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции;

2) раскладываем знаменатель в произведение неприводимых многочленов;

3) представляем правильную рациональную функцию в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами;

4) находим интеграл от каждой элементарной дроби (и многочлена), складываем найденные интегралы.

Замечание. Количество неопределенных коэффициентов равно степени многочлена знаменателя. Это служит приемом проверки правильности представления.

Замечание. В случае кратных множителей (особенно квадратичных) удобнее использовать метод Остроградского, который будет описан позже.

Замечание. Подчеркнем, что значение интеграла от рациональной функции содержит только *рациональные функции и арктангенсы.*

Задача 2.1. Найти интеграл $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

Решение.

Так как степень числителя равна степени знаменателя, выносим единицу (что эквивалентно делению числителя на знаменатель):
$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{(x-2)(x-3)}$.

Представляем второе слагаемое в виде суммы элементарных дробей:
$\frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$.

Таким образом, $3 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - 3A - 2B$.

Приравнивая коэффициенты при x^1 и x^0 в правой и левой части, получаем систему:

$$\begin{array}{ll} x^1: & 0 = A + B, \\ x^0: & 3 = -3A - 2B, \end{array}$$

решая которую находим $A = -3$, $B = 3$.

Таким образом,
$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = \int dx - 3\int \frac{1}{x-2}dx + 3\int \frac{1}{x-3}dx = x - 3\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$.

Задача 2.2. Найти интеграл $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$.

Решение.

Так как рациональная функция является правильной, то ее можно представить в виде суммы элементарных дробей. Для этого вначале надо разложить знаменатель на множители, для чего находим корень знаменателя. Так $x = 1$ является корнем знаменателя, то по теореме Безу знаменатель делится на $x-1$. Разделив знаменатель на $x-1$, получаем:

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

Таким образом,

$\frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-2)}{x^3-x^2-4x+4}$, то есть $5x - 14 = A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)$.

Подставляя в последнее равенство $x = 1$, получаем, что $A = 3$, подставляя $x = 2$, получаем, что $B = -1$, подставляя $x = -2$, получаем, что $C = -2$ (вместо этого можно было раскрыть скобки и решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными). Теперь найдем исходный интеграл:

$\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x+2} = 3\ln|x-1| - \ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right| + C$.

Замечание. Отметим, что есть два основных способа нахождения неопределенных коэффициентов:

1) решение системы, получаемой *приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях* (используется равенство коэффициентов при всех степенях у равных многочленов);

2) *подстановка корней знаменателя* в числитель (используется равенство значений при всех x у равных многочленов) .

В некоторых задачах удобно использовать оба метода.

Задача 2.3. Найти интеграл $\int \frac{3x^2+3x-2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$.

Решение.

Подынтегральную функцию представляем в виде суммы элементарных дробей:

$\frac{3x^2+3x-2}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

Таким образом,

$3x^2 + 3x - 2 = A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x + 1)$.

Подставив в последнее равенство $x = -1$, получаем, что $A = -2$; приравнивая в нем коэффициенты при x^2, получаем, что $3 = A + B$, откуда $B = 5$, а при x^0 (это эквивалентно подстановке нуля), получаем, что $-2 = 2A + C$, откуда $C = 2$. Теперь найдем исходный интеграл:

$\int \frac{3x^2+3x-2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx = -2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{5x+2}{x^2+2x+2}dx = -2\ln|x+1| + \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = -2\ln|x+1| + \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} - 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = -2\ln|x+1| + \frac{5}{2}\ln|x^2 + 2x + 2| - 3\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$.

Задача 2.4. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}dx$.

Решение.

Раскладываем на множители знаменатель подынтегральной функции:

$(x + 1)(x^3 + 1) = (x + 1)^2(x - x + 1)$.

Таким образом,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

откуда получаем, что

$x^2 = A(x+1)(x^2-x+1) + B(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+1)$.

Приравнивая коэффициенты при всех степенях, получаем систему (последнее равенство можно было не писать, раскрывая скобки сразу в исходном уравнении):

$$\begin{array}{ll} x^3: & 0 = A + C, \\ x^2: & 1 = B + 2C + D, \\ x^1: & 0 = -B + C + 2D, \\ x^0: & 0 = A + B + D, \end{array}$$

решая которую находим $A = -\frac{1}{3}$, $B = C = \frac{1}{3}$, $D = 0$.

