

Московский физико-технический институт  
Факультет инноваций и высоких технологий  
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012  
Задачи про пропозициональные формулы и булевы функции

1. Постройте таблицы истинности для формул:

- a)  $\neg(p \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (p \vee r)$ ;
- b)  $(p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \rightarrow p) \vee q)$ ;
- c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (r \wedge \neg p))$ ;
- d)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (\neg r \wedge q))$ .

2. Являются ли следующие формулы тавтологиями:

- a)  $\neg q \rightarrow (\neg q \rightarrow q)$ ;
- b)  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ;
- c)  $((p \wedge \neg q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ ;
- d)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ;
- e)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q))$ ;
- f)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (r \vee q))$ ?

3. Приведите следующие формулы к КНФ и ДНФ, а также запишите эквивалентные им многочлены Жегалкина:

- a)  $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg r)$ ;
- b)  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee q)$ ;
- c)  $((((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow r$ .

4. Постройте как можно более короткую формулу от трёх переменных, которая:

- a) принимает то же значение, что и большинство переменных;
- b) истинна, если истинны ровно две переменные.

5. Придумайте функцию от  $n$  переменных, такую что любая ДНФ (КНФ), её выражающая, содержит каждую переменную в каждом конъюнкте (дизъюнкте).

КНФ (ДНФ) называется *совершенной*, если во всех составляющих её дизъюнктах (конъюнктах) каждая переменная встречается ровно один раз.

6. У какой функции нет совершенной КНФ? А у какой — СДНФ?

7. Являются ли следующие системы функций полными? Если нет, то докажите, если да, то выразите через них отрицание и конъюнкцию.

- a)  $\{\neg, \rightarrow\}$ ;
- b)  $\{\rightarrow, 0\}$ ;
- c)  $\{+, \vee, 1\}$ ;
- d)  $\{\leftrightarrow, +\}$ ;
- e)  $\{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ ;

- f)  $\{\rightarrow, / \}$ , где  $x/y = \neg(x \rightarrow y)$ ;
- g)  $\{0, \leftrightarrow, \text{maj}\}$ , где  $\text{maj}$  — функция трёх переменных, принимающая то же значение, что и большинство переменных.

8. Докажите, что:

- a) любую функцию, сохраняющую ноль, можно выразить через  $\wedge$  и  $+$ ;
- b) любую функцию, сохраняющую единицу, можно выразить через  $\wedge$  и  $\rightarrow$ ;
- c) любую линейную функцию можно выразить через  $0$  и  $\leftrightarrow$ ;
- d) любую монотонную функцию можно выразить через  $0, 1, \wedge$  и  $\vee$ ;
- e) любую самодвойственную функцию можно выразить через  $\neg$  и  $f$ , где  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ .

9. Докажите, что:

- a) Если  $A$  и  $B \rightarrow \neg A$  суть тавтологии, то  $\neg B$  — тавтология.
- b) Если  $A \vee B$  и  $\neg A \vee C$  суть тавтологии, то  $B \vee C$  — тавтология.
- c) Если  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow C$  и  $B \rightarrow D$  суть тавтологии, то  $C \vee D$  — тавтология.
- d) Если  $A \wedge B$ ,  $A \rightarrow C$  и  $B \rightarrow D$  суть тавтологии, то  $C \wedge D$  — тавтология.