УДК 517.95

Г.И. Марчук[1], *В.И. Агошков*[1,2], *В.М. Ипатова*[2]

[1]Институт вычислительной математики РАН,
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Теория разрешимости начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений океана*

Настоящая работа представляет собой обзор достижений по исследованию разрешимости начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений океана. Дается исторический очерк и описание наиболее ранних результатов. Содержатся последние результаты о существовании слабых решений и разрешимости задач ассимиляции данных для основных уравнений океана с условием свободной поверхности на верхней границе области. Представлены теоремы о существовании и единственности сильных решений для упрощенной системы основных уравнений океана.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, модели динамики океана, разрешимость, обратные и вариационные задачи, задачи ассимиляции данных.

I. Введение

Уравнения в частных производных лежат в основе математического описания самых разнообразных природных явлений и процессов. Особое место занимают уравнения геофизической гидродинамики и модели гидротермодинамики океана как в виду их известной теоретической сложности, так и по причине их большого практического значения. Говоря об истоках и предпосылках математической теории, нельзя не упомянуть работы С.Л. Соболева по применению методов функционального анализа к исследованию уравнений в частных производных. Разработанная им теория пространств функций с обобщенными производными [1], вошедших в науку как *пространства Соболева*, сыграла исключительную роль в формировании современных математических воззрений. На основе методов функциональных пространств, предложенных С.Л. Соболевым, были получены известные неравенства и теоремы вложения, позволяющие исследовать существование и регулярность решений дифференциальных уравнений. Он ввел понятие *обобщенного решения* для уравнений с частными производными [2, 3] и дал первое (1935) строгое определение обобщенных функций, с помощью которых исследовал разрешимость некоторых краевых задач. Одной из основ гидродинамики является система уравнений Навье–Стокса, которая описывает движение жидкости с учетом вязкости. О.А. Ладыженская [4] исследовала существование обобщенных решений для двухмерной системы Навье–Стокса и доказала ее глобальную однозначную разрешимость. Разработанные ею *методы априорных оценок и энергетических неравенств* стали неотъемлемой частью современных доказательств разрешимости для моделей гидродинамики и во многом определили развитие этой области математики. К числу важнейших теоретических предпосылок следует также отнести метод приближенного построения решений дифференциальных уравнений, впервые высказанный И.Г. Бубновым (1913) и обобщенный Б.Г. Галеркиным (1915) в работе [5]. В настоящее время *метод Бубнова–Галеркина* является одним из основных приемов доказательства существования решений начально-краевых задач.

Изучение нестационарных уравнений динамики бароклинного океана было начато Г.И. Марчуком (1967) в связи с практическими целями построения численных методов моделирования и прогноза погоды. Им была поставлена задача об океанических циркуляциях и предложен метод построения ее решений, основанный на сведении трехмерной задачи к более простым двумерным задачам об определении коэффициентов разложения искомой функции по специально выбранному базису [6, 7]. М.А. Бубнов и А.В. Кажихов [8] доказали сходимость этих разложений и получили теоремы существования и единственности для уравнений бароклинного океана в линейных постановках. Математическое исследование моделей океанографии было продолжено в работах Ю.Я. Белова [9–11], М.А. Бубнова [12, 13], А.В. Кажихова [14], А.А. Кордзадзе [15, 16], В.И. Сухоносова [17–19] и др. В 1992 году Ж.-Л. Лионс, Р. Темам и С. Ванг [20] рассмотрели систему основных уравнений океана и доказали для нее существование глобальных слабых решений.

Тенденцией настоящего времени стал интерес к решению *задач ассимиляции данных наблюдений* для моделей динамики океана. Эти задачи

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133).

имеют следующую общепринятую вариационную трактовку. Определяется функционал стоимости, измеряющий расхождение между наблюдаемыми величинами и результатами моделирования, после чего разыскиваются те неизвестные характеристики модели, для которых функционал стоимости принимает минимальное значение. Математическое исследование задач ассимиляции данных в применении к сложным нелинейным моделям океанографии невозможно без предварительной разработки теории разрешимости самих этих моделей. Доказательство существования решений вариационных задач обычно базируется на использовании *методов регуляризации* А.Н. Тихонова [21–23].

Настоящая работа представляет собой обзор достижений в области построения математической теории начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений динамики океана. Обзор результатов, касающихся квазигеострофических уравнений циркуляции океана и моделей океанских приливов, можно найти в работе [24]. Для знакомства с результатами западных исследователей мы можем также порекомендовать читателю монографии [25, 26] и имеющуюся в них библиографию.

Для краткости мы будем далее использовать обозначения $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ и т. п.

II. Уравнения и функциональные пространства

В основе моделей общей циркуляции океана лежит система уравнений гидродинамики в приближениях гидростатики и Буссинеска. При записи этих уравнений также используются предположения о том, что Земля имеет форму шара и ускорение свободного падения $g = 9.82$ m/c^2 постоянно. Приближение гидростатики означает, что вертикальный компонент градиента давления точно уравновешивается силой тяжести. Приближением Буссинеска называется предположение о том, что изменения плотности воды в океане малы по сравнению с самой плотностью, поэтому плотность ρ можно заменить на ее среднее значение ρ_0 во всех членах, за исключением силы тяжести и уравнения состояния. Кроме того, используются и другие упрощения: не учитывается изменение расстояния до центра Земли при изменении вертикальной координаты в пределах толщи океана, поэтому уравнения записываются не в полной сферической системе координат, а в «цилиндре над сферой постоянного радиуса»; пренебрегают вкладом, который вертикальная составляющая скорости вносит в силы Кориолиса. К неизвестным переменным модели относятся три компонента скорости u, v, w, давление P, температура T, соленость S и плотность ρ. Обозначим за $f = f(x, y)$ параметр Кориолиса и будем считать, что вертикальная ось z направлена к центру Земли, тогда основные уравнения океана в декартовой системе координат записываются как

