УДК 532.546

Н.А. Маркитантова, А.П. Черняев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Нелинейная фильтрация к горизонтальной скважине в произвольной точке пласта в случае специальной нелинейности*

Рассматривается модель стационарной фильтрации несжимаемой жидкости к горизонтальной скважине, расположенной несимметрично относительно кровли и подошвы горизонтального пласта, при нелинейном законе специального вида, позволяющем свести решение задачи в плоскости годографа к аналитическим функциям.

Ключевые слова: стационарная фильтрация, плоская задача, нелинейный закон фильтрации, несжимаемая жидкость, несимметричное расположение скважины.

Как известно, при больших скоростях движения жидкости не выполняется закон фильтрации Дарси в связи с проявлением инерционных сил [1] и для исследования фильтрации природных жидкостей к скважинам должны использоваться нелинейные законы.

В [2–4] рассматривался нелинейный закон, позволяющий упростить решение соответствующей краевой задачи в плоскости годографа скорости, применимый в области больших скоростей:

$$\Phi(w) = w\left(1 + \frac{w^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

где $\vec{w}$ — скорость фильтрации $w = |\vec{w}|$, $1/n$ — параметр. При стремлении параметра закона к нулю из выражения (1) получается закон Дарси, что позволяет контролировать правильность решения в нелинейном случае.

Подобный закон, но со знаком «$-$» в подкоренном выражении был ранее предложен В.В. Соколовским [5] для случая небольших скоростей фильтрации (вязкопластические жидкости).

В [3, 4] показано, что только при законе (1) и при законе В.В. Соколовского уравнения в плоскости годографа скорости сводятся к уравнению Лапласа.

В [2–4] было построено точное решение для случая симметричного расположения скважины относительно кровли и подошвы. Течение в этом случае симметрично относительно обеих осей координат, поэтому решение достаточно получить в первом квадранте плоскости.

Здесь так же, как и в [6, 7], рассмотрено точное решение этой задачи в общем случае, когда скважина расположена в произвольной, необязательно симметричной относительно кровли и подошвы, точке пласта. Область решения в физической плоскости содержится в полуплоскости $x > x_0$.

Прежде чем перейти к рассмотрению фильтрации при данном нелинейном законе, необходимо выполнить преобразование к переменным годографа скорости.

Затем следует рассмотреть фильтрацию при законе Дарси в плоскости годографа скорости. Необходимо получить связь между переменными годографа скорости и переменными физической плоскости и получить выражения для функции тока и напора в новых переменных. Данные выражения используются для возможности сравнения результатов при линейном законе Дарси и рассматриваемом нелинейном законе фильтрации. К тому же выражение для функции тока течения, подчиняющегося закону Дарси, необходимо для получения одного из граничных условий.

Перейдем к постановке задачи. Подземные жидкости часто залегают в пористых пластах, имеющих непроницаемую кровлю и подошву. Пласт рассматривается как бесконечная горизонтальная полоса в (x, y) высоты h (рис. 1). Непроницаемость кровли и подошвы пласта означает равенство нулю вертикальной составляющей скорости фильтрации на верхней и нижней границах пласта (на рис. 1 границы пласта изображены прямыми BA и CA).

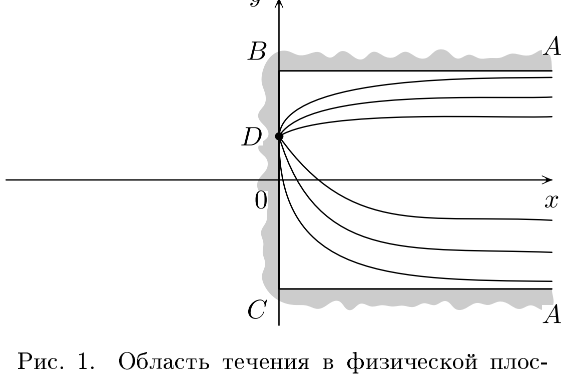

Рис. 1. Область течения в физической плоскости, отображение которой на плоскость годографа скорости выполняется в данной задаче

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки по гранту ВЦП РНПВШ 2.1.1 № 5904. Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», протокол № 2.1.1/11133 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», протокол № 2.1.1/12968.

Рассматривается плоское движение несжимаемой однофазной жидкости в пласте к горизонтальной скважине (точечному стоку или источнику), которая расположена несимметрично относительно кровли и подошвы (в точке $D(x_0, y_0)$).