Таким образом,

$\int \frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

2. Метод Остроградского (обобщенный)

Если в разложении знаменателя рациональной дроби на линейные и квадратные множители без корней несколько кратных множителей (особенно квадратичных), то метод неопределенных коэффициентов приводит к очень длинным выкладкам. В этом случае можно воспользоваться (обобщенной) формулой Остроградского, которая справедлива для любой правильной рациональной функции:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \ldots \frac{A_s}{x-a_s} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots \frac{B_tx+C_t}{x^2+p_tx+q_t}\right)dx,$$

где P и Q — многочлены из утверждения в начале параграфа, Q_1 — многочлен с теме же неприводимыми множителями, что и Q, только в степенях, на единицу меньших, P_1 — многочлен, степень которого ниже степени многочлена Q_1. Для отыскание неопределнных коэффициентов (в многочлене P_1 и в слагаемых второго интеграла), следует продифференцировать обе части формулы Остроградского.

Замечание. Также как и в первом методе, количество неизвестных коэффициентов равно степени знаменателя.

Замечание. Общий метод Остроградского можно найти, например, в [1] (§2).

Задача 2.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

По формуле Остроградского

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}dx.$

Продифференцировав последнее равенство, получаем:

$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)-2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$

Таким образом,

$1 = A(x^2+1) - 2x(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+1) = Cx^3 + (A - 2A + D)x^2 + (-2B+C)x + A + D.$

Приравнивая коэффициенты при всех степенях, получаем систему:

$$\begin{array}{ll} x^3: & 0 = C \\ x^2: & 0 = -A + D, \\ x^1: & 0 = -2B + C, \\ x^0: & 1 = A + D, \end{array}$$

решая которую находим $B = C = 0$, $A = D = \frac{1}{2}$.

Таким образом,
$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \mathrm{arctg}\, x + C.$

§3. Интегрирование тригонометричеких и гиперболических функций

В этом параграфе основное внимание будет уделено интегрированию тригонометрических функций. Гиперболические функции интегрируются аналогичными методами.

Замечание. Для преобразования выражений с гиперболическими функциями удобно использовать формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}^2 x = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1); \qquad \operatorname{sh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);$$

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y);$$

$$2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y);$$

$$2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y).$$

В предыдущем параграфе был приведен метод интегрирование рациональных функций. Иногда интегралы от тригонометрических и гиперболических функций с помощью замены можно свести к интегралам от рациональных функций (или табличным интегралам), после чего можно использовать методы предыдущего параграфа.

Рассмотрим интегралы следующего вида:

$$\int R(\sin x; \cos x)dx, \tag{1}$$

где $R(x; y)$ — рациональная функция двух переменных.

В следующих случаях удобно использовать замены:

1) если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то $t = \cos x$;

2) если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то $t = \sin x$;

3) если $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то $t = \operatorname{tg} x$.

Замечание. Замены 1) и 2) обычно приводят к более коротким выкладкам, чем замена 3).

Замечание. Замены 1) и 2) легко запомнить следующим образом: если одна из тригонометрических функций ($\sin x$ или $\cos x$) входит в рациональную функцию только в нечетной степени, то другую следует заменить на t.

Интегралы (1) всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью замены $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (*универсальной тригонометрической подстановки*), так как при этом

$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{t^2+1}{2}dx.$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому прибегать к ней следует только тогда, когда не видно других путей к вычислению интеграла.

Замечание. Все указанные выше замены сводят интегралы (1) к интегралам от рациональных функций.

Задача 3.1. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$.

Решение.

Так как подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, используем замену $t = \cos x$. При этом $dt = -\sin x dx$ и

$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = -\int \sin^2 x \cos^4 x(-\sin x dx) = -\int (1-t^2)t^4 dt = \int t^6 dt - \int t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

Замечание. В случае использования в задаче 3.1 замены $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ знаменатель оказался бы равным $(t^2+1)^8$, и для того, чтобы найти интеграл от полученной рациональной функции, пришлось бы проделать громоздкие вычисления.

Задача 3.2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4-\sin x}$.

Решение.

Делаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$\int \frac{dx}{4-\sin x} = \int \frac{2dt}{(t^2+1)\left(4-\frac{2t}{t^2+1}\right)} = 2\int \frac{dt}{4+4t^2-2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}} + C.$

Задача 3.3. Найти интеграл $\int \frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx$.

