УДК 629.7.05

Н. Е. Зубов[1], *Е. А. Микрин*[1,2], *С. С. Негодяев*[2,3], *В. Н. Рябченко*[2,4]

[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева
[4]ОАО «Федеральная сетевая компания Единой энергетической системы»

Синтез одноканальной системы разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата

Рассматривается задача гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа для круговых и эллиптических орбит с использованием ленточного критерия управляемости. Синтезированы законы управления гравитационной разгрузки и стабилизации заданного положения космического аппарата, однозначно определяемые параметрами объекта и задаваемыми коэффициентами характеристического уравнения.

Ключевые слова: инерционные исполнительные органы, разгрузка кинетического момента, обратная связь по состоянию, замкнутая система, ленточный критерий управляемости, ортогональный делитель нуля.

1. Введение

Использование инерционных исполнительных органов (ИИО) в контурах управления ориентацией космического аппарата (КА) позволяет на порядок повысить точность ориентации [1].

Принцип функционирования ИИО основан на обмене кинетическим моментом между корпусом КА и системой ИИО. Под действием моментов внешних сил КА приобретает угловую скорость и, следовательно, кинетический момент. Далее, за счет управления кинетический момент КА передается с корпуса КА на систему ИИО, и угловая скорость КА обнуляется [1]. Таким образом, ИИО является «интегратором» моментов внешних сил, действующих на КА. Если момент внешних сил имеет постоянную составляющую, то происходит накопление кинетического момента системы ИИО и, как следствие, ее насыщение. При достижении предельной величины располагаемого запаса кинетического момента системы ИИО необходимо провести сброс (разгрузку) накопленного кинетического момента.

Реализовать разгрузку можно путем включения реактивных двигателей [1]. Однако при этом расходуется топливо. Безрасходный сброс накопленного кинетического момента, в частности, можно осуществить с использованием момента гравитационных сил. В этом случае разгрузка реализуется путем задания определенного углового движения КА относительно гравитационного поля Земли на участках полета, свободных от решения целевой задачи. Метод управления угловым движением при одновременном регулировании накапливаемого на ИИО кинетического момента позволяет сделать гравитационную разгрузку полностью автономной за счет небольших угловых отклонений от положения равновесной ориентации, рассчитываемых в контуре управления, с целью создания разгружающего гравитационного момента.

Исследованию такого управления КА в канале тангажа для круговых и эллиптических орбит с использованием ленточного критерия управляемости при реализации модального подхода и посвящена данная статья.

Линеаризованные уравнения углового движения КА с ИИО для канала тангажа в случае круговых орбит при учете действия гравитационного момента в соответствии с [2] имеют вид

$$\ddot{\vartheta} = 3\omega_0^2 \frac{J_y - J_x}{J_z}\vartheta + \frac{u_z}{J_z} - \frac{\dot{H}_z}{J_z}. \tag{1}$$

Применительно к задаче разгрузки кинетического момента уравнения (1) можно записать так:

$$\ddot{\vartheta} = 3\omega_0^2 \left(\tfrac{J_y - J_x}{J_z}\right)\cos(2\theta_0)\vartheta + \tfrac{3}{2}\omega_0^2\left(\tfrac{J_y - J_x}{J_z}\right)\sin(2\theta_0) - \tfrac{u_z}{J_z}, \quad \dot{h}_z = u_z, \tag{2}$$

здесь J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции КА, ω_0 — орбитальная угловая скорость движения для круговой орбиты, H_z — кинетический момент ИИО в канале тангажа, u_z — управляющий момент в канале тангажа, ϑ — малый угол отклонения от углового положения $(0, 0, \theta_0)$ в канале тангажа $\vartheta = \theta - \theta_0$.

Соответственно для эллиптических орбит уравнения (2) будут иметь вид [3]

$$\ddot{\vartheta} = 3\tfrac{G}{r^3}\left(\tfrac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}}\right)\cos(2\theta_0)\vartheta + \tfrac{3}{2}\tfrac{G}{r^3}\left(\tfrac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}}\right)\sin(2\theta_0) - 2\tfrac{G}{r^3}e\sin\nu - \tfrac{u_z}{J_{zz}}, \dot{h}_z = u_z. \tag{3}$$

Управляющее воздействие u_z будем формировать в виде линейной комбинации:

$$u_z = -K_{z1}\vartheta - K_{z2}\dot{\vartheta} + K_{z3}h_z + K_{z4}\int\limits_0^t h_z dt. \tag{4}$$

В дальнейшем в силу большей общности уравнений для эллиптических орбит рассмотрим именно их.