Система уравнений, описывающих движение флюида в пористой среде, имеет вид

$$\begin{cases} -\operatorname{grad} H = \Phi(w)\frac{\vec{w}}{w}, \\ \operatorname{div}\vec{w} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где H — напор, $\Phi(w)$ — закон фильтрации. Первое уравнение представляет собой связь между градиентом напора и скоростью фильтрации [8], а второе является уравнением неразрывности.

Вводится разрез плоскости, представляющий собой луч с началом в точке D (см. рис. 1), задаваемый уравнением: $y = y_0$, $x < x_0$, и достаточно отыскать функцию тока ψ, такую, что равенства

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \frac{\partial\psi}{\partial y} = u$$

справедливы вне этого разреза, u и v — компоненты вектора скорости фильтрации $\vec{w}$ по осям x и y соответственно.

Считая, что интенсивность источника равна Q, получим, что на линии DBA (рис. 1) $\psi = Q/4$, на линии DCA $\psi = -Q/4$.

Выполним преобразование годографа в уравнении фильтрации природных жидкостей, подчиняющейся закону (1), которое позволяет свести уравнения в плоскости годографа скорости к уравнению Лапласа.

Найдем, во что отображается область $ABDCA$ при применении преобразования годографа. Новыми переменными будут (θ, w), где θ — угол между вектором скорости фильтрации в данной точке и положительным направлением оси x. К задачам фильтрации впервые это преобразование было применено С.А. Христиановичем в работе [9].

Область течения в переменных годографа скорости представлена на рис. 2. Переобозначим некоторые точки на границах области, на рис. 2 в скобках указаны новые обозначения.

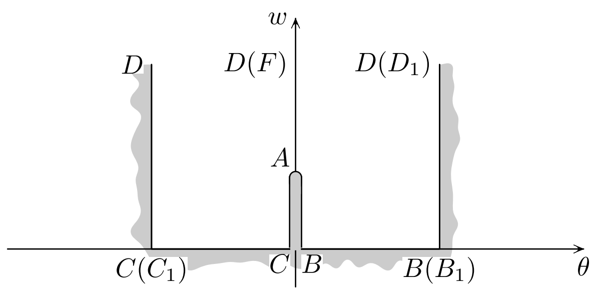

Рис. 2. Область решения задачи в плоскости годографа скорости

Заметим, что взаимная однозначность отображения нарушается в точках B, C физической плоскости. Несложно найти выражение для ординаты точки A: $w_A = \frac{Q}{2h}$.

Для начала рассмотрим случай, когда в постановке задачи используется закон фильтрации Дарси. Искомое решение для случая несимметричного расположения скважины относительно кровли и подошвы пласта получено в работе [8], функция тока

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sin(my)\operatorname{ch}[m(x-x_0)] - \sin(my_0)}{\cos(my)\operatorname{sh}[m(x-x_0)]}\right\}$$

при $x > x_0$, $y_0 \in (-h, h)$, где h — толщина пласта, $m = \frac{\pi}{h}$, Q — интенсивность источника.

Напор

$$H = -\frac{Q}{4\pi}\ln(\operatorname{sh}^2[m(x-x_0)]\cos^2(my) + \\ +(\operatorname{ch}[m(x-x_0)]\sin(my) - \sin(my_0))^2).$$

Поскольку мы переходим в плоскость годографа, нужно выразить приведенные только что ψ и H в переменных этой плоскости.

Получим частные производные $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$. Затем воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{v}{u}, w^2 = u^2 + v^2.$$

Упростим получившиеся выражения и введем обозначения $a = \sin(my)$, $b = \operatorname{ch}(m(x - x_0))$. Получим следующую систему уравнений, которую необходимо разрешить относительно переменных a, b:

$$\frac{(1-a^2)(a-b\sin(my_0))^2}{(b^2-1)(b-a\sin(my_0))^2} = \operatorname{tg}^2\theta,$$
$$\frac{(b^2-1)(b-a\sin(my_0))^2 + (1-a^2)(a-b\sin(my_0))^2}{(a^2+b^2-1-2ab\sin(my_0)+\sin^2(my_0))^2} = \\ = s^2, \tag{3}$$

где $s = \frac{2\pi w}{Qm}$.

