УДК 517.988.8

А.А. Фонарёв

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О минимизации функционала на выпуклом множестве нормированного пространства

Исследуется минимизация функционала на выпуклом множестве вещественного нормированного пространства без наличия рефлексивности пространства и коэрцитивности функционала. С использованием итерационного процесса строится релаксационная последовательность, которая минимизирует функционал при наличии выпуклости функционала.

Ключевые слова: функционал, минимизация, итерационный процесс.

Рассматривается аналог итерационного процесса из абстрактных результатов работы [1], связанных с краевой задачей Дирихле [1], сводящейся к вариационному неравенству в нерефлексивном банаховом пространстве с монотонным потенциальным оператором, потенциал которого не обладает свойством коэрцитивности. В рассматриваемом аналоге итерационного процесса из [1] используются приближения к операторам, применяемым в [1].

При построении итерационного процесса используются аппроксимации выпуклого множества выпуклыми множествами типа внутренней аппроксимации [2, с. 54]. Итерации итерационного процесса строятся с использованием решений экстремальных задач.

Пусть E — вещественное нормированное пространство с нормой $\|x\|$ для $x \in E$, E^* — сопряженное с пространством E пространство с нормой $\|y\|^* = \sup\limits_{\substack{x\in E,\\ \|x\|=1}} \langle y, x\rangle$ для линейного ограниченного функционала $y \in E^*$, где $\langle y, x\rangle$ — значение функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$, $K \subseteq E$ — выпуклое множество, $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ — такая последовательность выпуклых множеств, что $K_i \subseteq K_{i+1}$ для $i \geqslant 1$ и для любого элемента $x \in K$ существует последовательность $x_i \in K_i$ $(i \geqslant 1)$, сходящаяся в E к x, E_i — линейная оболочка множества K_i $(i \geqslant 1)$. И пусть $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Предположим, что в линейном многообразии E_0 пространства E, являющемся линейной оболочкой множества D, задана норма $\|x\|_0$ для $x \in E_0$, которая может не совпадать с нормой пространства E.

Говоря далее о пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$ будем иметь в виду линейное многообразие E_0 с нормой $\|x\|_0$ для $x \in E_0$. При этом в сопряженном с пространством E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$ пространстве E_0^* будем использовать норму $\|y\|_0^* = \sup\limits_{\substack{x\in E_0,\\ \|x\|_0=1}} \langle y, x\rangle_0$ для $y \in E_0^*$, где $\langle y, x\rangle_0$ — значение функционала $y \in E_0^*$ на элементе $x \in E_0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) заданы такие функционал
$$f : D \to R^1,$$
где R^1 — одномерное евклидово пространство, и оператор
$$F : D \to E_0^*,$$
что функционал f является ограниченным снизу на D, т. е. существует
$$d_0 \equiv \inf_{x\in D} f(x) \in R^1,$$
и выполняется неравенство
$$f(u) - f(v) \geqslant$$
$$\geqslant \langle Fu, u - v\rangle_0 - M\left(\max\left(\|u\|_0, \|v\|_0\right)\right)\|u - v\|_0^{\alpha}$$
для всех u, $v \in D$, с постоянной $\alpha > 1$ и неубывающей неотрицательной функцией $M(t)$, заданной для $t \geqslant 0$;

2) F_i: $K_i \to E_0^*$ $(i \geqslant 1)$ — такая последовательность операторов, что при всяком $i \geqslant 1$ для каждого $u \in K_i$ норма сужения функционала $F_iu - Fu \in E_0^*$ на E_{i+1} (т. е. $\sup\limits_{\substack{v\in E_{i+1},\\ \|v\|_0=1}} \langle F_iu - Fu, v\rangle_0$) не превосходит $L(\|u\|_0)\delta_i$, где $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю в R^1, а $L(t)$ — неубывающая неотрицательная функция, заданная для $t \geqslant 0$;

3) $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — такие последовательности положительных чисел, что $\eta_i \leqslant 1$ и $\beta_i + \eta_i\beta_{i+1} \leqslant \beta_{i+1}$ для $i \geqslant 1$,
$$\beta_i \to \infty,\ \eta_i \to 0,\ \mu_i \equiv L(\beta_i)(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_i +$$
$$+ M(\beta_{i+1})(\beta_i + \beta_{i+1})^{\alpha}\eta_i^{\alpha-1} \to 0 \quad (i \to \infty),$$
и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i$ расходится.

Функционал f не является коэрцитивным на множестве D, т. е. отсутствует условие
$$f(u) \to +\infty \quad (u \in D,\ \|u\|_0 \to \infty).$$

Зафиксируем произвольное число $q \in (0, 1)$.

Пусть $D_i = \{u \in K_i\colon\ \|u\|_0 \leqslant \beta_i\}$ $(i \geqslant 1)$.