$$d_t u - fv - A^u - \partial_z (\nu u_z) = -\frac{1}{\rho_0} P_x, \qquad (1)$$

$$d_t v + fu - A^v - \partial_z (\nu v_z) = -\frac{1}{\rho_0} P_y, \qquad (2)$$

$$P_z = \rho g, \qquad (3)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \qquad (4)$$

$$d_t T - A^T - \partial_z (\nu_T T_z) = 0, \qquad (5)$$

$$d_t S - A^S - \partial_z (\nu_S S_z) = 0, \qquad (6)$$

$$\rho = \rho(T, S, P), \qquad (7)$$

где $d_t = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$, $A^* = \partial_x(\mu_* \partial_x *) + \partial_y(\mu_* \partial_y *)$, $\mu_u = \mu_v = \mu$ и $\nu_u = \nu_v = \nu$ — коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости, $\mu_T, \nu_T, \mu_S, \nu_S$ — коэффициенты диффузии температуры и солености. В этой системе уравнения движения (1) и (2) выводятся из закона сохранения импульса для жидкости, (3) — это уравнение гидростатики, уравнение (4) называется уравнением неразрывности, оно представляет собой закон сохранения массы воды, уравнения (5), (6) описывают перенос и диффузию тепла и соли в океане, последнее уравнение (7) — это уравнение состояния, в котором явной формулой задается зависимость плотности воды от температуры, солености и давления.

Заметим, что в литературе основные уравнения океана называют также примитивными (primitive) уравнениями. Как известно, сложность исследования системы (1) – (7) связана с ее сильной нелинейностью.

Мы будем обозначать через:

- $W_2^n(G) \equiv H^n(G)$, $n \in \mathbb{N}$, пространства Соболева функций, квадратично интегрируемых в G со своими производными до порядка n включительно;
- $W_2^{-n}(G) \equiv H^{-n}(G)$ сопряженные с $W_2^n(G)$ пространства;
- $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ пространство функций, принадлежащих $W_2^1(G)$ и равных нулю на границе G;
- $W_{2,0}^2(G) = W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

III. Исторический экскурс

В 1967 году Г.И. Марчук [6] рассмотрел следующую линеаризованную систему уравнений динамики бароклинного океана:

$$u_t - fv = -\frac{P_x}{\rho}, \quad v_t + fu = -\frac{P_y}{\rho},$$

$$P_z = \rho g, \quad u_x + v_y + w_z = 0,$$

$$T_t + wT_z = 0, \quad S_t + wS_z = 0, \quad \rho = \rho(T, S)$$

с граничными условиями $w = \eta_t$ на свободной поверхности океана при $z = \eta(x, y, t)$ и $w = 0$ на плоском дне океана при $z = H$ и обычными начальными условиями $u = u^0$, $v = v^0$, $T = T^0$, $S = S^0$ при $t = 0$.

Поскольку возвышение свободной поверхности мало по сравнению с глубиной океана, то граничное условие на поверхности можно записать при $z = 0$, а не при $z = \eta(x, y, t)$. Кроме того, существует очевидная связь между атмосферным давлением P_0, которое предполагалось постоянным на поверхности океана, возвышением свободной поверхности η и давлением P внутри океана. Это условие гидростатического равновесия $P = P_0 - \rho g \eta$ при $z = 0$. Дифференцируя данное уравнение по t и используя граничное условие $w = \eta_t$ при $z = 0$, он получил равенство $P_t + g\rho w = 0$ при $z = 0$.

Предполагалось, что каждая из функций ρ, P, T, S представляется в виде суммы двух величин: первое слагаемое зависит только от z и обозначается как $\bar{\rho}$, $\bar{P}$, $\bar{T}$, $\bar{S}$, а второе слагаемое в первом приближении «мало» и обозначается штрихами: ρ', P', T', S'. Кроме того, он обозначил за $\Gamma(z) = \bar{S}_z \partial\rho/\partial\bar{S} + \bar{T}_z \partial\rho/\partial\bar{T} > 0$. В конечном счете он пришел к системе:

$$\begin{gathered} u_t - fv = -P'_x/\bar{\rho}, \quad v_t + fu = -P'_y/\bar{\rho}, \\ P'_z = \rho' g, \quad u_x + v_y + w_z = 0, \quad \rho'_t + \Gamma w = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

с граничными условиями $P'_t + g\bar{\rho} w = 0$ при $z = 0$, $w = 0$ при $z = H$.

Далее Г.И. Марчук преобразовал эту систему к уравнению

$$\left[\left(\partial_t^2 + f^2\right) \frac{\bar{\rho}}{g} \partial_z \frac{1}{\Gamma} \partial_z + \Delta \right] P'_t + \beta P'_x = 0$$

с краевыми условиями $(\partial_z - \Gamma/\bar{\rho})\, P'_t = 0$ при $z = 0$, $P'_{zt} = 0$ при $z = H$.

Он ввел собственные функции ϕ_m оператора $-d_z \frac{1}{\Gamma} d_z$ с граничными условиями $\phi_z/\Gamma - \phi/\bar{\rho} = 0$ при $z = 0$ и $\phi_z = 0$ при $z = H$. Далее неизвестная функция ищется в виде ряда $P'(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, y, t) \phi_n(z)$, то есть задача сводится к решению системы

$$\left[\Delta - \frac{\lambda_n \bar{\rho}}{g} \left(\partial_t^2 + f^2\right) \right] \partial_t P_n + \beta \partial_x P_n = 0,$$

$$\partial^2_{\nu t} P_n = f \partial_\tau P_n \text{ на } \Gamma_s,$$

где Γ_s — боковая часть границы, ν и τ — единичные векторы нормали и касательной к Γ_s.