Обозначим $(a - b\sin(my_0))^2 = t$, $(b - a\sin(my_0))^2 = p$. Тогда первое уравнение (3) можно привести к виду

$$\frac{t + p(s^2\cos^2(my_0) - 1)}{p - t(1 + s^2\cos^2(my_0))}\frac{t}{p} = \operatorname{tg}^2\theta.$$

Введем новую переменную $t/p = q$. Получим квадратное уравнение с одной неизвестной, имеющее следующее решение:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2\cos^2\theta}\Big(-s^2\cos^2(my_0) + \cos(2\theta) \pm \\ \pm\sqrt{s^4\cos^4(my_0) - 2s^2\cos^2(my_0)\cos(2\theta) + 1}\Big). \tag{4}$$

Выразим отношение a/b через $q(\theta, s)$:

$$\frac{(a-b\sin(my_0))^2}{(b-a\sin(my_0))^2} = q, \frac{a}{b} = \frac{\pm\sqrt{q} + \sin(my_0)}{1 \pm \sqrt{q}\sin(my_0)}.$$

Заметим, что при знаке «−» перед корнем в выражении (4) переменная q отрицательна. Величины же a, b, $\sin(my_0)$ — по условиям задачи действительные.

Теперь можно выразить переменную a через b и найти решение системы (3). Таким образом, выражение для функции тока в переменных годографа следующее:

$$\psi_D = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{ab - \sin(my_0)}{\sqrt{(1-a^2)(b^2-1)}}\right) = \\ = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[T(q,\theta)\right],$$

где

$$T(q,\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)} \times \\ \times\Big((q+\operatorname{tg}^2\theta)(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)\pm\sqrt{q}) - \\ - \sin(my_0)[q(\sin(my_0)\pm\sqrt{q})^2 + \\ + \operatorname{tg}^2\theta(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0)^2)]\Big). \quad (5)$$

Также приводим выражение для напора:

$$H_D = \\ = -\frac{Q}{4\pi}\ln(a^2+b^2-1+\sin^2(my_0) - 2ab\sin(my_0)) = \\ = -\frac{Q}{4\pi}\ln[P(q,\theta)],$$

где

$$P(q,\theta) = (q+\operatorname{tg}^2\theta)\times \\ \times\left[\frac{(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0))^2 + (\sin(my_0)\pm\sqrt{q})^2}{q(\sin(my_0)\pm\sqrt{q})^2 + \operatorname{tg}^2\theta(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0))^2} - \\ - \frac{2(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)\pm\sqrt{q})\sin(my_0)}{q(\sin(my_0)\pm\sqrt{q})^2 + \operatorname{tg}^2\theta(1\pm\sqrt{q}\sin(my_0))^2} - \\ - \cos^2(my_0)\right],$$

где $q(\theta, s)$ определяется выражением (4).

Рассмотрим случай использования нелинейного закона фильтрации специального вида (1). Система (2) записывается следующим образом:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \left(1 + \frac{w^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} u, \\ -\frac{\partial H}{\partial y} = \left(1 + \frac{w^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} v, \quad (6) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

В плоскости годографа получаем из (6):

$$w\left(1+\frac{w^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial w} = -\frac{\partial H}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = w\left(1+\frac{w^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial H}{\partial w}. \quad (7)$$

Сделаем замену переменных в уравнениях (7) так, чтобы избавиться от переменных коэффициентов:

$$r\,(w) = \ln\frac{w}{1+\sqrt{1+\frac{w^2}{n^2}}}.$$

В новых переменных система (7) приобретает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (8)$$

Заметим, что функция тока, заданная на границе, терпит разрыв в точке

$$\theta = 0, \quad r_A = \ln\frac{w_A}{1+\sqrt{1+\frac{w_A^2}{n^2}}}.$$

Обозначим $z = \theta + ir$. Уравнения (8) представляют собой условия Коши–Римана, следовательно, функция $f = \psi + iH$ является функцией одной переменной z.

Выполним ряд конформных преобразований, в результате которых область в плоскости z отображается на верхнюю полуплоскость (рис. 3):

$$z_1 = z - i\ln n, \quad z_2 = \sin z_1, \quad z_3 = z_2^2, \\ z_4 = \frac{z_3 + \operatorname{sh}^2(r_A - \ln n)}{z_3}, \quad z_5 = -\sqrt{z_4}.$$