При переходе к описанию в пространстве состояний уравнения (3) и (4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \hline \dot{x_2} \\ \hline \dot{x_3} \\ \hline \dot{x_4} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline -\frac{1}{J_{zz}} \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline s(t) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$u_z = -\mathbf{k}^T\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} K_{z1} & K_{z2} & -K_{z3} & -K_{z4} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline x_4 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$a_{21} = \frac{G}{r^3}\left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}}\right)\cos(2\theta_0), \quad s(t) = \frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\left(\frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}}\right)\sin(2\theta_0) - 2\frac{G}{r^3}e\sin\nu,$$

$\mathbf{k}^T$ — вектор коэффициентов регулятора, а вектор состояния имеет компоненты

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \theta & \dot{\theta} & h_z & \int\limits_0^t h_z dt \end{array}\right]^T.$$

Динамическая система (5) является нестационарной с медленно меняющимися периодическими коэффициентами. Для применения математического аппарата стационарных систем аппроксимируем коэффициент a_{21} кусочно-постоянной функцией вида

$$a_{21} = \sum_{i=1}^{N}(1(t - t_i)a_{21}^i - 1(t - t_{i+1}))a_{21}^i.$$

Примем для $i = 1$ момент времени прохождения перигея t. В этом случае система (5) становится стационарной.

2. Ленточный критерий управляемости и его применение для синтеза управления

Найдем решение задачи разгрузки на основе *ленточного критерия управляемости*, описанного в [4, 5].

Рассмотрим динамическую систему в виде *пары матриц с постоянными* коэффициентами:

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{b}), \tag{7}$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n}$, $\mathbb{R}^{p}$ — p-мерное вещественное пространство. Другими словами, пара (7) описывает систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t). \tag{8}$$

Пусть *характеристический полином* матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица размера $n\times n$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Пусть также $\mathbf{0}_{1\times n}$ — нулевая строка размера $1 \times n$, тогда динамическая система (7), (8) полностью управляема, если *ленточная матрица управляемости* [4]

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
-\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & 0 & \mathbf{b}_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{b}_L^{\perp}
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{0}_{1\times n} \\ \hline \mathbf{I}_n\end{array}\right] \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_n \\ \hline \mathbf{0}_{1\times n}\end{array}\right] \otimes (\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A})$$

имеет полный ранг по строкам.

Здесь $\otimes$ — символ операции *кронекерова произведения*, например,

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22}\end{array}\right] \otimes \left[\begin{array}{c|c|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ \hline
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ \hline
a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ \hline
a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ \hline
a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ \hline
a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33}
\end{array}\right].$$

Символом $\mathbf{b}_L^{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ обозначена матрица — *левый делитель нуля (аннулятор)* ранга $n-1$, т.е.

$$\mathbf{b}_L^{\perp} = 0_{(n-1)\times 1}.$$

Заметим, что далее по тексту символом $\mathbf{X}_L^{\perp}$ будет обозначаться [5] *левый делитель нуля (аннулятор)* матрицы $\mathbf{X}$ максимального ранга, $\mathbf{X}_R^{\perp}$ — *правый делитель нуля (аннулятор)* матрицы $\mathbf{X}$ максимального ранга, $\mathbf{X}^{+}$ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза.

