Задачи к экзамену по курсу «Теория вероятностей»

осень 2011

1. Дума в составе 40 человек случайно голосует по 5 предложениям. С какой вероятностью одно из предложений будет принято (получит больше половины всех голосов), если каждый голосует только за одно предложение?

2. В ящике лежит 7 красных шаров, 8 синих и 5 зеленых. Все шары одного цвета неразличимы. Случайно вынимают 7 шаров. С какой вероятностью будут вынуты только красные шары?

3. По окончании футбольного матча из 18 человек в заявке команды случайно выбираются пятеро для прохождения допинг-контроля. Какова вероятность того, что среди этих пятерых будут хотя бы один брюнет и хотя бы два блондина, если всего в заявке 10 блондинов, 7 брюнетов и 1 рыжий?

4. Капитану галеры нужны 8 гребцов: 4 на левый борт и 4 — на правый. В баре, когда туда пришел капитан, было 15 моряков, причем 6 из них умели грести только на правом борту, 5 — только на левом, а четверо оставшихся были универсальными гребцами. Капитан набрал случайную команду из 8 человек. Найдите вероятность того, что галера пустится в плавание.

5. Одновременно бросаются три игральных кости. Найдите вероятность того, что выпавшие три числа образуют арифметическую прогрессию.

6. Из множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ случайно выбираются три числа. Найдите вероятность того, что выбранные числа образуют арифметическую прогрессию.

7. Имеется n различных сигнальных флагов (среди них есть красный флаг) и m мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке и на каких мачтах развешены флаги (необязательно на каждую мачту вывешивать хотя бы один флаг). Каждый день произвольным образом вывешивают все флаги одновременно. Получается случайный сигнал. Найдите вероятность того, что красный флаг висит самым верхним на одной из мачт.

8. На переговоры за круглый стол приглашены $n+k$ рыцарей и n священников. Они рассаживаются за столом случайным образом. Найдите вероятность того, что никакие два священника не сели рядом.

9. На остановку прибывают автобусы маршрутов $1, 2, \ldots, k$. Номер маршрута прибывающего автобуса не зависит от номеров других автобусов и может быть любым с одинаковой вероятностью $1/k$. Найдите вероятность того, что до появления автобуса маршрута 1 ни на одном из остальных маршрутов не придет более одного автобуса.

10. Орден Хаоса всегда оставляет последнее слово за случайностью в принятии решений по важным вопросам. Из 11 членов ордена Хаоса семеро всегда принимают верное решение, трое всегда ошибаются, а глава ордена всегда принимает решение случайно. Производится голосование шаров: за принятие решения голосуют белым шаром,

против – черным. После этого из урны вынимается 5 шаров. Если хотя бы три из них белые, то решение принимается, в противном случае – отвергается. Какова вероятность того, что будет отвергнуто неправильное решение вопроса?

11. В ящик, содержащий n шаров, опускают один черный и один белый шар. После чего наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров окажется один белый и один черный, если изначально в ящике лежат только черные или белые шары, все шары различимы и все возможные варианты первоначального цветового состава шаров равновероятны.

12. На семинар пришли 30 математиков. После семинара ни один из них не смог узнать свою собственную шляпу, и они взяли шляпы наугад. Далее, каждый из них с вероятностью $1/4$ независимо от других мог потерять шляпу по дороге домой. Найдите вероятность того, что ни один математик не принес домой свою шляпу.

13. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i — выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите $\mathsf{E}X$.

14. Стрелок в тире стреляет последовательно по трем мишеням. Вероятность попадания в “спокойном” состоянии равна $1/3$. При попадании стрелок воодушевляется, что повышает вероятность попадания в следующую мишень на $1/6$ по сравнению с предыдущей. При промахе стрелок успокаивается. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий.

15. На экзамен пришли 10 студентов. Трое из них подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно, один — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все вопросы, хорошо подготовленный — на 16, удовлетворительно — на 10, плохо — на 5. Студент, сдавший экзамен, ответил на все три заданных вопроса. Найдите условную вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично, б) хорошо, в) плохо.

