УДК 515.145.23/.27

А. В. Ершов[1], *Т. Шик*[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Математический институт Геттингенского университета Георга-Августа

Гомотопические снопы расслоений

Целью данной работы является определение скручивающих коциклов для высшей скрученной K-теории. Для этого мы обобщаем подход к определению скрученной K-теории, основанный на понятии снопа расслоений (bundle gerbe). В работе определяется понятие гомотопического снопа расслоений, связанного с гомотопическим коциклом со значениями в моноиде эндоморфизмов прямого предела матричных алгебр. На множестве таких объектов над фиксированной базой X определяется отношение стабильной эквивалентности, классы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $X \to \mathrm{BBU}_{\otimes}[\frac{1}{l}]$ в локализацию распетливания $\mathrm{BU}_{\otimes}$.

Ключевые слова: скрученная K-теория, векторное расслоение, матричная алгебра, классифицирующее пространство, сноп расслоений, топологический моноид.

1. Введение

1.1. Скручивания топологической K-теории

Комплексная K-теория — это 2-периодическая обобщенная теория когомологий, представляемая Ω-спектром $\{K_n\}_{n\geq 0}$, где

$$K_n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \mathrm{U}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Таким образом, K_0 — E_∞-кольцевое пространство, и соответствующее пространство единиц есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{BU}_{\otimes}$. Скручивания $K(X)$ (где X — компактное пространство) классифицируются гомотопическими классами отображений:

$$X \to \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{BU}_{\otimes}) \simeq \mathrm{K}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\, 1) \times \mathrm{BBU}_{\otimes}. \tag{1}$$

Ввиду изоморфизма спектров $\mathrm{BU}_{\otimes} \cong \mathrm{K}(\mathbb{Z},\, 2) \times \mathrm{BSU}_{\otimes}$ [5,9] скручивания классифицируются элементами группы $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\, 1) \times H^3(X,\, \mathbb{Z}) \times [X,\, \mathrm{BBSU}_{\otimes}]$.

Скручивания, отвечающие первым двум множителям $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\, 1) \times H^3(X,\, \mathbb{Z})$, изучались М. Каруби [4], П. Донованом и М. Каруби [3], а также Дж. Розенбергом [8] в случае элементов конечного порядка и М. Атиа и Г. Сигалом [1] в общем случае. Наша цель — развить геометрический подход к скрученной K-теории, отвечающей элементам конечного порядка из $H^3(X,\, \mathbb{Z}) \times [X,\, \mathrm{BBSU}_{\otimes}]$.

Эта задача распадается на две части: во-первых, дать геометрическое определение скручивающим коциклам и, во-вторых, определить соответствующую скрученную K-теорию и проверить выполнение необходимых свойств. Данная работа посвящена первой части этой программы — геометрическому определению скручивающих коциклов, роль которых играют так называемые «гомотопические снопы расслоений».

Последнее понятие родственно понятию снопа расслоений, введенному в работе [6]. Сноп расслоений можно рассматривать как геометрическое представление элемента из $H^3(X,\, \mathbb{Z})$ (соответствие задается классом Диксмье—Дуади), подобно тому как комплексное линейное расслоение дает геометрическое представление элемента $H^2(X,\, \mathbb{Z})$ (соответствие задается первым классом Чженя). Для скручивания конечного порядка $\alpha \in H^3(X,\, \mathbb{Z})$ соответствующая K-теория может быть определена следующим образом: выбирается сноп расслоений $(L,\, Y)$ с классом Диксмье—Дуади, равным α, и затем рассматривается симметризация коммутативного моноида, состоящего из классов изоморфизма конечномерных модулей над данным снопом с операцией прямой суммы [2].

1.2. Проективные коциклы и снопы расслоений

Конструкции и результаты о гомотопических коциклах и гомотопических снопах расслоений, излагаемые в следующих разделах, во многом аналогичны теории проективных коциклов и «обычных» снопов расслоений, которую мы кратко напоминаем ниже в удобной для нас форме. Подробности см. в [2, 6, 7].