В [7] Г.И. Марчук продолжил исследование этой задачи и рассмотрел ту же систему в цилиндрической области $\Omega = M \times [0, 1]$ пространства $\mathbb{R}^3$, где M — область с гладкой границей в плоскости (x, y), с граничными и начальными условиями:

$$\begin{gathered} P'_t + g\bar{\rho} w = 0 \text{ при } z = 0, \; w = 0 \text{ при } z = 1, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_s, \\ u = u^0, \quad v = v^0, \quad P' = P^0 \text{ при } t = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Он предложил раскладывать решения u, v, w, P', ρ' в ряды по рассмотренному ранее базису и доказал сходимость итерационного численного метода для вычисления коэффициентов разложения. Сходимость этих рядов и существование и единственность решения системы были изучены в 1970 году М.А. Бубновым и А.В. Кажиховым [8]. Они доказали следующую теорему.

Теорема 1 ([8]). Пусть $\Gamma(z) \in \mathcal{C}^m[0, 1]$, $m \geqslant 1$. Определим пространство $V_2^m(\Omega)$ как замыкание по норме $W_2^m(\Omega)$ множества функций из $\mathcal{C}^m(\Omega)$, ряды Фурье которых по вышеуказанному специальному базису дифференцируемы почленно до порядка m. Пусть $\{u^0, v^0\} \in V_2^{m-1}(\Omega) \cap W_2^m(\Omega)$, $P^0 \in V_2^m(\Omega)$, $P_z^0 \in W_2^m(\Omega)$, функция f имеет ограниченные производные до порядка m, а граница $\Gamma_s \in \mathcal{C}^{m+1}$. Тогда решение задачи (8) – (9) существует и единственно. Это решение обладает свойствами $u, v, P', \rho' \in W_2^m(\Omega \times [0, T])$, $w_z \in W_2^{m-1}(\Omega \times [0, T])$ и может быть представлено в виде сходящихся в этих нормах рядов. При $m = 4$ решение является классическим. □

В 1979 году Ю.Я. Белов [11] рассмотрел стационарный случай для одной из моделей, предложенных Г.И. Марчуком. Используя метод эллиптической регуляризации, он доказал существование и единственность решения. М.А. Бубнов [12] исследовал почти такую же задачу, но с коэффициентом вертикальной вязкости, зависящим от z, то есть с $\partial_z(\nu \partial_z)$ вместо $\nu \partial_z^2$ в уравнениях для u и v. Он использовал граничные условия $u_z = v_z = \rho_z = 0$ при $z = 0$ и $u = v = \rho_z = 0$ при $z = H$ и ставил на боковых границах краевые условия различных типов. Он получил результаты о существовании и единственности решения эволюционной задачи и исследовал поведение решения при стремлении времени к бесконечности. В [11, 12] доказано существование решения стационарной модели, сходимость эволюционных решений к стационарному и получены оценки скорости этой сходимости.

Многие из перечисленных результатов, а также некоторые другие представлены в монографиях М.А. Бубнова [13], А.В. Кажихова [14] и А.А. Кордзадзе [16].

В те же годы было начато исследование нелинейных моделей динамики океана. А.А. Кордзадзе [16] рассмотрел систему, в которой уравнение для плотности ρ было заменено на два уравнения, для температуры T и для солености S:

$$\begin{gathered}
d_t u - lv + \frac{P_x}{\rho_0} = \mu\Delta u + \partial_z(\nu u_z), \\
d_t v + lu + \frac{P_y}{\rho_0} = \mu\Delta v + \partial_z(\nu v_z), \\
P_z = \rho g,\ u_x + v_y + w_z = 0,\ \rho = \alpha_T T + \alpha_S S, \\
d_t T + \gamma_T w = \mu_T \Delta T + \partial_z(\nu_T T_z), \\
d_t S + \gamma_S w = \mu_S \Delta S + \partial_z(\nu_S S_z)
\end{gathered} \tag{10}$$

с граничными условиями:

$$\begin{gathered}
\nu u_z = -\tau_1/\rho_0, \quad \nu v_z = -\tau_2/\rho_0 \text{ при } z = 0, \\
w = 0, \quad T = T_0^*, \quad S = S_0^* \text{ при } z = 0, \\
u_z = v_z = w = 0 \text{ при } z = H, \\
T = T_H^*, \quad S = S_H^* \text{ при } z = H, \\
u = v = \partial_{\mathbf{n}} T = \partial_{\mathbf{n}} S = 0 \text{ на } \Gamma_s.
\end{gathered} \tag{11}$$

Он показал, что верна следующая

Теорема 2 ([16]). Если система (10) – (11) имеет решение в пространстве $\mathcal{C}^1(0,t)$, причем $u, v, T, S \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ и $P, w \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, то это решение единственно. □

В 1978 году Ю.Я. Белов [9] рассмотрел стационарную нелинейную задачу. Используя технику эллиптической регуляризации, он доказал существование решения в соответствующих функциональных пространствах.

В.И. Сухоносов [17] исследовал модель (10) с постоянными коэффициентами вертикальной вязкости, с граничными условиями:

$$\begin{gathered}
u_z = v_z = w = T_z = S_z = 0 \text{ при } z = 0, \\
u = v = w = T = S = 0 \text{ при } z = H, \\
u = v = \partial_{\mathbf{n}} T = \partial_{\mathbf{n}} S = 0 \text{ на } \Gamma_s
\end{gathered} \tag{12}$$