Решение, 1 способ.

Так как $\int \frac{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx = \int \frac{d(2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \ln|2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x| + C = \ln(2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) + C$, а $\int \frac{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx = x + C$, то для нахождения исходного интеграла достаточно представить его в виде линейной комбинации этих двух интегралов:

$\frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = A\frac{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} + B\frac{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}.$

Приравнивая в числителе коэффициенты при $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, получаем систему:

$$\begin{cases} -3 & = 2A - B, \\ 4 & = -A + 2B, \end{cases}$$

решая которую находим $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{5}{3}$.

Таким образом, исходный интеграл

$\int \frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx = -\frac{2}{3}\int \frac{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx + \frac{5}{3}\int \frac{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx = -\frac{2}{3}\ln|2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x| + \frac{5}{3}x + C.$

Замечание. Отметим, что прием, заключающейся в представлении подынтегральной функции в виде линейной комбинации двух функций, интералы от которых легко находятся, был использован в задаче 1.6.

Решение, 2 способ.

Так как подынтегральная функция обладает свойством $R(-\operatorname{sh} x; -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x)$, используем замену $t = \operatorname{th} x$. При этом $dt = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = (1-t^2)dx$ и исходный интеграл

$I = \int \frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}dx = \int \frac{4 - 3\operatorname{th} x}{2 - \operatorname{th} x}dx = \int \frac{4-3t}{(2-t)(1-t^2)}dt = \int \frac{4-3t}{(t-2)(t-1)(t+1)}dt.$

Представим полученную рациональную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$\frac{4-3t}{(t-2)(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-2}.$

Таким образом, $4 - 3t = A(t+1)(t-2) + B(t-1)(t-2) + C(t-1)(t+1)$.

Подставляя в последнее равенство $t = -1$, $t = 1$, $t = 2$, находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{6}$, $C = -\frac{2}{3}$, откуда

$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{7}{6}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t-2} + C = -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{7}{6}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|t-2| + C = -\frac{1}{2}\ln|\operatorname{th} x - 1| + \frac{7}{6}\ln|\operatorname{th} x + 1| - \frac{2}{3}\ln|\operatorname{th} x - 2| + C.$

§4. Интегрирование иррациональных функций

1. Интегралы вида

$$R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1};\dots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx, \qquad (2)$$

где $n\in\mathbb{N}$, $p_1,p_2,\dots,p_n\in\mathbb{Q}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc\neq 0$, использованием замены $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^m$, где m — общий знаменатель рациональных чисел $p_1,p_2,\dots,p_n$, приводятся к интегралу от рациональной функции.

Задача 4.1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

Так как подынтегральная функция является рациональной функцией относительно переменных $x_1=x^{\frac{1}{2}}$, $x_2=x^{\frac{2}{3}}$, то используем замену $x=t^{\text{НОК}(2;3)}=t^6$. Таким образом, $dx=6t^5dt$ и исходный интеграл

$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^4}=6\int\frac{t^2dt}{t+1}=6\int\frac{t^2-1}{t+1}dt+6\int\frac{dt}{t+1}=6\int tdt-6\int dt+6\int\frac{dt}{t+1}=3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$

Замечание. 6 — *наименьшая степень* t, которая позволяет избавиться от иррациональности.

Рассматрим интеграл, который сводится к виду (2).

Задача 4.2. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$.

Решение.

Сократив дробь на $\sqrt{x+1}$, *сведем исходный интеграл к виду* (2):

$I=\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}dx.$

Для того, чтобы свести интеграл к интегралу от рациональной функции, сделаем замену $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Таким образом, $2tdt=\frac{2dx}{(x+1)^2}=2\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^2dx$ и

$I=\int\frac{4t(t-1)}{(t+1)(1-t)^2(1+t)^2}dt=4\int\frac{tdt}{(t-1)(t+1)^3}.$

Представим полученную рациональную функцию в виде суммы элементарных рациональных дробей:

$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{(t+1)^3}.$

Таким образом, $t=A(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^2+C(t-1)(t+1)+D(t-1)$.

