УДК 519.837.3

Е.В. Гасникова, Ю.В. Дорн

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О стохастической марковской динамике, приводящей к равновесию Нэша–Вардропа в модели распределения потоков

Описывается возможная динамика, приводящая к равновесию Нэша–Вардропа в модели распределения потоков. Следует заметить, что сделанные выводы базируются в основном на результатах численных экспериментов, которые показали в ряде игр очень быструю сходимость предложенной стохастической (гиббсовской) марковской динамики наилучших ответов в соответствующей эволюционной игре к равновесию Нэша.

Ключевые слова: эволюционные игры, равновесие Нэша, парадокс Брайеса, принципы Дж. Г. Вардропа, эффективность по Парето, алгоритм Григориадиса–Хачияна.

Ориентированный граф $\Gamma = (V,E)$ представляет собой транспортную сеть города (V– узлы сети (вершины), $E \subset V \times V$ — дуги сети (рёбра графа)). Пусть $W = \{w = (i,j) : i,j \in V\}$ — множество пар источник–сток; $p = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ — путь из v_1 в v_m, если $(v_k,v_{k+1}) \in E$, $k = 1, ..., m-1$; P_w — множество путей, отвечающих корреспонденции $w \in W$; $P = \bigcup_{w \in W} P_w$ — совокупность всех путей в сети Γ; x_p — величина потока по пути p, $x = \{x_p : p \in P\}$; $G_p(x)$ — удельные затраты на проезд по пути p, $G(x) = \{G_p(x) : p \in P\}$; y_e — величина потока по дуге e:

$$y_e = \sum_{p \in P} x_p \delta_{pe}, \quad \text{где} \quad \delta_{pe} = \begin{cases} 1, e \in p, \\ 0, e \notin p, \end{cases}$$

$\tau_e(y_e)$ — удельные затраты на проезд по дуге e (как правило, возрастающие, выпуклые, гладкие функции), при этом естественно считать, что $G_p(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(y_e)\delta_{pe}$. Если $\tau_e(y_e)$ — возрастающие функции, то отображение $G(x)$ — строго монотонное. Заметим, что в приложениях часто требуется учитывать и затраты на прохождения вершин графа (в свою очередь эти затраты могут зависеть, вообще говоря, от величин всех потоков, проходящих через каждую рассматриваемую вершину). Пусть также известны потоки корреспонденций d_w, $w \in W$. Тогда вектор x, характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве:

$$X = \left\{ x \geqslant 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W \right\}.$$

Это множество может иметь и другой вид, если дополнительно учитывать, например, конечность пропускных способностей рёбер (ограничения сверху на y_e).

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w \in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w \gg 1$), набор однотипных игроков (сидящих на корреспонденции w). Множеством чистых стратегий каждого такого игрока является P_w, а выигрыш (потери со знаком минус) определяются формулой $-G_p(x)$ (игрок выбирает путь следования $p \in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также немного зависят $|P_w|$ компонент вектора x и, следовательно, сам выигрыш $-G_p(x)$). Тогда, считая отображение $G(x)$ непрерывным и строго монотонным (этого достаточно), можно показать, что отыскание (единственного!) равновесия Нэша (1951) $x^* \in X$ (макроописание равновесия) равносильно решению задачи дополнительности (принцип Дж. Г. Вардропа (1952)), что в свою очередь равносильно решению вариационного неравенства:

$$\forall\ w \in W,\ p \in P_w \to x_p^* \cdot (G_p(x^*) - \min_{q \in P_w} G_q(x^*)) =$$

$$= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ x \in X \to \langle G(x^*), (x - x^*) \rangle \geqslant 0.$$