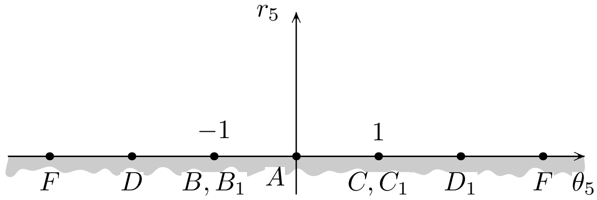

Рис. 3. Область решения в плоскости z_5

Граничные условия на отрезке DD_1 известны. Граничные условия на FD и D_1F получим при помощи предельного перехода в формуле (5), когда скорость фильтрации стремится к бесконечности, т. е. в точке физической плоскости (x_0, y_0). В этом случае s также стремится к бесконечности. Применим правило Лопиталя для нахождения предела и получим искомое значение, которое совпадает с предельным значением функции тока в центральном случае расположения скважины:

$$\psi_\infty = \lim_{s\to\infty}\psi_D = \frac{Q\theta}{2\pi}.$$

Мы получили граничное условие на отрезках на FD и D_1F в области переменных (θ, w). Теперь найдем граничное условие на части границы (лучи DF, D_1F) (рис. 3) в новых переменных и, таким образом, получим следующую постановку задачи Дирихле для функции тока, описывающей движение несжимаемой жидкости в окрестности горизонтальной скважины:

$$\Delta\psi = 0, \\ \psi|_{\rho_5=0} = \frac{Q}{2\pi}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2(r_A - \ln n)}{\theta_5^2 - 1}}\right)\right), \\ \theta_6 \in (-\infty, \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(r_A - \ln n)}), \\ \psi|_{\rho_5=0} = \frac{Q}{4}, \quad \theta_5 \in [-\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(r_A - \ln n)}, 0), \\ \psi|_{\rho_5=0} = -\frac{Q}{4}, \quad \theta_6 \in (0, -\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(r_A - \ln n)}),$$

$$\psi|_{\rho_5=0} = -\frac{Q}{2\pi}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2(r_A-\ln n)}{\theta_5^2-1}}\right)\right),$$

$$\theta_5 \in [\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(r_A-\ln n)}, \infty).$$

Обозначим $B = \operatorname{sh}(r_A - \ln n)$. Тогда решение задачи на полуплоскости получится в виде

$$\psi(\theta_5, r_5) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Q}{2\pi} r_5 \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{1+B^2}} \frac{\arcsin(B/\sqrt{\eta^2-1})d\eta}{(\eta-\theta_5)^2+r_5^2} + \right.$$

$$+\frac{Q}{4} r_5 \int\limits_{-\sqrt{1+B^2}}^{0} \frac{d\eta}{(\eta-\theta_5)^2+r_5^2} - \frac{Q}{4} r_5 \int\limits_{0}^{\sqrt{1+B^2}} \frac{d\eta}{(\eta-\theta_5)^2+r_5^2} -$$

$$\left. -\frac{Q}{2\pi} r_5 \int\limits_{\sqrt{1+B^2}}^{\infty} \frac{\arcsin(B/\sqrt{\eta^2-1})\,d\eta}{(\eta-\theta_5)^2+r_5^2}\right).$$

Выразим переменные (θ_5, r_5) через переменные (θ, r). Распишем подробнее выполненные конформные преобразования и получим выражение для

$$\theta_5 = \mp\sqrt{1/2 + B^2 G(\theta,r)/(2F(\theta,r)) + \sqrt{A(\theta,r)}/2},$$

где знак «$-$» при $\theta \geqslant 0$, знак «$+$» при $\theta < 0$,

$$r_5 = -\sqrt{-1/2 - B^2 G(\theta,r)/(2F(\theta,r)) + \sqrt{A(\theta,r)}/2},$$

где введены следующие обозначения:

$$G(\theta,r) = \sin^2\theta \operatorname{ch}^2(r-\ln n) - \operatorname{sh}^2(r-\ln n)\cos^2\theta,$$

$$F(\theta,r) = (\sin^2\theta + \operatorname{sh}^2(r-\ln n))^2,$$

$$A(\theta,r) = 1 + (2B^2 G(\theta,r) + B^4)/F(\theta,r).$$

Рассчитаем напор при нелинейном законе фильтрации (1). Значение напора в произвольной точке области может быть выражено в виде криволинейного интеграла от величины dH по любой кривой, соединяющей эту точку и точку, удаленную от источника, где значение напора можно считать равным значению при линейном законе фильтрации. Кривую, по которой производится интегрирование, выберем так, чтобы упростить подынтегральное выражение. Посчитаем напор по линии тока, совпадающей с границей области. Выберем границу области DBA (рис. 1). Возьмем точку w_0 на линии тока DBA на большом удалении от скважины (стока или источника). Значение напора в точке w_0 можно положить равным значению напора при законе Дарси.

