УДК 571.9

В. Б. Трушин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Один способ получения оценок скорости сходимости для некоторых аппроксимаций с монотонными операторами

В работе доказываются оценки скорости сходимости некоторых аппроксимационных схем с монотонными операторами.

Ключевые слова: монотонность, вариационное неравенство, оценки скорости сходимости.

В настоящей работе доказываются оценки скорости сходимости некоторых аппроксимационных схем. Основу этой работы составляют результаты диссертации автора [4]. Используя эти оценки, можно получить оценки скорости сходимости для схем метода фиктивных областей для уравнений с эллиптическими операторами и некоторых вариационных неравенств.

В работе предполагается, что операторы A, F, F_1 и F_2 действуют из вещественного сепарабельного рефлексивного банахова пространства E с нормой $\|\cdot\|$ в сопряженное с пространством E пространство E^* и являются радиально непрерывными, ограниченными и монотонными. Оператор A является сильно монотонным. На пространстве E заданы непрерывные полунормы $r(\cdot)$, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ с выполнением следующих условий подчинения: $p(\cdot) \leqslant C\|\cdot\|$, $r(\cdot) \leqslant C_1 p(\cdot)$ с постоянными C, C_1.

Ниже используются следующие обозначения:

(y, x) – значение линейного непрерывного функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$;

$u_n \to u$ – сильная сходимость последовательности $\{u_n\} \subset E$ к элементу $u \in E$;

$u_n \rightharpoonup u$ – слабая сходимость последовательности $\{u_n\} \subset E$ к элементу $u \in E$;

$K \equiv \{u \in E : Fu = 0\}$.

Функция $m(u, v) : E \times E \to \mathbb{R}_+$ такая, что: $m(u, v) > 0$ при $u \neq v$, $\overline{\lim}\ m(u, v) \setminus \|u - v\| = +\infty$ при $\|v\| \to +\infty$ при фиксированном $u \in E$ и при этом выполняется условие, если $u_n \rightharpoonup u$ и $m(u_n, u) \to 0$, то $u_n \to u$.

Всюду $\lim\limits_{n\to\infty}$ обозначается как lim.

Определение 1. Оператор $A : E \to E^*$ называется

монотонным, *если* $\forall u, v \in E$ *выполняется неравенство* $(Au - Av, u - v) \geqslant 0$;

сильно монотонным с константой $m > 0$, *если* $\forall\ u, v \in E$ *выполняется неравенство* $(Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^2$;

сильно монотонным, *если* $\forall\ u,\ v \in E$ *выполняется неравенство* $(Au - Av, u - v) \geqslant m(u, v)$;

радиально непрерывным, *если* $\forall\, u, v \in E$ *функция* $\psi(t) = (A(u + tv), v)$ *непрерывна по* t *на отрезке* $[0; 1]$.

Теорема 1 ([1]) *Уравнение* $Au = 0$ *имеет единственное решение* u_0.

Теорема 2. *Уравнение*

$$Fu + \varepsilon Au = 0,\ \varepsilon > 0 \tag{1}$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ *и* $u_\varepsilon \to u_0$ *при* $\varepsilon \to +0$, *где* u_0 *– единственное решение ВН:*

$$(Au_0, u - u_0) \geqslant 0,\ \forall\ u \in K; \tag{2}$$

В теореме 3.7 книги [2] на с. 108, по существу, содержатся заключения теоремы 2. Отметим некоторые отличия в формулировках этих теорем: в указанной теореме 3.7 [2] коэрцитивность предполагается у оператора F, а в теореме 2 оператор A является коэрцитивным. Условие коэрцитивности в [2] используется для доказательства непустоты множества K, которое в предложенной теореме 2 является условием. Кроме этого, коэрцитивность операторов в этих теоремах используется для установления ограниченности множества $\{u_\varepsilon\}$. Сильная сходимость u_ε к u_0 доказывается в [2] с использованием условия (S) оператора A, которое является следствием сильной монотонности оператора A в теореме 2. Однако указанные отличия в формулировках теорем 2 и 3.7 [2] не являются существенными при их доказательствах.

Теорема 3 ([5]) *Пусть* 1) *множество $K = \{u \in E : Fu = 0\}$ непустое;*
2) *$F = F_1 + F_2$ и для любого u из E найдутся три такие элемента из E: u^+, u^- и u^*, что $u = u^+ + u^-$, $(u^+ - u^*) \in K$ и $(F_2u, u^+ - v) \geqslant 0$ при всех v из K.*

Тогда 1) уравнение (1) имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ и $u_\varepsilon \to u_0$ при $\varepsilon \to +0$;

2) *u_0 – единственное решение ВН* (2);

3) *справедлива оценка:*

$$(F_1u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2u_\varepsilon, u_\varepsilon^-) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant -\varepsilon(Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-). \tag{3}$$

Доказательство. Заключения 1, 2 теоремы 3 вытекают из теоремы 2, т.к. $u_0 \in K$, то

$$(Fu_\varepsilon - Fu_0, u_\varepsilon - u_0) = (Fu_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) =$$

$$= (F_1u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2u_\varepsilon, u_\varepsilon^+ - u_0) + (F_2u_\varepsilon, u_\varepsilon^-) \geqslant (F_1u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2u_\varepsilon, u_\varepsilon^-).$$

Так как u_0 является решением ВН (2), то
$(Au_0, u_0 - u_\varepsilon) = (Au_0, u_0 - u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^*) - (Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-) \leqslant -(Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-)$.