Подставляя в последнее выражение $t=1$, получаем, что $A=\frac{1}{8}$, подставляя $t=-1$, получаем, что $D=\frac{1}{2}$; приравнивая в нем коэффициенты при t^3, получаем, что $0=A+B$, откуда $B=-\frac{1}{8}$, а при t^0, получаем, что $0=A-B-C-D$, откуда $C=-\frac{1}{4}$. Таким образом, исходный интеграл

$I=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^3}=\frac{1}{8}\ln|t-1|-\frac{1}{8}\ln|t+1|+\frac{1}{4(t+1)}-\frac{1}{4(t+1)^2}+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right|+\frac{\sqrt{x+1}}{4(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}-\frac{x+1}{4(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2}+C.$

Замечание. Мы рассмотрели интегралы, являющиеся рациональной функцией от x и фиксированной дробно-линейной функции в рациональных степенях.

2. Интегралы вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома.* Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функции в следующих трех случаях:

$$p \text{ — целое число,}$$
$$\tfrac{m+1}{n} \text{ — целое число,}$$
$$\tfrac{m+1}{n} + p \text{ — целое число.}$$

В первом случае (это интеграл вида (2)) используется замена $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n; во втором и третьем случаях — соответственно замены $ax^n + b = t^s$ и $a + bx^{-n} = t^s$, где s — знаменатель дроби p.

Замечание. Написанные выше подстановки называются подстановками Чебышева. В остальных случаях интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Задача 4.3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}}$.

Решение.

Заметим, что это интеграл от дифференциального бинома с $m = -2$, $n = 3$, $p = -\frac{5}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то используем замену $1 + 2x^{-3} = t^3$. Таким образом, $-6x^{-4}dx = 3t^2dt$ (то есть $dx = -\frac{t^2x^4dt}{2}$) и

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}} = -\frac{1}{2}\int x^{-2}(x^3(1+2x^{-3}))^{-\frac{5}{3}}t^2x^4dt = -\frac{1}{2}\int x^{-3}t^{-3}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{t^3-1}{2t^3}dt = -\frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{t}{4} - \frac{1}{8t^2} + C = -\frac{\sqrt[3]{1+2x^{-3}}}{4} - \frac{1}{8\sqrt[3]{(1+2x^{-3})^2}} + C.$

3. Тригонометрические и гиперболические замены.

Задача 4.4. Найти интеграл $\int \sqrt{p^2 - x^2}dx$, где $p > 0$.

Решение.

Этот интеграл можно найти с помощью тригонометричекой замены $x = p\sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Тогда $dx = p\cos t dt$, $\sqrt{p^2 - x^2} = \sqrt{p^2\cos^2 t} = p\cos t$ (так как $p\cos t \geqslant 0$ в силу того, что $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$), а

$\int \sqrt{p^2 - x^2}dx = p^2\int \cos^2 t dt = \frac{p^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{p^2t}{2} + \frac{p^2\sin 2t}{4} + C = \frac{p^2\arcsin\frac{x}{p}}{2} + \frac{p^2\sin(2\arcsin\frac{x}{p})}{4} + C.$

В следующих случаях удобно использовать следующие тригонометрические (и гиперболические) замены:

1) в интеграле $\int R(x; \sqrt{p^2 - x^2})dx$ замены $x = p\sin t$, $x = p\cos t$, $x = p\,\mathrm{th}\,t$;

2) в интеграле $\int R(x; \sqrt{x^2 - p^2})dx$ замены $x = \frac{p}{\cos t}$, $x = p\,\mathrm{ch}\,t$;

3) в интеграле $\int R(x; \sqrt{x^2 + p^2})dx$ замены $x = p\,\mathrm{tg}\,t$, $x = p\,\mathrm{sh}\,t$.

Эти замены позволяют избавиться от иррациональности и свести интеграл к виду (1).

Задача 4.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение.

Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении и используя замену $x = t + 1$, сводим исходный интеграл к указанному выше виду:

$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{dt}{1+\sqrt{t^2+1}}.$

Используем замену $t = \mathrm{tg}\,u$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dt = \frac{du}{\cos^2 u}$ и

$I=\int\frac{du}{\cos^2 u(1+\sqrt{\operatorname{tg}^2 u+1})}=\int\frac{du}{\cos^2 u\left(1+\frac{1}{\cos u}\right)}=\int\frac{du}{\cos^2 u+\cos u}.$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $v=\operatorname{tg}\frac{u}{2}$. Тогда $\cos u=\frac{1-v^2}{v^2+1}$, $dv=\frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}=\frac{(v^2+1)du}{2}$, а интеграл

$I=\int\frac{1}{\left(\frac{1-v^2}{v^2+1}\right)^2+\frac{1-v^2}{v^2+1}}\cdot\frac{2dv}{v^2+1}=2\int\frac{v^2+1}{(1-v^2)^2+(1-v^2)(1+v^2)}dv=2\int\frac{v^2+1}{2-2v^2}dv=-\int\frac{v^2+1}{v^2-1}dv=$
$-\int dv-2\int\frac{dv}{v^2-1}=-v-\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right|+C=-\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{2}-\ln\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{2}}\right|+C.$

4. Для вычисления интегралов вида

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+px+q}},\qquad(3)$$

где P_n — многочлен степени n, целесообразно воспользоваться формулой

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+x}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad(4)$$

где Q — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а λ — некоторое число. Дифференцируя обе части формулы (4) и затем умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем равенство многочленов, из которого находим λ и коэффициенты многочлена Q.

Замечание. Этот метод аналогичен методу Остроградского (для вычисления интегралов от рациональных функций).

Замечание. Количество неопределенных коэффициентов в данном методе на 1 больше степени многочлена в числителе.

Задача 4.6. Найти интеграл $\int\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

Решение.

По формуле (4)
$\int\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$
Продифференцировав последнее равенство, получаем
$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}=A\sqrt{x^2-2x+5}+(Ax+B)\cdot\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$
Таким образом,
$2x^2-3x=A(x^2-2x+5)+(Ax+B)(x-1)+\lambda.$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1 и x^0 в правой и левой части, получаем систему:

$$\begin{aligned}x^2:&\quad 2&&=2A+B,\\ x^1:&\quad -3&&=-3A+B,\\ x^0:&\quad 0&&=5A-B+\lambda,\end{aligned}$$

решая которую находим $A=1$, $B=0$, $\lambda=-5$.

Таким образом,
$\int\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=2x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=2x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C.$

5. Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

использованием замены $t = \frac{1}{x-\alpha}$ приводятся к интегралам вида (3), причем $n = k-1$.

Задача 4.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx$, $x > -1$.

Решение.

Делаем замену $t = \frac{1}{x+1}$. При этом $t > 0$, $x = \frac{1-t}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и
$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+\frac{1-t}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$
$-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C = -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|+C = \ln\left(\frac{x+1}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}\right)+C_1.$

Замечание. После замены мы получили интеграл вида (3) с $n = 0$, то есть на 1 меньшим, чем степень линейной части знаменателя, как и должно быть.

6. Интегралы вида

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}},$$

где $p^2 - 4q < 0$, можно представить в виде линейной комбинации двух интегралов

$$\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} \qquad \text{и} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $u = x^2 + px + q$, а второй *подстановкой Абеля* $t = (\sqrt{x^2+px+q})' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$ сводится к интегралу от многочленов.

§5. Задачи для самостоятельного решения

Найти интеграл (1—36).

Основные методы интегрирования

1. $\int (x^2-2)^2 dx$.

2. $\int \sin 3x \sin 4x dx$.

3. $\int x^2 \cos x^3 dx$.

4. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

5. $\int \sqrt{\cos x} \sin^7 x dx$.

6. $\int \frac{\cos \ln x + \ln^2 x}{x} dx$.

7. $\int \frac{3x+2}{x^2-3x+5} dx$.

8. $\int x \sin(2x+1) dx$.

9. $\int (x^2+x) \operatorname{sh} 3x dx$.

10. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

11. $\int \ln^3 x \cdot \sqrt{x} dx$.

12. $\int \cos 2x \operatorname{sh} 3x dx$.

13. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

14. $\int \frac{\ln(4+\operatorname{th}^2 x)}{1+\operatorname{sh}^2 x} dx$.

15. $\int x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.

16. $\int \frac{\operatorname{arcctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Интегрирование рациональных функций

17. $\int \frac{x^3-4x^2+1}{x^2-4x+3} dx$.

18. $\int \frac{x^2+5}{(x-1)^2(x+2)} dx$.

19. $\int \frac{x^2+5x}{(x-1)(x^2+5)} dx$.