Вариационное неравенство можно переписать как проекционное уравнение

$$x^* = \Pi_X(x^* - \lambda G(x^*)), \quad \lambda > 0,$$

где $\Pi_X(x^* - \lambda G(x^*))$ — такая «точка» множества X, которая доставляет минимум функционалу расстояния от точки $x \in X$ до фиксированной точки $x^* - \lambda G(x^*)$. Выписанное проекционное уравнение можно далее численно решать, например, с помощью метода простой итерации $x^{n+1} = \Pi_X(x^n - \lambda G(x^n))$. Более того, в рассматриваемом случае задача отыскания равновесия Нэша–Вардропа сводится к решению следующей задачи выпуклого программирования [1]:

$$\sum_{e \in E} \int\limits_0^{\sum_{p \in P} x_p \delta_{pe}} \tau_e(z) dz \to \min_{x \in X}.$$

[20]Например, шаг с периодом в день можно проинтерпретировать как выбор утром маршрута следования (пути) из дома на работу, исходя из опыта вчерашнего дня. Заметим, что информацию о $G_p(x(n))$ водители (игроки) черпают из открытых источников типа Яндекс-пробки, а множитель $(x_p(n) + 1)$ определяется исходя из случайного опроса соседей, знакомых, коллег и т.п.

В данной заметке предлагается возможная динамика в этой игре, приводящая к равновесию Нэша–Вардропа. Свой путь на $(n+1)$-м шаге[20] игрок, сидящий на корреспонденции w, выбирает согласно смешанной стратегии (в независимости от всех остальных): с вероятностью

$$Prob_p^w(n+1) = \gamma_n \cdot (x_p(n)+1)\times$$
$$\times \exp(-G_p(x(n))/T_n)/Z_n^w, \quad w \in W,$$

выбрать путь $p \in P_w$ $(0 < \gamma_n \leqslant 1)$, а с вероятностью $1-\gamma_n$ действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем n-м шаге. Здесь $x_p(n)$ — количество игроков, сидящих на корреспонденции w и выбравших на n-м шаге стратегию $p \in P_w$, а

$$Z_n^w = \sum_{p \in P_w} \gamma_n \cdot (x_p(n)+1)\exp(-G_p(x(n))/T_n).$$

Множитель $(x_p(n)+1)$ характеризует желание имитировать, а также надежность использования этой стратегии. Именно этот множитель подмечает специфику рассматриваемой задачи (без него сходимость будет в общем случае не к равновесию Нэша–Вардропа) и отличает предложенную в статье динамику от многих других (см. ниже краткий обзор). Параметр γ характеризует «консерватизм» («ленивость»), чем меньше γ, тем более консервативный игрок; «температура» T характеризует отношение к риску («горячность»), чем больше температура, тем более «горячий игрок», склонный к более рискованным действиям.

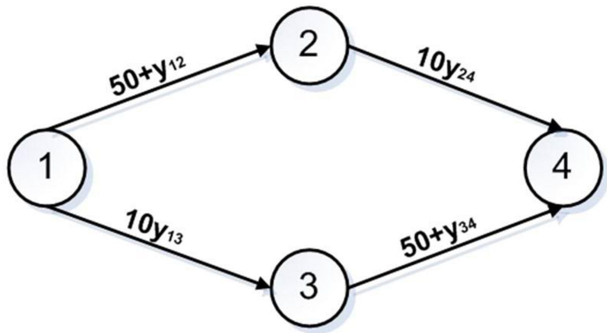
Как показали разнообразные численные эксперименты, часто вполне разумно выбирать $\gamma_n \sim 1/n$. При таком выборе γ_n наблюдается сходимость при наиболее общих условиях относительно T (вне зависимости от точки старта). Строго говоря, наблюдается сходимость не к равновесию, а к некоторой его окрестности, уменьшающейся с уменьшением T. Стоит обратить внимание на высокую эффективность предложенной процедуры «нащупывания равновесия» с точки зрения количества итераций. Иначе говоря, на предложенный итерационный процесс можно смотреть просто как на эффективный способ численного нахождения равновесия Нэша–Вардропа.

Введение в динамику стохастичности сближает предложенный подход с поиском так называемых «стохастических равновесий в транспортных сетях» [2], с другой стороны, подход данной статьи принципиально от них отличается тем, что предполагает знание транспортных расходов по маршрутам (используется достоверная информация вчерашнего дня), на основе которых производится рандомизированный выбор. В стохастическом же равновесии водитель узнает лишь случайную оценку времени проезда по каждому из маршрутов и затем выбирает маршрут с минимальным временем.