Предполагая, что $D_1 \neq \varnothing$, рассмотрим последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса:

$$u_{i+1} = u_i - t_i(u_i - v_i) \quad (i \geqslant 1) \tag{1}$$

с произвольным начальным элементом $u_1 \in D_1$, где если

$$b_i \equiv \sup_{w \in D_{i+1}} \langle F_i u_i, u_i - w\rangle_0 > \mu_i,$$

то $v_i \in D_{i+1}$, $\langle F_i u_i, u_i - v_i\rangle_0 \geqslant b_i - q(b_i - \mu_i)$, а $t_i = \eta_i$; если $b_i \leqslant \mu_i$, то $t_i = 0$ и $v_i = 0$.

Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) строится с использованием вспомогательных экстремальных задач об отыскании чисел b_i $(i \geqslant 1)$.

В [1] итерационный процесс строится при $F_i = F$ для каждого $i \geqslant 1$.

Теорема 1. Для последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) имеем:

1) последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — релаксационная, т. е. $f(u_i) \geqslant f(u_{i+1})$ для каждого $i \geqslant 1$;
2) $\liminf\limits_{i\to\infty} b_i \leqslant 0$ ($\liminf$ — нижний предел). □

Доказательство. Для каждого $i \geqslant 1$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} f(u_i) - f(u_{i+1}) \geqslant{}& \\ \geqslant{}& t_i\langle Fu_i, u_i - v_i\rangle_0 - M(\beta_{i+1})t_i^{\alpha}(\beta_i + \beta_{i+1})^{\alpha} \geqslant \\ \geqslant{}& t_i(b_i - q(b_i - \mu_i)) + t_i\langle Fu_i - F_i u_i, u_i - v_i\rangle_0 - \\ &- M(\beta_{i+1})t_i^{\alpha}(\beta_i + \beta_{i+1})^{\alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всякого $i \geqslant 1$ имеем неравенство $f(u_i) - f(u_{i+1}) \geqslant \theta_i$, где $\theta_i = (1-q)(b_i - \mu_i)\eta_i$ при $b_i > \mu_i$, $\theta_i = 0$ при $b_i \leqslant \mu_i$. Так как

$$f(u_1) - f(u_{i+1}) \geqslant \sum_{j=1}^{i} \theta_j,$$

то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \theta_i$ сходится. А если предположим, что $\liminf\limits_{i\to\infty} b_i \geqslant b > 0$, то получим расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \theta_i$. Теорема 1 доказана.

Говоря далее о потенциальности оператора F на множестве D с потенциалом f, будем иметь в виду следующее: функционал f определён на открытом множестве G из пространства E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$, содержащем множество D, дифференцируем по Гато на D в пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$ и $Fu = \operatorname{grad} f(u)$ для $u \in D$.

Теорема 2. Пусть: 1) оператор F монотонен на множестве D, т. е.

$$\langle Fu - Fv, u - v\rangle_0 \geqslant 0$$

для $u, v \in D$; 2) оператор F потенциален на множестве D с потенциалом f.

Тогда последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) минимизирует функционал f на D, т. е. $f(u_i) \to d_0$ при $i \to \infty$. □

Доказательство. В силу заключения 2) теоремы 1 существует такая подпоследовательность $\{u_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1), что

$$\lim_{j\to\infty} b_{i_j} \leqslant 0.$$

Пусть $v_j = u_{i_j}$, $Q_j = D_{i_j}$ $(j \geqslant 1)$. В силу $Q_j \subseteq Q_{j+1}$ для $j \geqslant 1$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j = D$ существует такая последовательность $z_j \in Q_j$ $(j \geqslant 1)$, что $f(z_j) \to d_0$ при $j \to \infty$. Имеем $\limsup\limits_{j\to\infty} \alpha_j \leqslant 0$ ($\limsup$ — верхний предел), где $\alpha_j = \langle Fv_j, v_j - z_j\rangle_0$ $(j \geqslant 1)$. И т. к. в силу леммы 8.3 в [3] имеем неравенство $f(v_j) \leqslant f(z_j) + \alpha_j$ для каждого $j \geqslant 1$, то $f(v_j) \to d_0$ при $j \to \infty$, что в силу заключения 1) теоремы 1 влечёт $f(u_i) \to d_0$ при $i \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если выполняются условия теоремы 2, то функционал f выпуклый на множестве D (см. [3, с. 100]) и непрерывный на множестве D в пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$.

Из теоремы 2 вытекают три следствия, в которых функционал f выпуклый на множестве D, ибо в следствиях выполняются условия теоремы 2.