Для полностью управляемой динамической системы между коэффициентами α_i характеристического полинома (9) и ленточной матрицей управляемости

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{0}_{1\times n} \\ \hline \mathbf{I}_n\end{array}\right] \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_n \\ \hline \mathbf{0}_{1\times n}\end{array}\right] \otimes (\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A}) \tag{10}$$

имеется следующая однозначная взаимосвязь:

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \hline \alpha_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{n-2} \\ \hline \alpha_{n-1} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left(\left[\begin{array}{c}\mathbf{0}_{1\times n} \\ \hline \mathbf{I}_n\end{array}\right] \otimes \mathbf{b}^{+} - \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_n \\ \hline \mathbf{0}_{1\times n}\end{array}\right] \otimes (\mathbf{b}^{+}\mathbf{A})\right) \left[\begin{array}{c} \mathfrak{X}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathfrak{X}_{n-1} \\ \hline \mathfrak{X}_n \end{array}\right].$$

Здесь $\vartheta \neq 0$ — ненулевой скаляр,

$$\left[\frac{\mathbf{0}_{1\times n}}{\mathbf{I}_n}\right] \otimes \mathbf{b}^{+} - \left[\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{0}_{1\times n}}\right] \otimes (\mathbf{b}^{+}\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} -\mathbf{b}^{+}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{b}^{+} & -\mathbf{b}^{+}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}^{+} & -\mathbf{b}^{+}\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{b}^{+} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}^{+}\mathbf{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{b}^{+} \end{array}\right],$$

$$\left(\left[\frac{\mathbf{0}_{1\times n}}{\mathbf{I}_n}\right] \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left[\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{0}_{1\times n}}\right] \otimes (\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A})\right) \left[\begin{array}{c} \mathfrak{X}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathfrak{X}_{n-1} \\ \hline \mathfrak{X}_n \end{array}\right] = 0. \tag{11}$$

Другими словами, для полностью управляемой многомерной системы (и только для нее) решение однородного уравнения (11) является вектором, а не матрицей.

Справедливой оказывается следующая

Теорема [4]. *Пусть линейная система* (7), (8) *полностью управляемая и имеет характеристический полином* (9). *Тогда регулятор* $\mathbf{k}^T$ *в законе обратной связи, обеспечивающий замкнутой системе заданный характеристический полином*

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0,$$

определяется формулой

$$\mathbf{k}^T = \Delta\alpha\mathfrak{T}^{-1} \tag{12}$$

где

$$\Delta\alpha = \left[\alpha_0 - \beta_0 \;\middle|\; \alpha_1 - \beta_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}\right],$$

$$\mathfrak{T} = \left(\mathfrak{X}_1 \;\middle|\; \mathfrak{X}_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathfrak{X}_{n-1} \;\middle|\; \mathfrak{X}_n\right) \tag{13}$$

— матрица Крылова,

$$\left(\left[\frac{\mathbf{0}_{1\times n}}{\mathbf{I}_n}\right] \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left[\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{0}_{1\times n}}\right] \otimes (\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A})\right)_R^{\perp} = \left[\begin{array}{c} \mathfrak{X}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathfrak{X}_{n-1} \\ \hline \mathfrak{X}_n \end{array}\right], \quad \mathfrak{X}_n = \mathbf{b}.$$

Таким образом, согласно формулировке теоремы справедливым оказывается следующее равенство:

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{b}\Delta\alpha\mathfrak{T}^{-1}) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0.$$

3. Синтез одноканальной системы разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов КА

В рассматриваемом нами случае модель КА имеет вид

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\frac{1}{J_{zz}} \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

При этом

$$\det\left(\lambda\mathbf{I}_4 - \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) = \left|\lambda\mathbf{I}_4 - \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right| = \lambda^4 - a_{21}\lambda^2.$$

Будем предполагать, что замкнутой системе требуется обеспечить гурвицев (устойчивый) полином:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{b}\Delta\alpha\mathfrak{T}^{-1}) = \lambda^4 + \beta_3\lambda^3 + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0. \tag{14}$$

Вычисляя матрицу $\mathbf{b}_L^{\perp}$, получаем

$$\mathbf{b}_L^{\perp} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{zz} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Следовательно, ленточная матрица (10) имеет вид

$$\begin{gathered} \left[\frac{\mathbf{0}_{1\times n}}{\mathbf{I}_n}\right] \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left[\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{0}_{1\times n}}\right] \otimes (\mathbf{b}_L^{\perp}\mathbf{A}) = \\ = \left[\frac{\mathbf{0}_{1\times 4}}{\mathbf{I}_4}\right] \otimes \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{zz} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\frac{\mathbf{I}_4}{\mathbf{0}_{1\times 4}}\right] \otimes \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline J_{zz}a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{15}$$

и размеры 15×16.