Предложенную схему можно трактовать скорее как стохастическую динамику наилучших ответов в эволюционной (популяционной) игре [3]–[5], при этом имеется много общего с концепциями quantal response equilibria [6] (используется похожая рандомизация) и minority games [7] (наблюдаются похожие колебания около равновесия). Также близким к предложенному итерационному процессу является концепция генетических алгоритмов [8] и предложенный на их основе эффективный вероятностный (с гиббсовским распределением) алгоритм Григориадиса–Хачияна (1995) [9] поиска ε приближенного равновесия Нэша в матричной игре $n\times n$ за $O(n \cdot (\log^2 n)/\varepsilon^2)$ операций с плавающей точкой. Стоит заметить, что в классе детерминированных алгоритмов необходимо осуществлять не менее $\sim n^2$ таких операций.

В заключение рассмотрим пример, демонстрирующий, что в результате строительства новой дороги новое равновесие Нэша–Вардропа окажется не эффективным по Парето и будет строго хуже, чем то, которое было до строительства. Тем не менее предложенная выше марковская динамика наилучших ответов приводит именно к такому, не оптимальному по Парето, равновесию.

Пример (парадокс Брайеса, 1968). Пусть корреспонденция $x_{14} = 6$ (тысяч автомобилей/час). Вес ребра (удельные затраты на проезд по этому ребру) есть время движения по ребру (в минутах), если поток через ребро есть y_{ij} (тысяч автомобилей/час). Например, в случае 2: $y_{24} = x_{124} + x_{1324}$ (рис. 1). Естественно считать, что время движения — возрастающая функция потока.



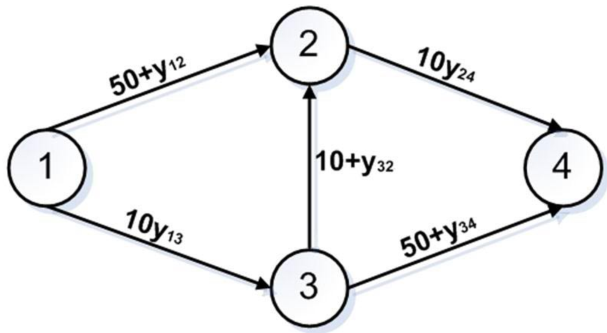


Рис. 1. Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$ (полное время в пути $T = 83$ мин). Случай 2: $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$ (полное время в пути $T = 92$ мин)

Оба равновесия Нэша–Вардропа (в случае 1 и 2) являются притягивающими положениями равновесия описанной выше динамики (положили $\gamma \sim 1$, $T \sim 15 - 35$), рис. 2, 3 (для случая 2).