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 2, то

$$\limsup_{i\to\infty} B_i \leqslant 0,$$

где $B_i \equiv \sup\limits_{w \in D_{i+1}} \langle Fw, u_i - w\rangle_0$ $(i \geqslant 1)$. □

Действительно, для каждого $i \geqslant 1$ имеем $f(u_i) - f(u) \geqslant \langle Fu, u_i - u\rangle_0$ для всех $u \in D$ (см. [3, с. 101]). Следовательно,

$$f(u_i) - \inf_{u \in D_{i+1}} f(u) \geqslant B_i \quad (i \geqslant 1).$$

Отсюда в силу теоремы 2 имеем $\limsup\limits_{i\to\infty} B_i \leqslant 0$.

Следствие 2. Если выполняются условия теоремы 2, функционал f определён на K и из $\|w_i - w\| \to 0$ при $i \to \infty$, $w_i \in K_i$ $(i \geqslant 1)$ и $w \in K$ следует $\liminf\limits_{i\to\infty} f(w_i) \leqslant f(w)$, то последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) минимизирует функционал f на $K \cup D$. □

Следствие 2 вытекает из теоремы 2, т. к. $d_1 \geqslant d_0$, где $d_1 = \inf\limits_{u\in K} f(u)$.

Следствие 3. Если выполняются условия следствия 2 и $D \subseteq K$, то последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) минимизирует функционал f на K. □

Теорема 1 является результатом о релаксационности последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1), а теорема 2 и следствия 2, 3 — это результаты о том, что последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) минимизирующая.

Отметим, что следствие 1 представляет самостоятельный интерес.

Вышеприведённые абстрактные результаты можно использовать при исследовании краевых задач Дирихле, сводящихся к вариационному неравенству или уравнению в нерефлексивном банаховом пространстве с монотонным потенциальным оператором, потенциал которого не является коэрцитивным (см. [1, 4, 5]). Часто эти краевые задачи связаны с локально коэрцитивными векторными полями [6]. И в исследовании краевых задач, связанных с локально коэрцитивными векторными полями, важное место занимают априорные оценки производных решений (см. [5, 6] и статью [7], в которой исследуется оператор средней кривизны).

В заключение приведём результат, в котором предполагается, что минимум функционала f на множестве D достигается. А именно справедливо следующее утверждение, в котором последовательность итерационного процесса (1) сходится в пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$ к элементу $u_0 \in \in D$, на котором достигается минимум функционала f на множестве D.

Утверждение 1. Пусть:

1) имеется такой элемент $u_0 \in D$, что $f(u_0) = d_0$;
2) для любых $x, h \in E_0$, таких, что $x + th \in D$ для $t \in [0, 1]$, функция $\langle F(x + th), h\rangle_0$ интегрируема по t на $[0, 1]$ и
$$\langle F(x + h) - Fx, h\rangle_0 \geqslant \|h\|_0 \gamma\left(\|h\|_0\right),$$
где $\gamma(t)$ — неотрицательная функция, интегрируемая на $[0, R]$ для любого $R > 0$, такая, что функция
$$c(R) = \int\limits_0^R \gamma(t)\, dt$$
возрастает;
3) оператор F потенциален на множестве D с потенциалом f.

Тогда последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) сходится в пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_0$ к u_0. □

Действительно, условия 2), 3) утверждения 1 обеспечивают выполнение условий теоремы 2. Следовательно, последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ итерационного процесса (1) минимизирует функционал f на множестве D.

Из неравенства $f(u) - f(u_0) \geqslant c\left(\|u - u_0\|_0\right)$, выполняющегося для каждого элемента $u \in D$ [1, с. 143–144], имеем неравенства
$$f(u_i) - f(u_0) \geqslant c\left(\|u_i - u_0\|_0\right) \quad (i \geqslant 1),$$
с использованием которых получаем выполнение заключения утверждения 1. Утверждение 1 доказано.

Отметим, что в утверждении 1 u_0 является единственной точкой абсолютного минимума функционала f на D и единственным решением уравнения $Fx = 0 \quad (x \in D)$.

Замечание 2. Если $K = E$ и K_i является линейным многообразием для каждого $i \geqslant 1$, то при $E_0 = D$ и $E_i = K_i$ $(i \geqslant 1)$ множество $D_1 \neq \varnothing$ и следствия 2 и 3 совпадают.

Литература

1. *Фонарёв А.А.* Об одном новом методе решения вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 11. – С. 53–61.

2. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979.

3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972.

4. *Фонарев А.А.* Об одном методе решения задачи о минимальных поверхностях // Аналитические и конструктивные методы исследования дифференциальных уравнений: сб. научн. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1993. – С. 199–204.

5. *Фонарёв А.А.* О решении одной задачи с препятствием // Проблемы современной математики в задачах физики и механики: междувед. сб. научн. тр. – М.: МФТИ, 1989. – С. 132–135.

6. *Киндерлерер Д., Стампаккъя Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983.

7. *Фонарёв А.А.* О некотором свойстве строго монотонных нелинейных операторов в нормированных пространствах // Научный вестник МГТУ ГА. Серия Математика и физика. – 2007. – № 114. – С. 56–61.

Поступила в редакцию 11.01.2011