и с начальными условиями при $t = 0$:

$$u = u_0, v = v_0, T = T_0, S = S_0. \tag{13}$$

Он доказал, что верна

Теорема 3 ([17]). Пусть $u_0, v_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $T_0, S_0 \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяют граничным условиям (12). Тогда существует единственное решение задачи (10), (12) – (13) в $Q = \Omega \times (0, \mathcal{T})$ для каждого $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^+$ такое, что

$$u, v, T, S \in L^\infty(0, \mathcal{T}; W_2^1(\Omega)) \cap L^2(0, \mathcal{T}; W_2^2(\Omega)),$$

$$u_t, v_t, T_t, S_t \in L^2(0, \mathcal{T}; L^2(\Omega)),$$

$$\xi_x, \xi_y \in L^2(0, \mathcal{T}; L^2(\Gamma_u)),$$

где ξ — давление на поверхности, определяемое равенством $P(x,y,z,t) = g\int\limits_0^z \rho\, ds + \xi(x,y,t)$. □

Фактически он доказал эту теорему для системы (10) без солености, в которой $\rho = \alpha_T T$, но доказательство остается верным и для (10). Этот результат был одним из наиболее выдающихся достижений на протяжении более чем двадцати лет. В [19] В.И. Сухоносов рассмотрел уравнения динамики океана на глобальной сфере и доказал для них теорему существования и единственности.

И наконец, Ж.-Л. Лионс, Р. Темам, С. Ванг [20] изучили основные уравнения океана в сферической системе координат (коширота, долгота и вертикальная переменная z) в области общего вида, учитывающей наличие островов и континентов, с граничными условиями:

$$u_z = \tau_1, \quad v_z = \tau_2, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$T_z = \alpha_T(T_A - T), \quad S_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$u = v = w = 0, \quad T = T_B, \quad S = S_B \quad \text{при} \quad z = -h,$$

$$u = v = w = \partial_{\mathbf{n}} T = \partial_{\mathbf{n}} S = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_s$$

и с постоянным коэффициентом вертикальной диффузии. Они доказали существование слабого решения на любом промежутке времени. Точнее, они выделяют для u, v, T некоторые скалярные функции и переходят к системе с однородными краевыми условиями. Как обычно, используя равенство $w = 0$ на дне и на верхней поверхности, они интегрируют уравнение неразрывности по z и получают соотношение $\operatorname{div}\int\limits_{-h}^{0} \mathbf{u}\, dz = 0$, которое рассматривается как ограничение при определении функциональных пространств.

Они также ввели модель примитивных уравнений океана с вертикальной вязкостью, в которой уравнение гидростатики $P_z + \rho g = 0$ заменяется на

$$\rho_o(P_z + \rho g) - \mu\Delta w - \nu w_{zz} = 0. \tag{14}$$

Для этой модели они доказали существование глобального по времени слабого решения.

IV. Существование слабых решений и разрешимость задач ассимиляции данных

В 2007 году В.И. Агошков и В.М. Ипатова [27, 28] исследовали систему основных уравнений океана с условием свободной поверхности на границе соприкосновения океана и атмосферы и доказали для нее существование глобальных по времени слабых решений, удовлетворяющих дополнительному энергетическому неравенству. Уравнения гидротермодинамики океана рассматриваются в сферической системе координат (x, y, r), где $x \in [0, 2\pi)$ — долгота, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$ — широта, r — радиальное расстояние. Через Ω' обозначается область в плоскости переменных (x, y) с кусочно-гладкой границей Γ', R — радиус Земли, $\mathcal{O}_{xy}$ —

образ точки (x, y) при отображении на сферу S_R^2 радиуса R, $\Omega = \{\mathcal{O}_{xy},\ (x,y) \in \Omega'\}$ — открытое подмногообразие, получаемое в результате отображения Ω' на сферу радиуса R, $\Gamma = \{\mathcal{O}_{xy},\ (x,y) \in \Gamma'\}$ — граница Ω. Предполагается, что замыкание Ω не содержит полюсов, то есть на $\bar{\Omega}'$ верно неравенство $\cos y \geqslant \cos y_0 > 0$. Вертикальная координата $z = R - r$ направлена вниз, $H(x,y)$ — строго положительная непрерывно дифференцируемая функция, описывающая рельеф дна, $G = \{\mathcal{O}_{xy} \times (0, H(x,y)),\ (x,y) \in \Omega'\}$ — трехмерная область, определяемая условием $0 < z < H(x,y)$ в каждой точке $\mathcal{O}_{xy} \in \Omega$, $\Sigma = \{\mathcal{O}_{xy} \times [0, H(x,y)],\ (x,y) \in \Gamma'\}$ — боковая граница G, $t \in [0, t_1]$, где $0 < t_1 < +\infty$, $G_{t_1} = G \times (0, t_1)$, $D = \Omega \times (0, t_1)$.

Вводятся дифференциальные операторы $A_\phi = -\mu_\phi \Delta - \nu_\phi \partial_z^2$, где под ϕ понимаются u, v, T и S, $A_u = A_v = A$, μ_ϕ, ν_ϕ — положительные постоянные.

Сила Кориолиса описывается оператором $B(u) = \begin{matrix} 0 & -f_c \\ f_c & 0 \end{matrix}$, где $f_c = (2\omega + \frac{u}{R\cos y})\sin y$, ω — угловая скорость вращения Земли.

В области G_{t_1} рассматривается система уравнений:

$$d_t \mathbf{u} + (A + B(u))\mathbf{u} + \nabla P/\rho_0 = \hat{\mathbf{f}}, \tag{15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + w_z = 0,\ P_z = \rho g, \tag{16}$$

$$d_t T + A_T T = f_T,\ d_t S + A_S S = f_S, \tag{17}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \beta_T (T - T_0) + \beta_S (S - S_0)\right), \tag{18}$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор «горизонтальной» скорости, $\hat{\mathbf{f}}$, f_T, f_S — заданные функции источников, T_0, S_0 — осредненные значения температуры и солености, g, β_T, β_S — постоянные коэффициенты.