Правый делитель нуля максимального ранга матрицы (15) равен

$$\left(\left[\frac{\mathbf{0}_{1\times 4}}{\mathbf{I}_4}\right] \otimes \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{zz} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\frac{\mathbf{I}_4}{\mathbf{0}_{1\times 4}}\right] \otimes \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline J_{zz}a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \right)_R^{\perp} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & -a_{21} & 0 & 0 & -a_{21} & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} & 1 & 0 \end{array}\right]^T \in \mathbb{R}^{16}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что матрица Крылова (13) равна

$$\mathfrak{T} = \left(\mathfrak{X}_1 \;\middle|\; \mathfrak{X}_2 \;\middle|\; \mathfrak{X}_3 \;\middle|\; \mathbf{b}\right) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} \\ \hline 0 & -a_{21} & 0 & 1 \\ \hline -a_{21} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \tag{17}$$

Подставляя в формулу (12) матрицу (17) и вектор разностей коэффициентов характеристических полиномов

$$\Delta\alpha = \left[\alpha_0 - \beta_0 \;\middle|\; \alpha_1 - \beta_1 \;\middle|\; \alpha_2 - \beta_2 \;\middle|\; \alpha_3 - \beta_3\right],$$

получаем формулу регулятора:

$$\mathbf{k}^T = \Delta\alpha\mathfrak{T}^{-1} =$$

$$= \left[\alpha_0 - \beta_0 \;\middle|\; \alpha_1 - \beta_1 \;\middle|\; \alpha_2 - \beta_2 \;\middle|\; \alpha_3 - \beta_3\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_{zz}} \\ \hline 0 & -a_{21} & 0 & 1 \\ \hline -a_{21} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^{-1} =$$

$$= \left[-J_{zz}(a_{21} + \beta_2) - \tfrac{J_{zz}\beta_0}{a_{21}} \;\middle|\; -J_{zz}\beta_3 - \tfrac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}} \;\middle|\; -\tfrac{\beta_1}{a_{21}} \;\middle|\; -\tfrac{\beta_0}{a_{21}}\right],$$

т.е. согласно закону управления (6)

$$\begin{gathered} K_{z1} = J_{zz}(a_{21} + \beta_2) + \tfrac{J_{zz}\beta_0}{a_{21}}, \quad K_{z2} = J_{zz}\beta_3 + \tfrac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}}, \\ K_{z3} = -\tfrac{\beta_1}{a_{21}}, \quad K_{z4} = -\tfrac{\beta_0}{a_{21}}. \end{gathered} \tag{18}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$\mathbf{A}-\mathbf{b}\Delta\alpha\mathfrak{T}^{-1}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\beta_2-\frac{\beta_0}{a_{21}} & -\beta_3-\frac{\beta_1}{a_{21}} & -\frac{\beta_1}{J_{zz}a_{21}} & -\frac{\beta_0}{J_{zz}a_{21}} \\ \hline J_{zz}(a_{21}+\beta_2)+\frac{J_{zz}\beta_0}{a_{21}} & J_{zz}\beta_3+\frac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}} & \frac{\beta_1}{a_{21}} & \frac{\beta_0}{a_{21}} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad (19)$$

а характеристический полином матрицы (19) совпадает с правой частью (14), т.е.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \hline \beta_2+\frac{\beta_0}{a_{21}} & \lambda+\beta_3+\frac{\beta_1}{a_{21}} & \frac{\beta_1}{J_{zz}a_{21}} & \frac{\beta_0}{J_{zz}a_{21}} \\ \hline -J_{zz}(a_{21}+\beta_2)-\frac{J_{zz}\beta_0}{a_{21}} & -J_{zz}\beta_3-\frac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}} & \lambda-\frac{\beta_1}{a_{21}} & -\frac{\beta_0}{a_{21}} \\ \hline 0 & 0 & -1 & \lambda \end{array}\right]=$$

$$=\lambda^4+\beta_3\lambda^3+\beta_2\lambda^2+\beta_1\lambda+\beta_0.$$

Это и требовалось получить.