Кроме этого, из уравнения (1) получим $Fu_\varepsilon - Fu_0 + \varepsilon(Au_\varepsilon - Au_0) = -\varepsilon Au_0$. Объединяя эти соотношения и используя сильную монотонность оператора A, получим неравенство (3). Теорема 3 доказана.

Сформулируем и докажем несколько следствий из этой теоремы.

Следствие 1 ([5]) *Пусть* 1) *выполняется условие* 1 *теоремы* 3;
2) *для произвольного $u \in E$ имеет место разложение $u = u^+ + u^-$, где $u^+ \in K$ и для всех $v \in K$ выполняется неравенство $(Fu, u^+ - v) \geqslant 0$.*

Тогда справедливы заключения 1, 2 *теоремы* 3 *и оценка*

$$(Fu_\varepsilon, u_\varepsilon^-) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant -\varepsilon(Au_0, u_\varepsilon^-). \tag{4}$$

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 3, если в ее условиях положить $F_1 = 0$, $u^* = 0$.

Следствие 2 ([5]) *Пусть* 1) *выполняется условия следствия* 1;

2) *числа $\tau \in [0;1)$, $\mu > 0$, $m > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для любых u, v из E выполняются неравенства*

$(Fu, u^-) \geqslant \mu p^2(u^-)$,
$(Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^2$,
$|(Au_0, v)| \leqslant C_2 p^{1-\tau}(v)\,\|v\|^\tau$.

Тогда справедливо следующее уточнение оценки (4):

$$p(u_\varepsilon^-) \leqslant C_2(\varepsilon/\mu)^{(2-\tau)/2}\,(1/m)^{\tau/2}, \tag{5}$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant C_2(\varepsilon/\mu)^{(1-\tau)/2}\,(1/m)^{(1+\tau)/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Введем обозначения $x = \sqrt{\mu}p(u_\varepsilon^-)$, $y = \sqrt{m}\|u_\varepsilon - u_0\|$, $a = C_2(1/\mu)^{(1-\tau)/2}\,(1/m)^{\tau/2}$.

Тогда неравенство (4) запишется в виде $x^2 + \varepsilon y^2 \leqslant \varepsilon a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$, т.е. $x^2 \leqslant \varepsilon a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$ и $y^2 \leqslant a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$. Из первого неравенства получим $x \leqslant (\varepsilon\, a\, y^\tau)^{1/(1+\tau)}$. Подставим эту оценку во второе неравенство, тогда $y \leqslant a\,\varepsilon^{(1-\tau)/2}$ и, следовательно, $x \leqslant a\,\varepsilon^{(2-\tau)/2}$, что с учетом введенных обозначений совпадает с неравенствами (5) и (6). Следствие доказано.

Следствие 3 ([5]) *Пусть* 1) *выполняются условия теоремы* 3;

2) *числа* $\tau \in (0;1]$, $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ *и* μ, m, C_2, C_3, C_4 *– положительные числа такие, что для любых* u, v *из* E *выполняются неравенства*

$r(u^-) \leqslant r(u)$,

$p(u^-) \leqslant p(u)$,

$r(u^*) \leqslant r(u)$,

$p(u^*) \leqslant p(u)$,

$q(u^*) \leqslant C_2 r(u)$,

$(F_1 u, u - u_0) \geqslant \alpha\, r^2(u) + \lambda\, p^2(u)$,

$(F_2 u, u^-) \geqslant \mu\, q^2(u^-)$,

$(Au - Av, u - v) \geqslant m\, \|u - v\|^2$,

а для элемента u_0 *выполняются соотношения:*

$p(u_0) = 0$,

$|(Au_0, v)| \leqslant C_3 q(v) + C_4 r^{1-\tau}(v)\, p^\tau(v)$.