16. Ксерокс состоит из трех частей A, B, C. Вероятность того, что сломается часть A равна $0,1$. Вероятность того, что сломается часть B равна $0,2$, если сломана и A тоже, и $0,1$ иначе. Вероятность того, что выйдет из строя часть равна $0,2$, если сломана и B тоже, и $0,1$ иначе. Сигнал “позвать мастера” загорается, если вышли из строя по крайней мере две части из трех. Я могу починить ксерокс, если сломаны только две части, в противном случае я только все испорчу. Какова условная вероятность того, что мне не стоит браться за ремонт, при условии, что горит сигнал “позвать мастера”?

17. В кошельке лежат n монет, каждая из которых имеет две стороны. У k монет орел на обеих сторонах, у остальных — орел только на одной стороне. Мы выбираем монетку случайным образом и четыре раза подряд подбрасываем. Какова условная вероятность того, что при четвертом подбрасывании снова выпадет орел, если при трех предыдущих попытках тоже выпал орел?

18. Зарплата Васи равна 100, а зарплата Пети — 200. Каждый день у них в кармане находится случайная доля их месячной зарплаты. Вася и Петя встречаются на ярмарке, и цыган предлагает им сыграть в такую игру: если у Пети в кармане денег втрое больше чем у Васи, то Вася отдает Пете свои деньги; если у Васи больше денег, чем у Пети, то Петя отдает Васе свои деньги; в противном случае Петя и Вася отдают цыгану половину своих денег. Каковы вероятности выигрыша Васи, Пети и цыгана?

19. Из точки на полу, находящейся на расстоянии 2 от абсолютно упругой стены, стреляют в эту стену. На потолке, который имеет высоту 5, плашмя закреплен круглый

диск, радиус которого равен 1. Центр диска находится на расстоянии 2 от той же самой стены. С какой вероятностью пуля поразит диск?

20. В мишень, которая представляет собой прямоугольник размера 3x2, стреляют из пистолета. Известно, что отклонение пули от точки, на которую нацелен пистолет произвольно, но не превышает 1/4 по любому направлению. Стрелок целится в произвольную точку мишени. С какой вероятностью он попадет в мишень?

21. На земле лежит мяч, имеющий форму шара. На верхней точке мяча сидит червяк. Он случайно выбирает плоскость и начинает ползти по окружности, которая лежит в пересечении этой плоскости и поверхности мяча. С какой вероятностью червяк заползет на нижнюю половину мяча?

22. Планета Луна II представляет собой шар с центром O. Два космических корабля A и B приземляются наугад на поверхность планеты, их местоположения — случайные точки поверхности планеты. Корабли A и B могут иметь прямую радиосвязь, если угол между прямыми AO и OB меньше $\pi/2$. Найдите плотность распределения угла AOB, образованного прямыми AO и OB, и вероятность того, что между A и B есть прямая радиосвязь.

23. Случайные величины X, Y, Z независимы в совокупности и одинаково распределены: каждая равновероятно принимает значения 1 и -1. Положим $W = XYZ$. Какие утверждения являются истинными:

    а) любые две случайные величины из набора (X, Y, Z, W) независимы,

    б) любые три случайные величины из набора (X, Y, Z, W) независимы в совокупности,

    в) случайные величины (X, Y, Z, W) независимы в совокупности?

24. Случайные величины X, Y, Z, W независимы в совокупности и одинаково распределены: каждая равновероятно принимает значения 1 и -1. Является ли независимым в совокупности следующий набор случайных величин: XYZ, XYW, XW?

25. Случайный вектор (X, Y) принимает значения из $\{0, 1\}^2$, причем

    $$\mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = a,\ \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = b,\ \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) = c,\ \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = d.$$

    Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы X и Y были а) некоррелированными, б) независимыми.

26. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — некоторая алгебра подмножеств. Докажите, что для каждого $C \in \sigma(\mathcal{A})$ выполнено

    $$\inf_{A \in \mathcal{A}} \mathsf{P}\left(C \,\Delta\, A\right) = 0.$$

27. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — σ-алгебры подмножеств Ω, причем $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ — π-система. Докажите, что тогда $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ является σ-алгеброй.

28. Пусть на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ задана вероятностная мера P, функция распределения которой строго монотонна. Существуют ли два пересекающихся открытых множества на $\mathbb{R}$, вероятность пересечения которых равна нулю?

29. Верно ли, что для любых двух π-систем X_1 и X_2 справедливы равенства: а) $\sigma(X_1 \cap X_2) = \sigma(X_1) \cap \sigma(X_2)$, б) $\lambda(X_1 \cap X_2) = \lambda(X_1) \cap \lambda(X_2)$.

30. Случайная величина X имеет распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

31. Случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами (N, n, m), где $m \le n \le N$, т.е.

$$\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

32. Известно, что ξ — пуассоновская случайная величина с параметром 2011. Случайная величина η равна $\xi^2 4^\xi$. Найдите математическое ожидание случайной величины η.

33. Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -3; \\ (3+x)/40, & \text{если } -3 \le x < 1; \\ x^3/10, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

34. Случайные величины X, Y, Z, W независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите вероятность того, что отрезки с длинами X, Y, Z и W могут служить сторонами некоторого четырехугольника.

35. Случайные величины X и Z независимы. X имеет экспоненциальное распределение с параметром 3, а Z — равномерное на отрезке $[0, 2]$. Найдите плотность случайной величины $Y = Z - X$.

36. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ — независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найдите совместную плотность случайных величин $X_{(2)}$ и $X_{(n)}$.

37. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с плотностью $p(x) = x^{-2}\mathrm{I}\{x \ge 1\}$. Положим $L(u) = \min\{n \ge 1 : \ X_n \in [u, v]\}$, $v > u > 1$. Найдите распределение случайной величины $L(u)$ и ее математическое ожидание.

38. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Найдите плотность случайной величины $3X - 2Y$.

39. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ — независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найдите ковариацию случайных величин $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

40. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотность случайной величины $3X - 2Y$.

41. Случайные величины ξ_1, ξ_2 — независимы, ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i, $i = 1, 2$. Положим $\eta = \min(\xi_1, \xi_2^2)$. Найдите $\mathsf{E}\eta$.

42. Случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром 1 и независимы. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 1/(X+Y)$.

43. Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и ξ принимают значения только во множестве $\mathbb{Z}$. Докажите, что в этом случае $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathsf{P}(\xi_n = m) \longrightarrow \mathsf{P}(\xi = m)$ при $n \to \infty$.

44. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ — две последовательности случайных величин, причем для каждого $n \ge 1$ величины ξ_n и η_n независимы. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Докажите, что ξ и η — тоже независимы.

45. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность пуассоновских случайных величин, причем $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. Докажите, что ξ — тоже пуассоновская случайная величина.

46. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность нормальных случайных величин, причем $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ и $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Докажите, что ξ — тоже нормальная случайная величина.

47. Случайные величины X, Y, Z независимы. X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, Y — распределение Коши с параметром σ, Z — равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите характеристическую функцию XYZ.

48. Является ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ \exp\left(-(|x| - 1)^2\right), & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

характеристической?

49. Пусть случайная величина ξ имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} -|x| + 1, & \text{если } |x| < 1/2; \\ -2|x| + 3/2, & \text{если } 1/2 \leq |x| < 3/2; \\ 0, & \text{если } |x| \geq 3/2. \end{cases}$$

Вычислите плотность случайной величины ξ.

50. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — случайные векторы. Докажите, что ξ и η независимы тогда и только тогда, когда для любых ограниченных непрерывных функций $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathsf{E}(f(\xi)g(\eta)) = \mathsf{E}f(\xi)\,\mathsf{E}g(\eta).$$