Зафиксируем некоторое положительное число $k > 1$ и рассмотрим проективную унитарную группу $\mathrm{PU}(k) := \mathrm{U}(k)/\mathrm{U}(1)$ — фактор-группу $\mathrm{U}(k)$ по центру. Пусть

$$\vartheta_{k,1} = \mathrm{U}(k) \underset{\mathrm{U}(1)}{\times} \mathbb{C} \to \mathrm{PU}(k) \tag{2}$$

— каноническое линейное расслоение над $\mathrm{PU}(k)$, ассоциированное с главным $\mathrm{U}(1)$-расслоением

$$\mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(k) \to \mathrm{PU}(k). \tag{3}$$

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — его хорошее открытое покрытие (все непустые конечные пересечения $U_{\alpha_0\ldots\alpha_k} := U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ стягиваемы), $Y := \coprod U_\alpha$. Пусть также задан некоторый проективный коцикл $(g, \mathcal{U}) := \{g_{\alpha\beta}\}$,

$$g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \to \mathrm{PU}(k).$$

Эти данные определяют некоторый сноп расслоений $(L(g), Y)$, где линейные расслоения $L_{\alpha\beta} := g^*_{\alpha\beta}\vartheta_{k,1} \to U_{\alpha\beta}$ определены как обратные образы канонического линейного расслоения $\vartheta_{k,1}$, причем произведение

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} \colon L_{\alpha\beta} \otimes L_{\beta\gamma} \overset{\cong}{\to} L_{\alpha\gamma}$$

над тройными пересечениями $U_{\alpha\beta\gamma}$ определяется с помощью группового умножения

$$\widehat{\mu}_k \colon \mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(k) \to \mathrm{U}(k)$$

(ср. (3)). В частности,

$$\mu^*_k(\vartheta_{k,1}) \cong \vartheta_{k,1} \boxtimes \vartheta_{k,1}, \tag{4}$$

где

$$\mu_k \colon \mathrm{PU}(k) \times \mathrm{PU}(k) \to \mathrm{PU}(k)$$

— умножение в группе и $\boxtimes$ обозначает внешнее тензорное произведение. Очевидно, произведение θ ассоциативно над четырехкратными пересечениями, то есть диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_{\alpha\beta} \otimes L_{\beta\gamma} \otimes L_{\gamma\delta} \arrow[r, "\theta_{\alpha\beta\gamma}\otimes \mathrm{id}_{L_{\gamma\delta}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{L_{\alpha\beta}}\otimes\theta_{\beta\gamma\delta}"'] & L_{\alpha\gamma} \otimes L_{\gamma\delta} \arrow[d, "\theta_{\alpha\gamma\delta}"] \\ L_{\alpha\beta} \otimes L_{\beta\delta} \arrow[r, "\theta_{\alpha\beta\delta}"'] & L_{\alpha\delta} \end{tikzcd} \tag{5}$$

коммутативны над $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Сноп $(L(g), Y)$ имеет характеристический класс со значениями в $H^3(X, \mathbb{Z})$ (причем его порядок делит k) — класс Диксмье–Дуади; напомним его конструкцию. Так как $\mathcal{U}$ — хорошее покрытие, то можно выбрать сечения $\sigma_{\alpha\beta}$ эрмитовых линейных расслоений $L_{\alpha\beta} \to U_{\alpha\beta}$, равные по модулю единице в каждом слое. Тогда над $U_{\alpha\beta\gamma}$ имеем

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}(\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma}) = \lambda_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{\alpha\gamma}$$

для некоторых функций $\lambda_{\alpha\beta\gamma} \colon U_{\alpha\beta\gamma} \to \mathrm{U}(1)$ и, используя условие ассоциативности (5), получаем, что $\lambda = \{\lambda_{\alpha\beta\gamma}\}$ — 2-коцикл Чеха с коэффициентами в $\underline{\mathrm{U}(1)}$ — пучке ростков $\mathrm{U}(1)$-значных непрерывных функций. Используя кограничный гомоморфизм

$$\delta \colon H^2(X, \underline{\mathrm{U}(1)}) \to H^3(X, \mathbb{Z})$$

(являющийся изоморфизмом, так как $\underline{\mathbb{R}}$ — тонкий пучок, и, значит, $H^i(X, \underline{\mathbb{R}}) = 0$ для $i \geq 1$) в длинной точной последовательности когомологий, ассоциированной с короткой точной последовательностью пучков

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{R}} \stackrel{exp(2\pi i \dots)}{\longrightarrow} \underline{\mathrm{U}(1)} \to 1,$$

определяем класс Диксмье—Дуади $DD(L(g), Y)$ как $\delta([\lambda])$, где $[\lambda] \in H^2(X, \underline{\mathrm{U}(1)})$ — класс когомологий коцикла λ. Этот класс — препятствие (причем единственное) к существованию подъема проективного коцикла $\{g_{\alpha\beta}\}$ до $\mathrm{U}(k)$-коцикла. Снопы расслоений с одним и тем же классом Диксмье—Дуади называются *стабильно эквивалентными.*