На верхней границе при $z = 0$ ставятся условия $P = P_{atm} + g\rho_0 \xi$, $w = -\xi_t + Q_w$, где P_{atm} — заданное давление на поверхности, $\xi = \xi(x,y,t)$ — возвышение уровня поверхности океана относительно невозмущенного состояния $z = 0$, направленное противоположно оси z, Q_w — заданный поток влаги с поверхности. На дне при $z = H(x,y)$ ставится условие непротекания $w = uH_x/(R\cos y) + vH_y/R$. Из граничных условий по вертикали и уравнения неразрывности выводится равенство $w = w(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \int\limits_z^H \mathbf{u}\, dz'$. Кроме того, уравнение гидростатики записывается в виде $P = P_{atm} + g\rho_0 \xi + g \int\limits_0^z \rho\, dz'$, тогда $\nabla P = \nabla P_{atm} + g\rho_0 \nabla \xi + g\rho_0 (\mathbf{I} - \mathbf{I}_0)$, где $\mathbf{I} = \int\limits_0^z (\beta_T \nabla T + \beta_S \nabla S)\, dz'$, $\mathbf{I}_0 = \int\limits_0^z (\beta_T \nabla T_0 + \beta_S \nabla S_0)\, dz'$. В.И. Агошков и В.М. Ипатова обозначают $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_{atm} + g\mathbf{I}_0$ и преобразуют исходную систему (15) – (18) к виду

$$d_t \mathbf{u} + (A + B(u))\mathbf{u} + g\nabla \xi + g\mathbf{I} = \mathbf{f}, \tag{19}$$

$$\xi_t + \operatorname{div} \int\limits_0^H \mathbf{u}\, dz = Q_w, \tag{20}$$

$$d_t T + A_T T = f_T, \quad d_t S + A_S S = f_S. \tag{21}$$

К системе (19) – (21) присоединяются начальные и граничные условия:
при $t = 0$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \xi = \xi^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0; \tag{22}$$

на верхней границе при $z = 0$:

$$\nu \mathbf{u}_z = -\frac{\tau}{\rho_0} + w(\mathbf{u})\, \frac{\mathbf{u}}{2}, \tag{23}$$

$$\nu_T T_z = \gamma_T (T - T_s) + w(\mathbf{u})\, \frac{T}{2} + Q_T, \tag{24}$$

$$\nu_S S_z = \gamma_S (S - S_s) + w(\mathbf{u})\, \frac{S}{2} + Q_S; \tag{25}$$

на дне при $z = H(x,y)$:

$$\mathbf{D}_\phi \phi \cdot \mathbf{n}_H = 0; \tag{26}$$

на боковой границе Σ:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \partial_{\mathbf{n}_\Sigma} \mathbf{u} \times \mathbf{n}_\Sigma = \nabla T \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \nabla S \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0, \tag{27}$$

где τ, T_s, S_s, Q_T, Q_S — заданные значения напряжения трения ветра, температуры, солености, потоков тепла и соли на поверхности воды, γ_T, γ_S — положительные постоянные, $\mathbf{n}_H$, $\mathbf{n}_\Sigma$ — векторы нормали к соответствующим поверхностям, $\mathbf{D}_\phi \phi = (\mu_\phi \nabla \phi, \nu_\phi \phi_z)$, ϕ означает функции u, v, T, S.

Через $(\cdot,\cdot)_0$, $\|\cdot\|_0$ обозначается скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ и через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $L_2(G)$. Вводятся пространства $\mathbf{H}_0^k(G)$ вектор-функций $\mathbf{u} \in H^k(G) \times H^k(G)$ таких, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ на Σ, а также пространства

$$F = \{T \in L_2(0, t_1; H^1(G)),\ T_t \in L_{4/3}(0, t_1; H^{-2}(G))\},$$
$$U = \{\mathbf{u} \in L_2(0, t_1; \mathbf{H}_0^1(G)),\ \mathbf{u}_t \in L_{4/3}(0, t_1; \mathbf{H}_0^{-2}(G))\},$$
$$E = \{\xi \in L_2(D),\ \xi_t \in L_2(D)\},$$
$$W = (U \times E \times F \times F) \cap L_\infty(0, t_1; (L_2(G))^2 \times L_2(\Omega) \times (L_2(G))^2)$$

и обозначения $[\phi, \phi_1] = \mu_\phi (\nabla \phi, \nabla \phi_1) + \nu_\phi (\phi_z, \phi_{1z})$, $[\phi]^2 = [\phi, \phi]$, $\|\Xi\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + g\|\xi\|_0^2 + \|T\|^2 + \|S\|^2$, $[\Xi]^2 = [u]^2 + [v]^2 + [T]^2 + [S]^2$, где $\Xi = \{u, v, \xi, T, S\}$.

Рассматривается неравенство

$$\frac{1}{2}\, \|\Xi(t)\|^2 + \int\limits_0^t [\Xi]^2 dt' + \int\limits_0^t (\gamma_T \|T\|_0^2 + \gamma_S \|S\|_0^2)|_{z=0} dt' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\|\Xi^0\|^2 + \int\limits_0^t \Bigg((\mathbf{u},\mathbf{f}) + (T, f_T) + (S, f_S) -$$

$$-g(\mathbf{I},\mathbf{u}) + g(Q_w, \xi)_0 + \int\limits_\Omega (\tau \cdot \mathbf{u}/\rho_0 +$$

$$+\gamma_T T_s T + \gamma_S S_s S - Q_S S - Q_T T)|_{z=0} d\Omega \Bigg) dt', \quad (28)$$

в котором $\Xi^0 = \{u^0,\, v^0,\, \xi^0,\, T^0,\, S^0\}$. Заметим, что неравенство (28) выполняется для гладких решений задачи (19) – (27), причем имеет место строгое равенство.

Вводится определение обобщенного решения.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (19) – (27) называется слабое решение $\Xi \in W$, удовлетворяющее (28).

В.И. Агошков и В.М. Ипатова получили следующую теорему существования решения на произвольном интервале времени.