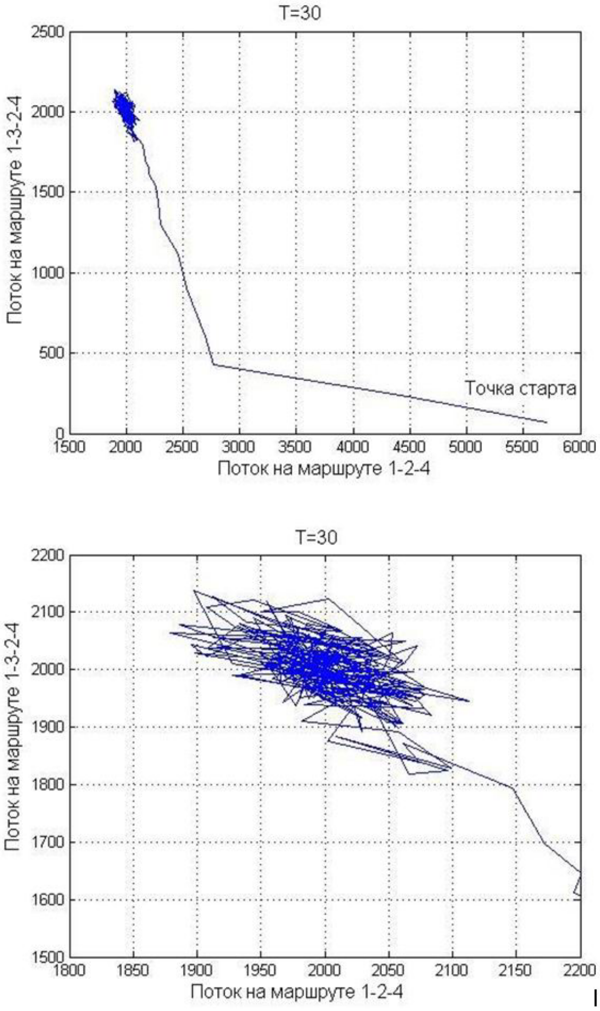


Рис. 2

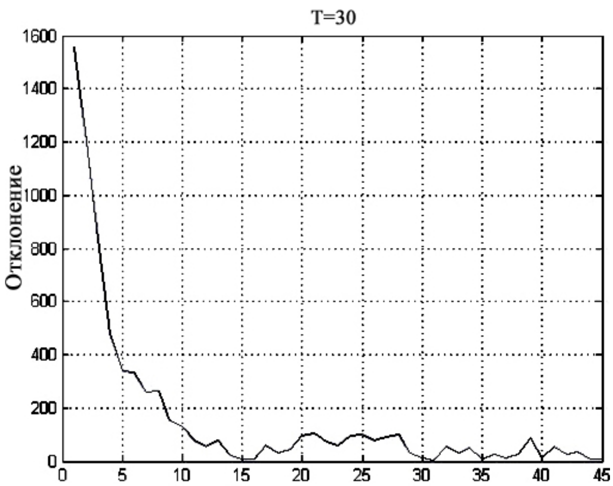


Рис. 3

Более подробно о моделях распределения потоков и связанных с ними задачах можно прочитать, например, в книгах [1, 2, 10]. Значительно более подробные материалы, посвященные эффективным численным методам отыскания равновесий Нэша–Вардропа и решениям задач выпуклого программирования, содержатся в следующих электронных ресурсах [11].

Авторы выражают благодарность за ряд ценных замечаний А.В. Гасникову, И.С. Меньшикову, Е.А. Нурминскому, С.П. Тарасову, А.А. Шананину, В.И. Швецову.

Работа поддержана грантами РФФИ № 10-07-00620-а, 10-01-00321-а, 11-01-00494-а. Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (меропр. 1.3.1, НК-215П, П1490).

Литература

1. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков; учебное пособие / под ред. А.В. Гасникова с приложениями М.Л. Бланка, Е.В. Гасниковой, А.А. Замятина и В.А. Малышева, А.В. Колесникова, А.М. Райгородского. М.: МФТИ, 2010.

2. *Sheffi Y.* Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods. N.J.: Prentice–Hall Inc., Englewood Cliffs, 1985.

3. *Foster D., Young P.* Stochastic evolutionary game dynamics // Theoretical population biology. 1990. V. 38. № 2.

4. *Cressman R.* Evolutionary game theory and extensive form games. Cambridge: Mass. MIT Press, 2003.

5. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary game dynamics // Bulletin of the AMS. 2003. V. 40, № 4. P. 479–519.

6. *McKelvey R.D., Palfrey T.R.* Quantal response equilibria for extensive form games // Experimental economics, 1998. V. 1. P. 9–41.

7. *Marsili M.* Toy models of markets with heterogeneous interacting agents // e-print. — www.unifr.ch/econophysics/

8. *Fogel D.B.* Evolutionary Computation: Towards a New Philosophy of Machine Intelligence. — New York: IEEE Press, 2000.

9. *Хачиян Л.Г.* Избранные труды. [сост. С.П. Тарасов] М.: МЦНМО, 2009.

10. *Стенбринк П.А.* Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт, 1981.

11. http://www2.isye.gatech.edu/ ∼ nemirovs / — http://www.core.ucl.ac.be/staff/biosketchNesterov.html — http://elis.dvo.ru/ ∼ nurmi /

Поступила в редакцию 15.10.2010.