По $\mathrm{PU}(k)$-коциклу $\{g_{\alpha\beta}\}$ строится главное $\mathrm{PU}(k)$-расслоение над X, и таким образом получается взаимно однозначное соответствие между множеством $H^1(X, \underline{\mathrm{PU}(k)})$ и множеством классов изоморфизма главных $\mathrm{PU}(k)$-расслоений с базой X. Существует гомотопическое описание последнего множества: каждое главное $\mathrm{PU}(k)$-расслоение над X классифицируется некоторым отображением $X \to \mathrm{BPU}(k)$, единственным с точностью до гомотопии, то есть существует естественная по X и $\mathrm{PU}(k)$ биекция множеств $H^1(X, \underline{\mathrm{PU}(k)}) \cong [X, \mathrm{BPU}(k)]$, где $[X, Y]$ обозначает множество гомотопических классов отображений $X \to Y$.

Мы также имеем точную последовательность пучков

$$1 \to \underline{\mathrm{U}(1)} \to \underline{\mathrm{U}(k)} \to \underline{\mathrm{PU}(k)} \to 1, \tag{6}$$

отвечающую точной последовательности групп (3), и соответствующий кограничный гомоморфизм $\delta_k\colon H^1(X, \underline{\mathrm{PU}(k)}) \to H^2(X, \underline{\mathrm{U}(1)})$. Нетрудно показать, что *каждый элемент конечного порядка в* $H^2(X, \underline{\mathrm{U}(1)}) \cong H^3(X, \mathbb{Z})$ *принадлежит образу* δ_k *для некоторого* k. Другими словами, произвольный сноп расслоений с классом Диксмье—Дуади конечного порядка стабильно эквивалентен некоторому снопу, полученному применением приведенной выше конструкции к некоторому проективному коциклу. Из точности последовательности когомологий, связанной с последовательностью (6), также следует, что сноп $(L(g), Y)$ стабильно тривиален тогда и только тогда, когда соответствующий проективный коцикл g является образом унитарного коцикла при гомоморфизме $H^1(X, \mathrm{U}(k)) \to H^1(X, \mathrm{PU}(k))$, или, на языке классифицирующих пространств, когда классифицирующее отображение $X \to \mathrm{BPU}(k)$ для соответствующего главного $\mathrm{PU}(k)$-расслоения поднимается до некоторого отображения $X \to \mathrm{BU}(k)$ в расслоении

$$\mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathrm{BU}(k) \longrightarrow \mathrm{BPU}(k). \tag{7}$$

2. Топологический моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$

Заметим, что в приведенной в предыдущем параграфе конструкции снопов расслоений с помощью проективных коциклов использовался тот факт, что группы $\mathrm{PU}(k)$ являются базами нетривиальных линейных расслоений $\vartheta_{k,\,1}$ (можно показать, что любое линейное расслоение над X, имеющее конечный порядок в группе $Pic(X) \cong H^1(X, \underline{\mathrm{U}(1)}) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$, является обратным образом $\vartheta_{k,\,1}$ для некоторого k), причем имеет место изоморфизм (4). Мы хотим показать, что данную конструкцию можно существенно обобщить, заменив группу $\mathrm{PU}(k)$ на некоторый топологический моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$.

2.1. Пространства унитальных гомоморфизмов матричных алгебр

Зафиксируем пару натуральных чисел $\{k, l\}$. Пусть $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ обозначает пространство унитальных $*$-гомоморфизмов матричных алгебр $\mathrm{Hom}_{alg}(M_{kl^m}(\mathbb{C}), M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}))$. Напомним, что группа $*$-автоморфизмов комплексной матричной алгебры $M_n(\mathbb{C})$ есть $\mathrm{PU}(n)$, поэтому на $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ определены левое действие группы $\mathrm{PU}(kl^{m+n})$ и правое действие группы $\mathrm{PU}(kl^m)$. Более того, $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ является однородным пространством группы $\mathrm{PU}(kl^{m+n})$.

Предложение 1. Существует изоморфизм однородных пространств

$$\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \cong \mathrm{PU}(kl^{m+n})/(E_{kl^m} \otimes \mathrm{PU}(l^n)), \tag{8}$$

где E_n обозначает единичную матрицу, а «$\otimes$» — кронекеровское произведение матриц.
Доказательство является простым следствием теоремы Нетер—Сколема. $\square$

В частности, при $l = 1$ имеем $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} = \mathrm{PU}(k)$.