Теорема 4 ([27, 28]). При всех $\mathbf{u}^0 \in (L_2(G))^2$, $T^0 \in L_2(G)$, $S^0 \in L_2(G)$, $\xi^0 \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L_2(0, t_1; \mathbf{H}_0^{-1}(G))$, $f_T, f_S \in L_2(0, t_1; H^{-1}(G))$, Q_w, T_s, Q_T, S_s, Q_S, принадлежащих $L_2(D)$, и $\tau \in (L_2(D))^2$ задача (19) – (27) имеет хотя бы одно обобщенное решение $\Xi \in W$. $\square$

В [27, 28] исследуется задача ассимиляции данных для модели (19) – (27). Предполагается, что в области $\Omega_1 \subset \Omega$ при почти всех $t \in [t_0^1, t_e^1] \subset [0, t_1]$ известны наблюдения за возвышением уровня свободной поверхности океана $\xi = \xi_{obs}(x, y, t)$. Кроме того, в области $\Omega_2 \subset \Omega$ при почти всех $t \in [t_0^2, t_e^2] \subset [0, t_1]$ имеются данные наблюдений за поверхностной температурой $T|_{z=0} = T_{obs}(x, y, t)$. Через χ_1 и χ_2 обозначаются характеристические функции множеств $D_1 = \Omega_1 \times [t_0^1, t_e^1]$ и $D_2 = \Omega_2 \times [t_0^2, t_e^2]$ соответственно. Для определенности ξ_{obs} продолжается нулем на множество $D \setminus D_1$ и T_{obs} продолжается нулем на множество $D \setminus D_2$. Считается, что данные наблюдений ξ_{obs}, T_{obs} должны быть использованы для отыскания потока влаги Q_w и потока тепла Q_T, входящих в уравнение (20) и граничное условие (24), в то время как все другие входные параметры модели зафиксированы и соответствуют предположениям теоремы 4.

Функционал стоимости минимизируется на сложном множестве, которое строится следующим образом. Через $q = \{Q_w, Q_T\}$ обозначается совокупность величин, подлежащих определению, и через $\mathcal{U}(q) \subset W$ множество всех *обобщенных решений* задачи (19) – (27), отвечающих данному значению $q \in (L_2(D))^2$. Предполагается, что q разыскивается в пространстве $Q = \mathcal{E} \times L_2(D)$, где $\mathcal{E}$ — некоторое банахово пространство, непрерывно вложенное в $L_2(D)$. В пространстве $Q \times W$ рассматривается множество M всех пар $\{q, \Xi\}$ таких, что $q \in Q$, $\Xi \in \mathcal{U}(q)$. На M определяется функционал стоимости

$$J(q, \Xi) = \alpha_1 \|Q_w - Q_w^a\|_{\mathcal{E}}^2 + \alpha_2 \|Q_T - Q_T^a\|_D^2 +$$

$$+ m_1 \|\chi_1 \xi - \xi_{obs}\|_D^2 + m_2 \|\chi_2 T|_{z=0} - T_{obs}\|_D^2,$$

где α_1, α_2, m_1, m_2 — неотрицательные коэффициенты, $Q_w^a \in \mathcal{E}$, $Q_T^a \in L_2(D)$ — априорно известные приближенные значения Q_w, Q_T, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ — норма пространства $\mathcal{E}$, $\|\cdot\|_D$ — норма пространства $L_2(D)$.

Исследуется задача ассимиляции данных: найти элемент $\{q, \Xi\} \in M$, для которого

$$J(q, \Xi) = \inf \Big\{ J(q', \Xi'), \{q', \Xi'\} \in M \Big\}. \quad (29)$$

Получены достаточные условия ее разрешимости.

Теорема 5 ([27, 28]). Пусть $\mathcal{E} = L_2(0, t_1; W_2^1(\Omega))$ или $\mathcal{E} = L_p(0, t_1; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(D)$, где $1 < p < 2$. Тогда при всех $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\xi_{obs} \in L_2(D)$, $T_{obs} \in L_2(D)$ задача (29) имеет решение. $\square$

В 2008 году В.М. Ипатова [29, 30] обобщила результат теоремы 4 на случай, когда плотность воды $\rho(T, S)$ является положительной непрерывной по Липшицу функцией. В [30] предполагается, что на измеримом множестве $D_{obs} \subset D$ известны данные наблюдений за возвышением уровня свободной поверхности океана $\xi = \xi_{obs}(x, y, t)$ и за поверхностной температурой $T|_{z=0} = T_{obs}(x, y, t)$ и на измеримом множестве $G_{t_1}^{obs} \subset G_{t_1}$ имеются данные наблюдений за скоростью, температурой и соленостью воды, которые задаются функциями $\mathbf{u}^{obs}(x, y, z, t)$, $w^{obs}(x, y, z, t)$, $T^{obs}(x, y, z, t)$ и $S^{obs}(x, y, z, t)$. Ставятся задачи ассимиляции данных об отыскании вектора $q = \{Q_w, Q_T, Q_S, \tau\}$ и начального состояния $\Xi^0 = \{u^0, v^0, \xi^0, T^0, S^0\}$ и доказывается разрешимость этих обратных задач при подходящих способах регуляризации. В [31] ставится задача об одновременном восстановлении начального состояния и коэффициентов γ_T, γ_S, входящих в граничные условия (24), (25), получена теорема о ее разрешимости для примитивных уравнений океана с непрерывной по Липшицу плотностью воды. Кроме того, В.М. Ипатова рассмотрела в работе [32] модель с вертикальной вязкостью, в которой уравнение гидростатики (17) заменяется на соотношение вида (14), а плотность $\rho(T, S)$ задается как многочлен второй степени от температуры и солености. Она доказала для этого случая теоремы существования, аналогичные теоремам 4 и 5, в подходящих функциональных пространствах. Задачи ассимиляции данных для основных уравнений океана в различных полудискретных постановках исследованы в работах [33–35].

