УДК 532.5.032

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Критерий Бернулли для установившегося плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрено установившееся плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Доказано, что известное достаточное условие сохранения вдоль линий тока трехчлена Бернулли — равенство нулю градиента величины завихренности — является необходимым условием.

Ключевые слова: влияние вязкости, интеграл Бернулли, скорость переноса завихренности, теорема Бернулли, трехчлен Бернулли.

1. Введение

В работе [1] для установившихся плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости был найден вектор $\mathbf{U}$, вдоль векторных линий которого сохраняется трехчлен Бернулли. Общеизвестно [2], что в невязком случае роль такого вектора играет скорость жидкости, которая одновременно является скоростью переноса завихренности ω. Как и в невязком случае, найденный в работе [1] вектор $\mathbf{U}$ оказался скоростью переноса завихренности. Таким образом, и в вязком, и в невязком случае в рассматриваемых течениях завихренность переносится вдоль линий постоянства трехчлена Бернулли. Позднее в работе [3] был получен аналогичный вектор для установившихся осесимметричных течений.

В известных точных решениях уравнений Навье–Стокса [2, 4] трехчлен Бернулли не сохраняется вдоль линий тока. Ван-Дайк обращает внимание, что во всех его решениях направление переноса завихренности, образовавшейся на поверхности тела, имеет поперечную составляющую [5]. С другой стороны, как было замечено в одном из примечаний редактора перевода монографии [6], трехчлен Бернулли может сохраняться в вязкой жидкости вдоль линий тока. Это возможно при равенстве нулю слагаемых с вязкостью в уравнениях Навье–Стокса (случай $\nu\Delta\mathbf{V} = 0$). Но только ли при этом условии трехчлен Бернулли сохраняется вдоль линий тока, является ли это условие необходимым? Может быть, существуют потоки, в которых $\nu\Delta\mathbf{V} \neq 0$, а трехчлен Бернулли сохраняется вдоль линий тока? Бэтчелор — автор упомянутой монографии — обсуждает необходимое условие теоремы Бернулли для вязкого течения и оставляет этот вопрос открытым. В настоящей работе данный вопрос решен для плоскопараллельного случая. Достаточное условие — равенство нулю слагаемых с вязкостью — оказалось и необходимым условием сохранения трехчлена Бернулли вдоль линий тока. При формулировке полученного критерия учитывалось следующее обстоятельство. Для скорости несжимаемой жидкости операторы лапласиан и ротор ротора отличаются только знаком. Поэтому при ненулевой вязкости условие равенства нулю слагаемых с вязкостью равносильно условию $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$. И, следовательно, в плоскопараллельном случае равносильно равенству нулю градиента величины завихренности. Доказательство достаточного условия повторяет классическое доказательство теоремы Бернулли. Основная идея доказательства необходимости состоит в том, что условие сохранения трехчлена Бернулли вдоль линий тока для вязкого случая сводится к условию параллельности вектора $\mathbf{U}$ и скорости жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся плоскопараллельное изотермическое течение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Обозначим, как обычно, $\mathbf{V}$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность, Π — потенциал массовых сил, $\nu \neq 0$ — кинематический коэффициент вязкости. Движение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса [2]:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nabla \Pi, \quad \mathrm{div}\mathbf{V} = 0.$$

Требуется доказать теорему (критерий Бернулли).

Необходимым и достаточным условием сохранения трехчлена Бернулли $\left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right]$ *вдоль линий тока в (открытой) области течения A_0 является равенство нулю градиента величины завихренности $|\boldsymbol{\omega}| = |\mathrm{rot}\mathbf{V}|$ (равенство нулю слагаемых с вязкостью в уравнениях Навье–Стокса).*

3. Достаточность

Поскольку в плоскопараллельном случае вектор $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{V}$ перпендикулярен плоскости течения, то из предположения о равенстве нулю градиента $|\boldsymbol{\omega}|$ в (открытой) области A_0 следует, что

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Как и в невязком случае [2, 6], запишем уравнения Навье–Стокса в форме Громека–Ламба:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right] - \nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}, \quad \mathrm{div}\mathbf{V} = 0.$$

При условии $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} = 0$ первое уравнение упрощается:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right].$$

Градиент трехчлена Бернулли перпендикулярен скорости. Поэтому трехчлен Бернулли сохраняет свое значение вдоль линии тока. Достаточность доказана.