Таким образом, интеграл сводится к интегралу Римана по отрезку оси w:

$$H\left(\frac{\pi}{2}, w\right) = \int\limits_{w_0}^{w} \frac{1}{\tau(1+\tau^2/n^2)} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) d\tau. \quad (9)$$

Получим выражение для частной производной $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta, w)$ в области течения, для этого необходимо найти выражение для частной производной в области течения:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r_5} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Q}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{1+B^2}} \frac{\arcsin(B/\sqrt{\eta^2-1})\,d\eta}{(\eta-\theta_5)^2} + \right.$$

$$+\frac{Q}{4}\int\limits_{-\sqrt{1+B^2}}^{0} \frac{d\eta}{(\eta-\theta_5)^2} - \frac{Q}{4}\int\limits_{0}^{\sqrt{1+B^2}} \frac{d\eta}{(\eta-\theta_5)^2} -$$

$$\left. -\frac{Q}{2\pi}\int\limits_{\sqrt{1+B^2}}^{\infty} \frac{\arcsin(B/\sqrt{\eta^2-1})\,d\eta}{(\eta-\theta_5)^2}\right). \quad (10)$$

Теперь получим выражения для частных производных $\frac{\partial\theta_5}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial r_5}{\partial\theta}$ в области течения:

$$\frac{\partial\theta_5}{\partial\theta} = \frac{\mp 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{B^2 G(\theta,w)}{F(\theta,w)} + \sqrt{A(\theta,w)}\right)}} \times$$

$$\times\left(\frac{B^2(\frac{\partial G(\theta,w)}{\partial\theta}F(\theta,w) - \frac{\partial F(\theta,w)}{\partial\theta}G(\theta,w))}{2F^2(\theta,w)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\sqrt{A(\theta,w)}}\frac{\partial A(\theta,w)}{\partial\theta}\right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{B^2 G(\theta,w)}{F(\theta,w)} + \sqrt{A(\theta,w)}\right)}} \times$$

$$\times\left(\frac{-B^2(\frac{\partial G(\theta,w)}{\partial\theta}F(\theta,w) - \frac{\partial F(\theta,w)}{\partial\theta}G(\theta,w))}{2F^2(\theta,w)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\sqrt{A(\theta,w)}}\frac{\partial A(\theta,w)}{\partial\theta}\right). \quad (12)$$

Найдем предел подкоренного выражения в знаменателе выражения (11):

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1 + \frac{B^2 G(\theta,w)}{F(\theta,w)} + \sqrt{A(\theta,w)}}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{B^2}{\operatorname{ch}^2(r-\ln n)}.$$

Предел подкоренного выражения в знаменателе выражения (12):

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-1 - \frac{B^2 G(\theta,w)}{F(\theta,w)} + \sqrt{A(\theta,w)}}{2}\right) = 0.$$

Числитель выражений (11), (12) при $\theta \to \pi/2 - 0$ обращается в 0.

Найдем предел выражения $\frac{\partial r_5}{\partial\theta}$ при $\theta \to \pi/2 - 0$. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\left(\lim_{\theta\to\pi/2-0}\frac{\partial r_5}{\partial\theta}\right)^2 =$$

$$= \lim_{\theta\to\pi/2-0}\left(-\frac{1}{4}\frac{B^2}{F^2(\theta,w)}\left[\frac{\partial^2 G(\theta,w)}{\partial\theta^2}F(\theta,w) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 F(\theta,w)}{\partial\theta^2}G(\theta,w)\right] + \frac{1}{2\sqrt{A(\theta,w)}}\frac{\partial^2 A(\theta,w)}{\partial\theta^2}\right). \quad (13)$$

Теперь, пользуясь полученными выражениями (9), (10), (11), (12), (13), можем построить качественный график напора при нелинейном законе фильтрации.