V. Существование и единственность сильных решений

Г.М. Кобельков в [36,37] и С. Сейо, Е.С. Тайти в [38] доказали существование и единственность глобального сильного решения для упрощенной системы основных уравнений океана, в которую не входит уравнение для солености. В этих работах предполагается, что океан имеет плоское дно и плотность воды $\rho = \alpha_T T$. В области $\Omega = \Omega' \times [0,1]$, где Ω' — область в плоскости переменных (x, y) с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega'$, Г.М. Кобельков рассмотрел систему:

$$\begin{aligned} d_t u + lv + P_x - \nu\Delta u - \nu u_{zz} = 0, \\ d_t v - lu + P_y - \nu\Delta v - \nu v_{zz} = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} d_t\rho - \nu_1\Delta\rho - \nu_1\rho_{zz} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} + w_z = 0,\ P_z = -g\rho \end{aligned} \tag{31}$$

с граничными и начальными условиями:

$$u_z = v_z = w = \rho_z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1, \tag{32}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}}\rho = 0 \text{ на } \partial\Omega' \times [0,1], \tag{33}$$

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \rho = \rho_0 \text{ при } t = 0, \tag{34}$$

где $l = \mathrm{const}$, $\mathbf{u} = (u, v)$, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к боковой границе. Обозначив

$$Q_{\mathcal{T}} = \Omega \times [0, \mathcal{T}],\ \mathcal{R} = \{\rho, \rho_z \in W_2^1(Q_{\mathcal{T}})\},$$

$$\mathbf{V} = \{u, v, u_z, v_z \in W_2^1(Q_{\mathcal{T}}), \int\limits_0^1 \operatorname{div}\mathbf{u}\, dz = 0$$

и верно (32) – (33)},

Г.М. Кобельков ввел определение обобщенного решения

Определение 2. Обобщенным решением задачи (30) – (34) назовем ее слабое решение $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\rho \in \mathcal{R}$.

Он доказал, что верна следующая теорема.

Теорема 6 ([36,37]). Пусть u_0, v_0, ρ_0 принадлежат $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяют граничным условиям (32), а $\int\limits_0^1 \operatorname{div}\mathbf{u}_0\, dz = 0$. Тогда для любых $\nu, \nu_1 > 0$ и произвольного $\mathcal{T} > 0$ задача (31) – (33) имеет в $Q_{\mathcal{T}}$ единственное обобщенное решение, такое, что

$$\begin{gathered} \mathbf{u}^2, (\mathbf{u}^2)_z, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, (\mathbf{u}^2)_{xz}, (\mathbf{u}^2)_{yz}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{xt}, \mathbf{u}_{yt} \in \mathbf{L}_2(Q_{\mathcal{T}}), \\ \rho^2, \rho_x, \rho_y, \rho_{xz}, \rho_{yz}, \rho_{xt}, \rho_{yt} \in L_2(Q_{\mathcal{T}}) \end{gathered}$$

и нормы $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ непрерывно зависят от t. □

С. Сейо и Е.С. Тайти [38] рассмотрели уравнения крупномасштабной динамики океана в области $\Omega = \Omega' \times (-h, 0)$, где граница $\partial\Omega'$ предполагается гладкой и $h = \mathrm{const} > 0$. Они получили результат, сходный с теоремой 6.

В [39] Г.М. Кобельков и В.Б. Залесный исследовали систему основных уравнений океана со стратификацией, которая отличается от (31) тем, что в уравнении для ρ вместо $\nu_1\rho_{zz}$ рассматривается член $\partial_z(\nu_1\rho_z)$, а коэффициент вертикальной вязкости $\nu_1 = \nu_1(\rho_z)$ задается непрерывной положительной функцией, которая не возрастает при $\rho_z \leqslant 0$ и равняется константе при $\rho_z > 0$. Они доказали для этого случая теорему, аналогичную теореме 6.

А.В. Друца в [40] попытался снять предположение о плоском дне океана. Он рассмотрел систему (31) в области $\Omega = \Omega' \times (0, H(x,y))$, где глубина океана $H(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема и положительна. Выравнивание дна производится при помощи перехода к переменной $s = z/H(x, y)$. Область изменения пространственных переменных становится цилиндром $\Omega = \Omega' \times (0, 1)$. В преобразованной системе уравнений содержатся смешанные производные и производные первого порядка по s, однако А.В. Друца считает эти члены малыми и опускает их при окончательной записи уравнений модели:

$$H d_t\mathbf{u} - \nu H\hat{\Delta}\mathbf{u} + Hl\begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} + H\nabla P - sP_s\nabla H = 0,$$

$$P_s = -Hg\rho,\ \operatorname{div}(H\mathbf{u}) + w_s' = 0,\ Hd_t\rho - \nu_1 H\hat{\Delta}\rho = 0,$$

где $\hat{\Delta} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_s(A\partial_s)$, $A = H^{-2}(1 + s^2(H^2)_x + s^2(H^2)_y)$.

Для последней системы в [40] ставятся краевые условия:

$$\begin{gathered} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \partial_{\mathbf{n}}\rho = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega' \times [0,1], \\ w = 0, \quad \mathbf{u}_s = 0, \quad \rho_s = 0 \text{ при } s = 0 \text{ и } s = 1 \end{gathered}$$

и доказывается теорема существования и единственности, аналогичная теореме 6.

И. Кукавица и М. Зиан в [41] также доказали корректную разрешимость примитивных уравнений в области с неровным дном, но они ставят на дне океана менее физичное и более простое для исследования условие прилипания: $u = v = w = 0$.