4. Необходимость

Пусть в некоторой (открытой) области A_0 течения трехчлен Бернулли может принимать разные значения на разных линиях тока, но вдоль каждой линии тока сохраняет свое значение. Выберем $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортонормированную правую тройку векторов так, чтобы вектор $\mathbf{k}$ был нормален к плоскости течения. Допустим, что в области A_0 есть (открытая) подобласть A_1, во всех точках которой $\nabla\omega \neq 0$, где $\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = |\boldsymbol{\omega}|$.

Величина завихренности ω не может равняться нулю во всех точках этой подобласти, т.к. иначе градиент завихренности $\nabla\omega$ равнялся бы нулю. Т.е. в области A_1 существует точка, в которой $\omega \neq 0$. Поэтому, в силу непрерывности ω и открытости A_1, существует подобласть $A_2 \subset A_1$, во всех точках которой $\omega \neq 0$.

Далее, скорость не может быть равной нулю во всех точках A_2, т.к. иначе величина завихренности ω равнялась бы нулю, что противоречит выбору A_2. Т.е. в области A_2 существует точка, в которой $\mathbf{V} \neq 0$. Следовательно, в силу непрерывности $\mathbf{V}$ и открытости A_2, существует подобласть $A_3 \subset A_2$, во всех точках которой $\mathbf{V} \neq 0$.

Ниже нам потребуется неравенство нулю вектора $\mathbf{U} = \omega\,(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)$, упомянутого во введении. Докажем существование подобласти $A_4 \subset A_3$, в которой этот вектор не равен нулю.

В подобласти A_3 величина завихренности ω не равна нулю. Во-первых, это означает существование $\ln|\omega|$). Во-вторых, — что неравенство нулю рассматриваемого вектора равносильно условию

$$\mathbf{V} \neq -\nu\nabla\ln|\omega|.$$

Допустим $\mathbf{V} = -\nu\nabla \ln|\omega|$ во всей подобласти A_3. Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{V} = -\,\nu\,\mathrm{rot}\,\nabla\ln|\omega| = 0,$$

чего в области A_3 не может быть, т.к. $A_3 \subset A_2$. Значит, в области A_3 существует точка, в которой $\mathbf{V} \neq -\nu\nabla\ln|\omega|$. Поэтому, в силу непрерывности $(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)$ и открытости A_3, существует подобласть $A_4 \subset A_3$, во всех точках которой $(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) \neq 0$.

Итак, из допущения, что в области A_0 есть (открытая) подобласть A_1, во всех точках которой $\nabla\omega \neq 0$, последовало существование подобласти A_4, во всех точках которой

$$\nabla\omega \neq 0, \quad \omega \neq 0, \quad \mathbf{V} \neq 0, \quad \omega\,(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) \neq 0. \tag{1}$$

Вплоть до получения противоречия, означающего неверность допущения, будем действовать в подобласти A_4.