Тогда справедливо следующее уточнение оценки (3):

1) *при* $\alpha > 0,\ \lambda > 0,\ \tau \in (0;1)$ *имеем*

$$\begin{aligned} &r(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\alpha},\\ &p(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\lambda},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C_5/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{7}$$

2) *при* $\alpha > 0,\ \lambda = 0,\ \tau \in (0;1)$ *имеем*

$$\begin{aligned} &r(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon^{(2-\tau)/2} C_6/\sqrt{\alpha},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon^{(2-\tau)/2} C_6/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant 2\varepsilon^{(1-\tau)/2} C_6/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{8}$$

3) *при* $\alpha \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ \tau = 1$ *имеем*

$$\begin{aligned} &\sqrt{\alpha}\ r(u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon C_7,\\ &p(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_7/\sqrt{\lambda},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon C_7/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C_7/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{9}$$

где

$C_5 = \sqrt{\frac{(C_2C_3+2C_4)^2}{4\alpha} + \frac{C_3^2}{4\mu} + \frac{(1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau}\tau^2 C_4^2}{\lambda}}$,

$C_6 = \sqrt{\frac{(C_2C_3+2C^\tau C_4)^2}{4\alpha} + \frac{C_3^2}{4\mu} + \frac{(1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau}\tau^2 C^{2\tau} C_4^2}{m}}$,

$C_7 = \sqrt{\frac{(C_1C_2C_3+2C_4)^2}{4\lambda} + \frac{C_3^2}{4\mu}}$.

Доказательство. 1) пусть $x = r(u_\varepsilon)$, $y = p(u_\varepsilon)$, $z = q(u_\varepsilon^-)$, $w = \|u_\varepsilon - u_0\|$, тогда неравенство (3) с учетом условия 2 следствия 3 примет вид

$\alpha\, x^2 + \lambda\, y^2 + \mu\, z^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \varepsilon\,(C_3 z + 2\, C_4\, x^{1-\tau} y^\tau + C_2 C_3 x)$.

Рассмотрим теперь случай с $\tau \in (0;1)$.

Неравенство Юнга (см. [3], с. 61) для произвольных положительных чисел a, b, δ и $\beta \in (0;1)$ дает $ab \leqslant \delta\, a^{1/\beta} + (\beta/\delta)^{\beta/(1-\beta)}(1-\beta)\, b^{1/(1-\beta)}$.

Положим $\beta = 1-\tau$, $\delta = \varepsilon^{-\gamma}$, $a = x^{1-\tau}$, $b = y^{\tau}$. Тогда последнее неравенство примет вид $x^{1-\tau}y^{\tau} \leqslant x\varepsilon^{-\gamma} + (1-\tau)^{(1-\tau)/\tau}\tau\,\varepsilon^{\gamma(1-\tau)/\tau}y$.

Используя последнее неравенство, перепишем исходное в виде

$$\begin{aligned}&\alpha\, x^2 + \lambda\, y^2 + \mu\, z^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,(C_3 z + (C_2\, C_3 + 2\, C_4\, \varepsilon^{-\gamma})x + 2\, C_4\,(1-\tau)^{(1-\tau)/\tau}\tau\varepsilon^{\gamma(1-\tau)/\tau}y);\end{aligned}$$

2) пусть $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma = 0$, тогда, выделяя полный квадрат в левой части последнего неравенства, получим

$$\begin{aligned}&(\sqrt{\alpha}\, x - \varepsilon\,(C_2C_3 + 2C_4)/2\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\lambda}\, y - \varepsilon\, C_4(1-\tau)^{(1-\tau)/\tau}\,\tau/\sqrt{\lambda})^2 + \\ &+ (\sqrt{\mu}\, z - \varepsilon\, C_3/2\sqrt{\mu})^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^2\,((C_2\, C_3 + 2\, C_4)^2/4\alpha + (1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau}\,\tau^2\, C_4^2/\lambda + C_3^2/4\mu),\end{aligned}$$

из этого неравенства следует (7);

3) пусть $\alpha > 0$, $\lambda = 0$, $\tau \in (0;1)$, $\gamma = \tau/2$, тогда, используя соотношение $p(u_\varepsilon) = p(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\|u_\varepsilon - u_0\|$, получим

$$\begin{aligned}&\alpha\, x^2 + \mu\, z^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,(C_3 z + (C_2\, C_3 + 2\, C_4\, \varepsilon^{-\tau/2})x + 2\,\mathrm{C}\, C_4\,(1-\tau)^{(1-\tau)/\tau}\tau\varepsilon^{\gamma(1-\tau)/2}w),\end{aligned}$$

из этого неравенства так же, как и в 2), получим неравенство (8);

4) пусть $\alpha \geqslant 0$, $\lambda > 0$, $\tau = 1$, тогда

$$\alpha\, x^2 + \lambda\, y^2 + \mu\, z^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \varepsilon\,(C_3 z + (2\, C_4 + C_1\, C_2\, C_3\,)y),$$

что дает (9). Следствие 3 доказано полностью.

Литература

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейныеураванения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.
4. *Трушин В.Б.* Об одной общей схеме метода фиктивных областей: дис. на соискание уч. ст. к. ф.-м.н. — М., 1992.
5. *Трушин В.Б.* О решении некоторых нелинейных уравнений и вариационных неравенств // ДАН АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 2. – С. 289–293.
6. *Трушин В.Б.* О решении нелинейных уравнений с операторами монотонного типа // Современные проблемы фундаментальной и прикланой математики: сб. науч. трудов / МФТИ. — М., 2007. — С. 202–222.

Поступила в редакцию 20.11.2011