УДК 373.6

Д. А. Терешин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Профильное обучение стереометрии как основа подготовки учащихся старших классов к профессиональной математической деятельности

В статье раскрываются особенности школьного курса стереометрии для классов физико-математического профиля в контексте обучения математической деятельности.

Ключевые слова: профильное обучение, стереометрия, математическая деятельность.

Одним из направлений модернизации общего среднего образования в России является профилизация обучения в старших классах, что создает условия для социально-профессионального самоопределения выпускников.

Под профессиональным самоопределением понимается процесс формирования отношения личности к себе как к субъекту будущей профессиональной деятельности, позволяющий осуществлять выбор будущей профессии или сферы деятельности на основе согласованного анализа собственных возможностей и потребностей, профессиональных требований и социально-экономических условий [1].

Профильное обучение направлено на обеспечение углублённого изучения отдельных предметов программы полного общего образования; создание условий для широкой и гибкой дифференциации содержания обучения старшеклассников, расширение их возможностей для социализации и подготовки к освоению программ профессионального высшего образования.

Основными задачами системы профильного обучения в средней школе являются:

1) углубление знаний по профильным дисциплинам;

2) выработка у учащихся навыков самостоятельной познавательной деятельности;

3) знакомство с кругом проблем, связанных с той или иной сферой деятельности;

4) развитие мотивации к научно-исследовательской деятельности.

Профильная школа не является профессиональной; она призвана обеспечить школьникам общее среднее образование с ориентацией на некоторую сферу деятельности, к которой данные группы учащихся имеют большую склонность. Сущность профильной дифференциации – обучение с использованием вариативных программ в старших классах, учитывающее склонности учащихся и различные целевые установки.

Проблемам профилизации обучения математике были посвящены исследования В.Г. Болтянского, Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, Г.В. Дорофеева, Ю.М. Колягина, Л.В. Кузнецовой, Г.Л. Луканкина, И.А. Лурье, С.Б. Суворовой, И.М. Смирновой, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой и др. В них раскрываются различные аспекты дифференциации как методологической основы проектирования профильного обучения, в том числе способы организации учебного процесса в профильных классах, определение направлений обучения и пути формирования содержания обучения математике и др.

Прежде чем говорить об особенностях профильного обучения математике и конкретно геометрии, следует остановиться на особенностях математической деятельности.

Существуют различные подходы к выявлению особенностей математического знания (А.Д. Александров, В.Г. Болтянский, А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич, Д. Пойа и др.) и определению структуры (схемы) математической деятельности, которые отличаются как названиями, так и числом стадий (аспектов) этой деятельности. Так, А.А. Столяр объединяет разные его аспекты в три основные стадии математической деятельности и исходя из этого, определяет математическую деятельность как мыслительную, протекающую по следующей схеме [2]:

1) математическая организация (математическое описание) эмпирического материала (математизация конкретных ситуаций) с помощью эмпирических и индуктивных методов – наблюдения, опыта, индукции, аналогии, обобщения и абстрагирования;

2) логическая организация математического материала (накопленного в результате первой стадии деятельности) с помощью методов логики;

3) применение математической теории (построенной в результате второй стадии деятельности) с помощью решения задач математического и межпредметного характера.

К вышеперечисленным компонентам можно добавить и другие специфические особенности математической деятельности – это интуиция и догадка (А. Пуанкаре); черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству (Р. Курант); правдоподобные рассуждения наряду с доказательствами (Д. Пойа); связь бессознательного и сознательного в творческой математической деятельности (Ж.Адамар); взаимосвязь логики и интуиции (А.Д. Александров, П.С. Александров, Я.С. Дубнов, Л.Д. Кудрявцев, А.А. Ляпунов и др.). Все это говорит о присутствии в математической деятельности эвристической компоненты.

В модели математической деятельности, предложенной Т.А. Ивановой, акцентируется внимание на гносеологическом процессе познания в математике:

1) накопление фактов с помощью общенаучных эмпирических методов (наблюдение, сравнение, анализ) и частных методов математики (вычисление, построение, измерение, моделирование);

2) выдвижение гипотез с помощью гипотетико-дедуктивных методов (анализ, синтез, аналогия, неполная индукция, обобщение, абстрагирование, интуиция, конкретизация, дедукция);

3) проверка истинности доказательством с помощью дедуктивных методов доказательств и опровержений (синтетический, аналитический, от противного, полная индукция, исчерпывающих проб, математическая индукция, контрапозиция, приведение контрпримера) и специальных методов;

4) построение теории с помощью аксиоматического метода;

5) выход в практику с помощью математического моделирования [3].