20. $\int \frac{2x^3+6x^2+3x-5}{(2x+1)(x^2+x+2)} dx$.

21. $\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^4-3x^3+5x^2-5x+2} dx$.

22. $\int \frac{x^5+x^2-1}{x^6+2x^4+x^2} dx$.

Интегрирование тригонометричеких и гиперболических функций

23. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x dx$.

24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

25. $\int \sin^2 x \cos 3x dx$.

26. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 5}$.

27. $\int \frac{\operatorname{tg} x - 5}{2\operatorname{tg} x + 1} dx$.

Интегрирование иррациональных функций

28. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[4]{x^3}}$.

29 $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} dx$.

30. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^7(x-2)^3}}$.

31. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}} dx$.

32. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^4+1}} dx$.

33. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

34. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$.

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4x+2}}$, $x > 0$.

36. $\int \frac{4x+3}{(x^2+x+1)^{\frac{5}{2}}} dx$.

ОТВЕТЫ

1. $\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x + C$.

2. $\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 7x}{14} + C$.

3. $\frac{\sin x^3}{3} + C$.

4. $\frac{2}{\ln 2} 2^{\sqrt{x}} + C$.

5. $2\left(\frac{1}{15}\cos^6 x - \frac{3}{11}\cos^4 x + \frac{3}{7}\sin^2 x - \frac{1}{3}\right)\sqrt{\cos^3 x} + C$.

6. $\sin \ln x + \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

7. $\frac{3}{2}\ln(x^2 - 3x + 5) + \frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{11}} + C$.

8. $-\frac{x\cos(2x+1)}{2} + \frac{\sin(2x+1)}{4} + C$.

9. $\frac{(9x^2+9x+2)\operatorname{ch} 3x - 3(2x+1)\operatorname{sh} 3x}{27} + C$.

10. $x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$.

11. $\frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9\ln^3 x - 18\ln^2 x + 24\ln x - 16) + C$.

12. $\frac{2\sin 2x \operatorname{sh} 3x + 3\cos 2x \operatorname{ch} 3x}{13} + C$.

13. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln(1+x^2)}{6} + C$.

14. $\operatorname{th} x \cdot \ln(1 + \operatorname{th}^2 x) - 2\operatorname{th} x + 4\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} x}{2} + C$.

15. $\frac{x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2}+C$

16. $2\sqrt{\frac{x}{1+x}}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{1+x}}+C.$

17. $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|-4\ln|x-3|+C.$

18. $-\frac{2}{x-1}+\ln|x+2|+C.$

19. $\ln|x-1|+\sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

20. $x-\frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+2)-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$

21. $\frac{\ln((x-1)^2(x^2-x+2)}{4}-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$

22. $\frac{4x^2+x+2}{2x(x^2+1)}+\frac{\ln(x^2+1)}{2}+2\operatorname{arctg}x+C.$

23. $\frac{\operatorname{ch}^7 x}{7}-\frac{\operatorname{ch}^5 x}{5}+C$

24. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

25. $-\frac{4}{5}\sin^5 x+\frac{\sin^3 x}{3}+C.$

26. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{5}}+C.$

27. $-\frac{3}{5}x-\frac{11}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C.$

28. $6\sqrt[6]{x}-12\sqrt[12]{x}+12\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C.$

29. $2\sqrt{2x-1}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}+1}\right|+C.$

30. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2}+C.$

31. $\frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{7}{3}}-3(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}}+C.$

32. $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^4+1}-\sqrt{2}x^2}{\sqrt{2x^4+1}+\sqrt{2}x^2}\right|+C.$

33. $\sqrt{x^2-1}+\operatorname{arch}x+C=\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C'.$

34. $\frac{(x-3)\sqrt{x^2+2x+5}}{2}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$

35. $-\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x+1+\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+1}}{x}\right).$

36. $-\frac{4}{3(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{27}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+C.$

Список литературы

[1] *Кудрявцев Л.Д., Кутасов Д.А., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. М.: Физмалит, 2009.

[2] *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. М.: Физмалит, 2014.

[3] *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Часть 1. М.: МФТИ, 2011.

[4] *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Часть 1. Введение в математический анализ М.: МФТИ, 2012.

[5] *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Физмалит, 2007.

[6] *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Часть 1. М.: Физмалит, 2004.

Оглавление.