Сравним графики напора при нелинейном законе фильтрации для вертикальной скважины (источника или стока) и для горизонтальной скважины (источника или стока в полосе). Несложно рассчитать напор для нелинейного закона фильтрации (1) для стока (источника) для того, чтобы сравнить результаты, полученные для более простой модели стока (источника), с результатом, полученным для модели горизонтальной скважины в полосе:

$$H = -C_1 \ln \left| \frac{1}{w} + \sqrt{\frac{1}{w^2} + \frac{1}{n^2}} \right| + C_2. \qquad (14)$$

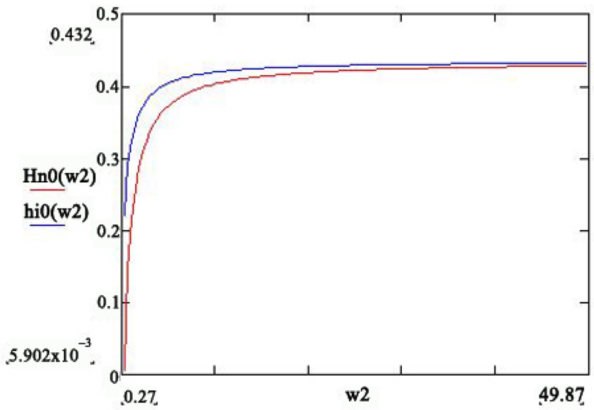

Рис. 4. Графики напора для горизонтальной скважины $Hn0(w_2)$ и вертикальной скважины $hi0(w_2)$. $Q = 1$; $h = 150$; $n = 1$; $w \in (w_A; 100)$; $C_1 = Q/4\pi$; $C_2 = 0,38$

Результаты сравнения графиков напора в зависимости от скорости фильтрации при нелинейном законе фильтрации для стока и горизонтальной скважины представлены на рис. 4.

Константы в выражении (14) подбираем таким образом, чтобы графики напора для источника и горизонтальной скважины совпадали при больших скоростях фильтрации.

Результаты сравнения графиков напора в зависимости от скорости фильтрации при нелинейном законе фильтрации и законе Дарси для горизонтальной скважины представлены на рис. 5. Расхождения значений напора уменьшаются при увеличении толщины пласта h и увеличении n.

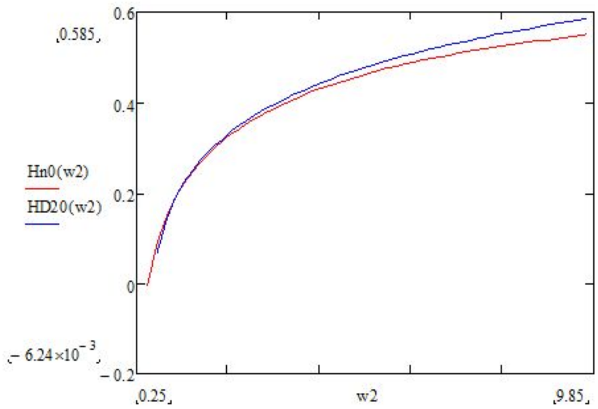

Рис. 5. Графики напора для горизонтальной скважины при нелинейном законе, $Hn0(w_2)$, и законе Дарси, $HD20(w_2)$. $Q = 1$; $h = 100$; $n = 15$

Литература

1. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 415 с.

2. *Черняев А.П., Коротеев М.В.* Введение в математическую теорию нелинейной стационарной фильтрации несжимаемой жидкости к горизонтальным скважинам. – М.: МГУП, 2003. – 104 с.

3. *Черняев А.П.* Нелинейная фильтрация для некоторого закона сопротивления среды // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – Т. 13, вып. 2. Механика. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. – С. 224–233.

4. *Черняев А.П.* Стационарная задача о притоке жидкостей к горизонтальной скважине в случае нелинейного закона фильтрации специального вида // Вестн. МГУП. – 2006. – № 8. – С. 80–89.

5. *Соколовский В.В.* О нелинейной фильтрации грунтовых вод // ПММ. – 1949. – Т. XII, вып. 5. – С. 525–536.

6. *Маркитантова Н.А., Черняев А.П.* Задача о притоке несжимаемой жидкости к горизонтальной скважине в случае модифицированного закона Соколовского // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – Т. 13, вып. 2. Механика. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. – С. 117–126.

7. *Маркитантова Н.А., Черняев А.П.* Фильтрация к несимметричной горизонтальной скважине в случае модифицированного закона Соколовского // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 77–87.

8. *Бернардинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 199 с.

9. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. – 1940. – Т. IV, вып. 1. – С. 33–52.

10. *Черняев А.П., Лигостаева Н.А.* Моделирование линейной стационарной фильтрации к горизонтальной скважине большой протяженности // Математика: Фундаментальные вопросы, приложения, преподавание: Межведомственный сборник научных трудов. Вып. 2. – М.: Изд-во МГУП, 2002. – С. 220–227.

Поступила в редакцию 21.01.2011