VI. Заключение

Вопросы существования и единственности решений начально-краевых задач для трехмерных нелинейных моделей динамики океана и математического обоснования процедуры ассимиляции данных в этих моделях представляют значительный фундаментальный и прикладной интерес. За последние годы достигнут существенный прогресс в исследовании рассмотренных проблем, однако многие принципиальные моменты до сих пор остаются не изученными. Усилия многих математиков во всем мире направлены на исследование этих задач, поэтому в будущем можно ожидать появления новых важных результатов.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

2. *Соболев С.Л.* Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales // Мат. сборник. – 1936. – Т. 1, № 1. – С. 39–70.

3. *Соболев С.Л.* О задаче Коши для квазилинейных гиперболических уравнений // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 20, № 2–3. – С. 79–84.

4. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1961.

5. *Галеркин Б.Г.* Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестник инженеров. – 1915. – Т. 1. – С. 897–908.

6. *Марчук Г.И.* Об уравнениях динамики бароклинного океана // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 173, № 6. – С. 1317–1320.

7. *Марчук Г.И.* О численном решении задачи Пуанкаре для океанической циркуляции // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 5. – С. 1041–1044.

8. *Бубнов М.А., Кажихов А.В.* Теоремы существования и единственности в некоторых задачах линейной теории океанической циркуляции // Динамика сплошной среды: сб. научн. тр. / Ин-т гидродинамики СО АН СССР. – 1970. – Вып. 6. – С. 223–237.

9. *Белов Ю.Я.* Квазилинейная стационарная задача динамики океана // Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т. 9, № 5. – С. 13–27.

10. *Белов Ю.Я.* Об одной линейной стационарной задаче динамики океана // Мат. заметки. – 1979. – Т. 26, вып. 1. – С. 45–52.

11. *Белов Ю.Я.* Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимация некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течения океана // Сиб. мат. журнал. – 1979. – Т. 20, № 6. – С. 852–867.

12. *Бубнов М.А.* О поведении решений уравнений динамики стратифицированного океана при t стремящемся к бесконечности. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978: препринт № 113.

13. *Бубнов М.А.* Математические вопросы моделирования приливов и циркуляций в бароклинном океане. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.

14. *Кажихов А.В.* Математическая гидродинамика. Избранные труды. – Новосибирск: Изд-во института гидродинамики, 2008.

15. *Kordzadze A.A.* On the uniqueness of the solution of an ocean dynamic problem // Dokl. Earth Science. – 1974. – V. 219, N 4. – P. 856–859.

16. *Кордзадзе А.А.* Математические вопросы решения задач динамики океана. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982.

17. *Сухоносов В.И.* О корректности в целом трехмерной задачи динамики океана // Механика неоднородных сплошных сред. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. – 1981. Вып. 52. – С. 119–126.

18. *Сухоносов В.И.* О корректности в целом краевых задач для моделей динамики атмосферы и океана // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 27, № 3. – С. 556–560.

19. *Сухоносов В.И.* О разрешимости задач атмосферы и океана на сфере // Задачи динамики жидкости со свободными границами. – 1987. – Т. 81. – С. 117–126.

20. *Lions J.-L., Temam R. and Wang S.* On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. – 1992. – V. 5. – P. 1007–1053.

21. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

22. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМ и МФ. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 463–473.

23. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости задач оптимизации функционалов // ЖВМ и МФ. – 1966. – Т. 6, № 4. – С. 631–634.

24. *Ipatova V.M., Agoshkov V.I., Kobelkov G.M., Zalesny V.B.* Theory of solvability of boundary value problems and data assimilation problems for ocean dynamics equations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2010. – V. 25, N 6. – P. 511–534.

25. *Petcu M., Temam R.M. and Ziane M.* Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics // Handbook of numerical analysis. Special volume: Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. – Amsterdam: Elsevier. – 2009. – V. 14. – P. 577–750.

26. *Temam R., Ziane M.* Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. – Amsterdam: Elsevier. – 2004. – V. 3.

27. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. – 2007. – Т. 412, № 2. – С. 151–153.

28. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифф. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1064–1075.

29. *Ipatova V.M.* Solvability of the ocean hydrothermodynamics problem under a nonlinear state equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23, N 2. – P. 185–195.

30. *Ипатова В.М.* Задачи ассимиляции данных для основных уравнений термодинамики океана с непрерывной по Липшицу плотностью // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2008. – С. 56–79.

31. *Ипатова В.М.* Задача ассимиляции данных об определении коэффициентов и начального условия для трехмерной модели гидротермодинамики океана // Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики. – М.: МФТИ, 2010. – С. 102–111.

32. *Ипатова В.М.* Задача ассимиляции данных для основных уравнений динамики океана с квадратичной плотностью // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2007. – С. 80–95.

33. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, № 8. – С. 1371–1391.

34. *Агошков В.И., Лебедев С.А., Пармузин Е.И.* Численное решение проблемы вариационного усвоения оперативных данных наблюдений о температуре поверхности океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 76–108.

35. *Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.* Variational data assimilation for a nonstationary heat conduction problem with nonlinear diffusion // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – V. 20, N 1. – P. 81–95.

36. *Кобельков Г.М.* Существование решения «в целом» для уравнений динамики океана // ДАН. – 2006. – Т. 408, № 4. – С. 1–3.

37. *Kobelkov G.M.* Existence of a solution «in the large» for ocean dynamics equations // J. Math. Fluid Mech. – 2007. – V. 9. – P. 588–610.

38. *Cao C., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics // Annals of Mathematics. – 2007. – V. 166, N 1. – P. 245–267.

39. *Kobelkov G.M., Zalesny V.B.* Exitence and uniqueness of a solution to primitive equations with stratification «in the large» // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23, N 1. – P. 39–61.

40. *Drutsa A.V.* Existence «in the large» of a solution to Primitive equations in a domain with uneven botton // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – V. 24, N 6. – P. 515–542.

41. *Kukavica I., Ziane M.* On the regularity of the primitive equations of the ocean // Nonlinearity. – 2007. – V. 20. – P. 2739–2753.

Поступила в редакцию 25.01.2011