Второе из условий (1) позволяет записать уравнения Навье–Стокса в форме [1]

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) = -\nabla\left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right], \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0. \tag{3}$$

Применим операцию rot к обеим частям (2) с использованием известного тождества [2]

$$\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}.$$

Получим

$$\mathrm{rot}\,\{\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\} = ((\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) +$$
$$+\,\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{div}(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) - (\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю, т.к. в плоскопараллельном течении все производные по направлению $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю. Последнее слагаемое также равно нулю, поскольку $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому

$$((\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{div}(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) = 0.$$

$\mathbf{k}$ — компонента этого векторного уравнения получается заменой $\boldsymbol{\omega}$ на ω:

$$((\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\cdot\nabla)\,\omega + \omega\,\mathrm{div}(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|) = 0,$$

или

$$\mathrm{div}\,\{\omega\,(\mathbf{V} - \nu\nabla\ln|\omega|)\} = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (2) и из условия сохранения трехчлена Бернулли вдоль линий тока следует, что

$$\mathbf{V}\times\nabla\ln|\omega| = 0. \tag{5}$$

Выберем в A_4 какую-нибудь внутреннюю точку O_1. Введем систему естественных координат (s, n) с центром в точке O_1. Пусть $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_n$ — соответственно единичные касательный и нормальный к линии тока векторы; причем кратчайший поворот от $\mathbf{e}_s$ к $\mathbf{e}_n$ происходит против часовой стрелки. Пусть H_s и H_n — коэффициенты Лямэ этой ортогональной системы координат [2]. В координатах (s, n) уравнения (4), (3), (5) выглядят соответственно так:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{H_n\left(\omega V - \frac{\nu}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}\omega\right)\right\} = 0, \quad V = \mathbf{V}\cdot\mathbf{e}_s = |\mathbf{V}|, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\,(H_n V) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = 0. \tag{8}$$

Заметим, что первое и последнее из условий (1) в координатах (s, n) записываются соответственно так: $\frac{\partial}{\partial s}\omega \neq 0$ и $\omega V - \frac{\nu}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}\omega \neq 0$.

Независимо от природы плоского течения справедливо дифференциальное равенство

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}H_n\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s\right). \tag{9}$$

Докажем это равенство. Пусть $\varphi = \varphi(s, n)$ — угол поворота против часовой стрелки от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{e}_s$, тогда

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_n = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi.$$

Если $\mathbf{r}(s, n)$ — радиус-вектор точки с координатами (s, n), то

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{r}(s, n) \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_n = \frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}\mathbf{r}(s, n),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{r}(s, n) = (\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)H_s \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n}\mathbf{r}(s, n) = (-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)H_n.$$

Приравняем первое из двух последних выражений, продифференцированное по n, второму, продифференцированному по s. Два соответствующих скалярных уравнения, решенные относительно $\frac{\partial}{\partial n}\varphi$ и $\frac{\partial}{\partial s}\varphi$, дают

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi = -\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s, \quad \frac{\partial}{\partial n}\varphi = \frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}H_n.$$

Равенство вторых смешанных производных φ заканчивает доказательство свойства (9).

Найдем левую часть (9). Уравнение (6) с учетом (7) дает

$$VH_s = \nu\frac{\partial}{\partial s}\ln\left(\frac{H_n}{H_s}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\omega\right) \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial s}\omega\right),$$

где последнее слагаемое зависит только от s.

Формула для завихренности в системе координат (s, n) имеет вид [2]

$$\omega = -\frac{1}{H_s H_n}\frac{\partial}{\partial n}(VH_s). \tag{10}$$

Поэтому

$$\omega = -\frac{\nu}{H_n H_s}\frac{\partial^2}{\partial s \partial n}\ln\left(\frac{H_n}{H_s}\right). \tag{11}$$

Далее, из уравнения (7) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -V\frac{\partial}{\partial s}\ln H_n. \tag{12}$$

С другой стороны, перепишем (10) в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}(H_s V) = -\omega H_s H_n.$$

Или

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -V\frac{\partial}{\partial n}\ln H_s - \omega H_n. \tag{13}$$

Необходимое условие совместности уравнений (12) и (13), а именно, равенство вторых смешанных производных V, дает

$$V\frac{\partial^2}{\partial s \partial n}\ln\left(\frac{H_n}{H_s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}(\omega H_n) - \omega H_n\frac{\partial}{\partial s}\ln H_n = 0.$$