Для математической деятельности справедливы все общие закономерности мыслительной деятельности, но специфика содержания и методов математики накладывает на них некоторые особенности. Прежде всего, для *математического мышления* характерно доминирование его логического компонента (понятийного, структурного, дедуктивного) над наглядно-образным и практически-действенным мышлением. В операционном мышлении преобладают аналитический стиль и синтетический характер изложения, высший уровень обобщенности и абстрактности. Математика оперирует такими специфическими видами абстракции, как абстракция отождествления, потенциальной осуществимости, актуальной бесконечности, и такими приемами абстрагирования, как идеализация и символизация.

Математическое мышление в познании – это системное мышление с такими разновидностями его проявления, как пространственное и функциональное мышление, а отмеченные выше качества ума наиболее ярко выражены у человека, занимающегося математикой.

В обучении математике интуиция должна присутствовать как на уровне открытия, так и на уровне понимания. Ее значение в исследовательской деятельности подчеркивал еще А. Пуанкаре, выделяя два типа математиков: логиков и интуитивистов (геометров). «Главная цель обучения математике – развить известные способности ума, в том числе и интуицию, благодаря которой мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; если чистая математика может обойтись без интуиции, то она необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира». [4]

Таким образом, овладение математической деятельностью должно стать методологической основой обучения математике в классах физико-математического профиля, что в равной степени относится и к курсу стереометрии.

Очевидно, что в свете вышеизложенных подходов к определению структуры и содержания математической деятельности, процесс обучения стереометрии должен носить преимущественно поисковый характер, а программный материал способствовать созданию базы для самостоятельной творческой деятельности. Традиционная схема обучения, включающая подготовку, далее изучение нового материала, его закрепление, решение прежде стандартных упражнений, а затем нестандартных задач вырабатывает у учащихся стереотипы мышления. Поэтому наиболее продуктивно мы считаем сочетать изложение теории с упражнениями, самостоятельное решение которых позволит лучше усвоить соответствующие теоремы.

Освоение теории, несомненно, предполагает достаточно высокий уровень научности изложения и приобщение учащихся к активному использованию математической символики. Большинство теоретических положений курса, если объем и содержание понятийного аппарата является достаточным, необходимо доказывать, в остальных же (немногочисленных) случаях следует четко указывать, какое именно утверждение осталось недоказанным и объяснять почему.

Для эффективного освоения учащимися дедуктивного метода может применяться прием построения учащимися «маленькой теории» (термин А.А. Столяра [2]), которая характеризуется следующими положениями: она состоит, как правило, из небольшого числа, не более 20, утверждений; описывает лишь одну геометрическую структуру или геометрическую фигуру; всегда строится с использованием уже известных геометрических знаний внутри «большой» геометрической теории при наличии уже построенного ее фрагмента.

В исследованиях А.С. Рвановой [5] этот прием получил свое развитие в локальной аксиоматизации, которая заключается не в изучении готовой аксиоматики, а в ее создании. Система аксиом является не исходным пунктом, а завершающим этапом исследования. В этом случае усвоение учебного материала происходит в процессе их собственной активной деятельности. Локальная аксиоматизация предполагает проведение исследования на небольшом числе свойств геометрических объектов. Чтобы сделать процесс контролируемым в случае большого количества выявленных свойств, целесообразно разбить исследуемое множество на подмножества предложений, которые объединяются какой-либо общей идеей. Описанный прием может с успехом применяться при обучении стереометрии для повторения и обобщения курса планиметрии.

Значимую роль в профильном обучении стереометрии играют задачи. Методы решения задач необходимо систематически обсуждать и систематизировать. Следует уточнить, что на профильном уровне нецелесообразно использовать стандартные упражнения вычислительного характера, большая часть задач должны быть задачами повышенной трудности, в том числе, необходимо включать задачи, предлагавшиеся на различных математических соревнованиях.

Как уже было отмечено, в структуре математического мышления важную роль играет математическая интуиция, что инициирует появление некоторых математические объектов еще до того, как будет дано их логическое описание. Так, мы считаем вполне оправданным введение понятия многогранника и его объема, основанные первоначально на интуитивных представлениях учащихся, но в дальнейшем строго обоснованные. Это необходимо в силу того, что жесткое отделение аффинных вопросов стереометрии от метрических (в отношении порядка изучения материала) не позволяет вовремя начать решение содержательных задач, что, на наш взгляд, совершенно недопустимо. Кроме того, такое построение курса удается высвободить существенное количество учебного времени в конце 11-го класса, которое целесообразно посвятить повторению и подготовке к экзаменам.