Таким образом, закон управления КА, обеспечивающий разгрузку кинетического момента инерционных исполнительных органов в канале тангажа и обеспечивающий заданные моды колебаний, имеет следующий вид:

$$u_z=\left(J_{zz}(a_{21}+\beta_2)+\frac{J_{zz}\beta_0}{a_{21}}\right)\vartheta+\left(J_{zz}\beta_3+\frac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}}\right)\dot{\vartheta}+\frac{\beta_1}{a_{21}}h_z+\frac{\beta_0}{a_{21}}\int\limits_0^t h_z dt. \quad (20)$$

Как видно из (20), управление однозначно определяется параметрами объекта и задаваемыми коэффициентами характеристического уравнения.

Закон разгрузки (20) может быть преобразован в закон стабилизации. В этом случае будет иметь место редуцированная модель КА:

$$\mathbf{A}_{red}=\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{b}_{red}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\frac{1}{J_{zz}} \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

и редуцированный закон управления:

$$u_{zred}=J_{zz}(a_{21}+\beta_2)\vartheta+\left(J_{zz}\beta_3+\frac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}}\right)\dot{\vartheta}+\frac{\beta_1}{a_{21}}h_z$$

с редуцированным регулятором

$$\mathbf{k}_{red}^T=\left[-J_{zz}(a_{21}+\beta_2) \;\middle|\; -J_{zz}\beta_3-\frac{J_{zz}\beta_1}{a_{21}} \;\middle|\; -\frac{\beta_1}{a_{21}}\right].$$

При этом редуцированный полином

$$\det(\lambda\mathbf{I}_3-\mathbf{A}_{red}+\mathbf{b}_{red}\mathbf{k}_{red}^T)=\lambda^3+\beta_3\lambda^2+\beta_2\lambda+\beta_1$$

априори считается устойчивым.

Дальнейшее упрощение задачи приводит к модели КА второго порядка:

$$\bar{\mathbf{A}}_{red}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_{21} & 0 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{b}}_{red}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\frac{1}{J_{zz}} \end{array}\right] \quad (21)$$

и закону управления

$$\mathbf{k}_{red}^T=\left(-J_{zz}(a_{21}+\beta_2) \;\middle|\; -J_{zz}\beta_3\right), \quad (22)$$

где полином

$$\det(\lambda\mathbf{I}_2-\bar{\mathbf{A}}_{red}+\bar{\mathbf{b}}_{red}\bar{\mathbf{k}}_{red}^T)=\lambda^2+\beta_3\lambda+\beta_2$$

также считается устойчивым.

Действительно, подставляя (21) и (22) в формулу, имеем:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_2 - \bar{\mathbf{A}}_{red} + \bar{\mathbf{b}}_{red}\bar{\mathbf{k}}_{red}^T) =$$

$$= \det\left(\lambda \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_{21} & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\frac{1}{J_{zz}} \end{array}\right] \left[-J_{zz}(a_{21} + \beta_2) \;\middle|\; -J_{zz}\beta_3\right]\right) =$$

$$\det\left(\lambda \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -\beta_2 & -\beta_1 \end{array}\right]\right) = \lambda^2 + \beta_3\lambda + \beta_2.$$

Что и требовалось получить.

4. Заключение

В работе предложено решение задачи одноканальной гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов КА для круговых и эллиптических орбит. Решение основано на ленточном критерии управляемости многомерной динамической системы.

Полученные законы управления гравитационной разгрузки и стабилизации заданного положения КА однозначно определяются параметрами объекта и задаваемыми коэффициентами характеристического уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации в рамках контракта с Минобрнауки России № 13.G25.31.0028.

Литература

1. Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов // под общей редакцией д.т.н. Е.А. Микрина. — М.: Наука, 2006.

2. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.

3. *Тимаков Н. С.* Исследование управляемого углового движения космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Навигация и управление движением. Материалы IX конференции молодых ученых. — СПб. — 2007. — С. 330–336.

4. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // Автоматика и Телемеханика. — 2007. — № 12. — С. 53–69.

5. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. — 2005. — Вып. 5. — С. 196–240.

Поступила в редакцию 14.10.2010.