Исключим отсюда $\dfrac{\partial^2}{\partial s \partial n} \ln\left(\dfrac{H_n}{H_s}\right)$ с помощью (11):

$$VH_s + \nu \frac{\partial}{\partial s} \ln|\omega| + 2\nu \frac{\partial}{\partial s} \ln H_n = 0.$$

Продифференцируем последнее уравнение по n. Производная второго слагаемого равна нулю (см. (8)). Производная первого слагаемого входит в формулу (10). Поэтому

$$\omega \underset{(10)}{=} -\frac{1}{H_s H_n} \frac{\partial}{\partial n}(VH_s) = \frac{2\nu}{H_n H_s} \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} \ln H_n.$$

Вместе с уравнением (11) это дает:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial n} \ln\left(\frac{H_s}{H_n^3}\right) = 0. \tag{14}$$

Будем обозначать большими буквами S с индексом внизу или без индекса функции, зависящие только от s, а буквами N — только от n. Эти же функции со штрихом будут обозначать их производные. Кроме того, поскольку ω зависит только от s, обозначим $\omega' = \dfrac{\partial}{\partial s}\omega$. С использованием таких обозначений уравнения (14), (6) и (7) переписываются соответственно в виде

$$H_s = H_n^3 S_0 N_0, \quad \text{где} \quad S_0 N_0 \neq 0, \quad \text{так как} \quad H_s \neq 0; \tag{15}$$

$$N_1 \omega - \nu \frac{H_n}{H_s} \omega' = N_2; \tag{16}$$

$$N_1 = H_n V; \tag{17}$$

а неравенства (1) принимают вид (см. замечание после формулы (8))

$$\omega' \neq 0, \quad \omega \neq 0, \quad V \neq 0, \quad N_2 \neq 0. \tag{18}$$

Поделим обе части (16) на ω ($\neq 0$) и продифференцируем по s:

$$N_2 \frac{H_s}{H_n} \frac{\omega'}{\omega^2} = \nu \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)' + \nu \frac{\omega'}{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \ln\left(\frac{H_n}{H_s}\right).$$

Продифференцируем последнее равенство по n с учетом (8) и (11):

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(N_2 \frac{H_s}{H_n}\right) = -\omega^2 H_s H_n.$$

Поделим это равенство на $N_2 \dfrac{H_s}{H_n}$ (см. (18)):

$$(\ln|N_2|)' - \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{H_n}{H_s}\right) = -\frac{\omega^2 H_n^2}{N_2}.$$

Первое слагаемое левой части и знаменатель правой части не зависят от s. Продифференцируем по s, поделим результат на $H_s H_n$ и, использовав (11), получим

$$-\frac{N_2}{2\nu} = \frac{H_n}{H_s}\omega' + \omega\left(\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s} H_n\right).$$

Подставим сюда отношение $\dfrac{H_n}{H_s}$ из (16) и найдем левую часть (9):

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s} H_n\right) = \frac{N_2}{2\nu}\frac{\omega'}{\omega^2}. \tag{19}$$

Теперь найдем правую часть (9). Выразим H_s из (16):

$$H_s = H_n \frac{\nu\,\omega'}{N_1\omega - N_2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s = \left(\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_n\right)\frac{\nu\,\omega'}{N_1\omega - N_2} - \frac{\nu\,\omega'}{(N_1\omega - N_2)^2}(N_1'\omega - N_2'). \tag{20}$$

Получим выражение для $\dfrac{1}{H_n}\dfrac{\partial}{\partial n}H_n$, входящее в (20). Исключим H_s из уравнений (15) и (16):

$$H_n^2 = \frac{\nu\,\omega'}{N_1\omega - N_2}\frac{1}{S_0 N_0}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_n = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\ln(H_n^2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\ln|N_1\omega - N_2| - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\ln|N_0| =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(N_1\omega - N_2)}(N_1'\omega - N_2') + N_3, \quad \text{где} \quad N_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\ln|N_0|.$$