Описанные выше подходы легли в основу авторского учебника по стереометрии [6], рекомендованного Министерством образования и науки РФ для изучения на профильном уровне в общеобразовательных учреждениях, содержание которого представлено ниже.

Глава 0. Вводная
Игра в геометрию
Элементы логики и теории множеств
Основные обозначения
Глава 1. Введение в стереометрию
Неопределяемые понятия и аксиомы стереометрии
Простейшие следствия из аксиом
Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые
О существовании объектов и построениях в стереометрии
Задачи
Глава 2. Параллельность в пространстве
Прямая и плоскость в пространстве. Признак параллельности
Параллельность плоскостей. Транзитивность параллельности плоскостей
Параллельное и центральное проектирование
Изображение фигур в стереометрии
Сечение многогранника. Построение сечений методом следов
Применение проектирования при построении сечений многогранников
Решение задач на сечение многогранников
Задачи
Глава 3. Векторы в пространстве
Определение вектора. Линейные операции над векторами
Компланарность векторов. Разложение вектора по базису
Угол между прямыми. Угол между векторами
Скалярное произведение векторов
Примеры решения задач
Задачи
Глава 4. Перпендикулярность в пространстве
Перпендикулярность прямой и плоскости
Связь между параллельностью и перпендикулярностью
Теорема о трех перпендикулярах
Дальнейшие сведения о многогранниках
Угол между прямой и плоскостью
Расстояние между фигурами
Применение теорем о перпендикулярности к решению задач
Нахождение расстояний и углов с помощью векторов
Геометрический подход к нахождению расстояний и углов
Задачи
Глава 5. Двугранные и многогранные углы
Двугранный угол и его измерение. Биссектор
Угол между двумя плоскостями. Признак перпендикулярности
Площадь ортогональной проекции многоугольника

Многогранные углы. Трехгранный угол и его свойства
Расчет трехгранных углов. Теорема о трех синусах
Задачи
Глава 6. Элементы теории многогранников
Пространственная область. Геометрическое тело
Многогранники и их элементы
Правильные многогранники
Теорема Эйлера
Задачи
Глава 7. Геометрические места точек пространства
Основные геометрические места точек пространства
Геометрические места точек, сводящиеся к основным
Метод пересечения и объединения
Различные геометрические места точек
Задачи
Глава 8. Преобразования пространства
Основные определения. Перемещения. Общие свойства перемещений
Параллельный перенос
Поворот вокруг оси
Центральная симметрия и симметрия относительно плоскости
Преобразование подобия в пространстве
Признаки равенства и подобия треугольников в пространстве*
Группы преобразований*
Классификация перемещений и преобразований подобия в пространстве
Задачи
Глава 9. Решение задач
Зависимость между основными углами в правильной пирамиде
Определение положения высоты пирамиды или призмы
Метод вспомогательного объема
Вспомогательный многогранник
Задачи на комбинации многогранников
Задачи
11-й класс
Глава 10. Тела вращения
Предварительные замечания. Цилиндр. Конус. Усеченный конус
Сфера и шар
Части шара и сферы
Комбинации шара с цилиндром, конусом и усеченным конусом
Взаимное расположение двух сфер. Задачи о касающихся сферах
Комбинации цилиндра, конуса и усеченного конуса с многогранниками
Теоремы о касательных и секущих для сферы
Комбинации шара с многогранниками
Нестандартные комбинации тел вращения с многогранниками
Конические сечения
Задачи
Глава 11. Векторы в пространстве (продолжение)
Векторное и смешанное произведение векторов
Геометрические приложения векторного и смешанного произведения векторов
Уравнение прямой в пространстве
Уравнение плоскости
Некоторые примеры
Декартова система координат

Литература

1. *Далингер В.А.* Проектирование элективных курсов по геометрии посредством локальной аксиоматизации // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 3. – С. 67–70.

2. *Столяр А.А.* Педагогика математики. – Минск: Высшая школа, 1986.

3. *Иванова Т.А.* Гуманитаризация общего математического образования. – Нижний Новгород: НГПУ, 1998.

4. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983.

5. *Рванова А.С.* Использование идеи локальной аксиоматизации в дифференцированных заданиях по стереометрии // Математика и информатика: Наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. Омск: ОмГПУ, 2004. – Вып. 4. — С. 83–89.

6. *Калинин А.Ю., Терешин Д.А.* Геометрия. 10–11 классы. – М.: МЦНМО, 2011.

Поступила в редакцию 01.02.2012.