Подставим это выражение для $\dfrac{1}{H_n}\dfrac{\partial}{\partial n}H_n$ в (20):

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s\right) = \nu\,\omega'\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{N_3}{(N_1\omega - N_2)} - \frac{3}{2(N_1\omega - N_2)^2}(N_1'\omega - N_2')\right\} =$$
$$= \nu\,\omega'\left\{\frac{N_3'}{(N_1\omega - N_2)} - \frac{N_3(N_1'\omega - N_2')}{(N_1\omega - N_2)^2} + \frac{3}{(N_1\omega - N_2)^3}(N_1'\omega - N_2')^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2(N_1\omega - N_2)^2}(N_1''\omega - N_2'')\right\} = \nu\,\omega'\frac{Q(n,\omega)}{(N_1\omega - N_2)^3},$$

где $Q(n,\omega)$ — многочлен от ω степени не выше двух, с коэффициентами, зависящими от n.

Приравняем найденное только что выражение для правой части уравнения (9) выражению для левой части (формула (19)):

$$\frac{N_2}{2\nu}\frac{\omega'}{\omega^2} = \nu\,\omega'\frac{Q(n,\omega)}{(N_1\omega - N_2)^3}.$$

Из $\omega' \neq 0$ следует, во-первых, что функции ω^0, ω^1, ω^2, ω^3 и т.д. — линейно независимы и, во-вторых, что левую и правую часть можно сократить на ω':

$$N_2(N_1\omega - N_2)^3 = 2\nu^2\omega^2 Q(n,\omega).$$

Зафиксируем n. Слева — многочлен с коэффициентом $-N_2^4$ при ω^0. Справа — многочлен, имеющий нулевой коэффициент при ω^0. Поэтому $N_2 = 0$, что противоречит последнему из условий (18).

К этому противоречию привело допущение, что в области A_0 есть (открытая) подобласть A_1, во всех точках которой $\nabla\omega \neq 0$, то есть это допущение неверно. Поэтому в любой окрестности любой точки области A_0 есть точка, в которой $\nabla\omega = 0$. А это, в силу непрерывности $\nabla\omega$, означает, что $\nabla\omega = 0$ во всей области A_0. Необходимость доказана.

5. Следствия

Ниже употребляется словосочетание «влияние вязкости». Физически этот термин означает, что результирующая сил трения, действующих на элемент жидкости, не равна нулю. Математически — неравенство нулю вектора $\nu\Delta\mathbf{V}$.

1. Влияние вязкости всегда проявляется в виде непостоянства трехчлена Бернулли $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi$ вдоль линий тока.

2. Ненулевая результирующая сил трения всегда имеет ненулевую составляющую вдоль скорости жидкости.

6. Заключительные замечания

Доказательство проведено при условии $\nu \neq 0$. Это условие существенно, т.к. при $\nu = 0$, и при постоянной, и при переменной по пространству завихренности трехчлен Бернулли сохраняется вдоль линий тока (классическая теорема Бернулли [2]). В этом случае из постоянства трехчлена Бернулли вдоль линий тока не следует равенство нулю градиента завихренности.

Доказательство существенным образом опирается на коммутативность смешанных частных производных, на существование и непрерывность некоторых частных производных. Все этапы доказательства будут обоснованы, если принять следующие требования к гладкости: компоненты скорости должны быть трижды непрерывно дифференцируемыми, а p и Π — дважды непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных координат.

Случай сохранения трехчлена Бернулли вдоль линий тока не в (открытой) области, а только вдоль одной отдельной линии тока не рассмотрен.

Литература

1. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. — 1987.— № 3. — С. 176–177.

2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978.

3. *Брутян М.А., Голубкин В.Н., Крапивский П.Л.* Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. — 1988. — Т. XIX. — № 2. — С. 98–100.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.

5. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкостей. — М.: Мир, 1967.

6. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 19.06.2012.