2.2. Канонические векторные расслоения над пространствами $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$

Заметим, что в представлении (8) пространства $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ как однородного пространства проективные унитарные группы можно заменить на унитарные:

$$\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \cong \mathrm{U}(kl^{m+n})/(E_{kl^m} \otimes \mathrm{U}(l^n)). \tag{9}$$

Из этого представления вытекает, что $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ является базой главного $\mathrm{U}(l^n)$-расслоения

$$\mathrm{U}(l^n) \longrightarrow \mathrm{U}(kl^{m+n}) \longrightarrow \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}. \tag{10}$$

Пусть

$$\vartheta_{kl^m,\, l^n} = \mathrm{U}(kl^{m+n}) \underset{\mathrm{U}(l^n)}{\times} \mathbb{C}^{l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$$

— векторное $\mathbb{C}^{l^n}$-расслоение, ассоциированное с (10). В частности, для $l = 1$ мы возвращаемся к линейному расслоению $\vartheta_{k,\,1} \to \mathrm{PU}(k)$ (ср. (2)).

Имеет место изоморфизм $M_m(M_n(\mathbb{C})) = M_{mn}(\mathbb{C})$. Сопоставление гомоморфизму

$$h\colon M_{kl^m}(\mathbb{C}) \to M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$$

гомоморфизма

$$M_l(h)\colon M_l(M_{kl^m}(\mathbb{C})) \to M_l(M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}))$$

определяет вложение

$$\iota_{m+1,\, n}\colon \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^{m+1},\, l^n}.$$

Сопоставление гомоморфизму

$$h\colon M_{kl^m}(\mathbb{C}) \to M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$$

его композиции с

$$i\colon M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}) \to M_{kl^{m+n+1}}(\mathbb{C}),\ i(T) = E_l \otimes T$$

определяет вложение

$$\iota_{m,\, n+1}\colon \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^{n+1}}.$$

Предложение 2. Имеем

$$\iota^*_{m+1,\, n}(\vartheta_{kl^{m+1},\, l^n}) \cong \vartheta_{kl^m,\, l^n}, \quad \iota^*_{m,\, n+1}(\vartheta_{kl^m,\, l^{n+1}}) \cong \vartheta_{kl^m,\, l^n} \otimes [l],$$

где $[l]$ обозначает тривиальное $\mathbb{C}^l$-расслоение.
Доказательство тривиально. $\square$

Операция композиции унитальных $*$-гомоморфизмов матричных алгебр определяет отображение

$$\mu^m_{n,\, r}\colon \mathrm{Hom}_{alg}(M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}),\, M_{kl^{m+n+r}}(\mathbb{C})) \times \mathrm{Hom}_{alg}(M_{kl^m}(\mathbb{C}),\, M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}_{alg}(M_{kl^m}(\mathbb{C}),\, M_{kl^{m+n+r}}(\mathbb{C})),$$

то есть

$$\mu^m_{n,\, r}\colon \mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\, l^r} \times \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^{n+r}}. \tag{11}$$

Предложение 3. В предыдущих обозначениях имеем (ср. (4)):

$$(\mu^m_{n,\, r})^*(\vartheta_{kl^m,\, l^{n+r}}) \cong \vartheta_{kl^{m+n},\, l^r} \boxtimes \vartheta_{kl^m,\, l^n}.$$

Доказательство тривиально. $\square$

2.3. Топологический моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$

Используя пространства $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ и вложения $\iota_{m+1,\, n}$, $\iota_{m,\, n+1}$, $m,\, n \in \mathbb{N}$, мы можем образовать прямой предел $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty} := \varinjlim_{m,\, n} \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$. Введенные в предыдущем пункте отображения $\mu^m_{n,r}$ задают на пространстве $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ структуру топологического моноида.

Далее мы предположим, что $(k,\, l) = 1$. Данное условие обеспечивает нестягиваемость $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$: можно показать, что при этом условии

$$\pi_r(\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, & \text{если } r \text{ нечетно;} \\ 0, & \text{если } r \text{ четно.} \end{cases}$$

Более того, его гомотопический тип не зависит от выбора $l > 1$, $(k,\, l) = 1$. В частности, $\pi_0(\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}) = 0$, и, значит, моноид группоподобен. Кроме того, он имеет структуру CW-комплекса, а значит, вложение единичного элемента является корасслоением.

Моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ имеет фильтрацию

$$\mathrm{PU}(kl^\infty) = \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, 1} \overset{\iota_{0,\, n}}{\hookrightarrow} \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n} \overset{\iota_{n,\, n}}{\hookrightarrow} \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^{2n}} \overset{\iota_{2n,\, n}}{\hookrightarrow} \ldots$$

Замечание 1. Моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ удобно представлять как бесконечный телескоп, то есть

$$\coprod_{r=0}^{\infty} (\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^{rn}} \times I)/\sim,$$

где $I := [0,\, 1]$, по отношению эквивалентности $(h,\, 1) \sim (\iota_{rn,\, n}(h),\, 0)$, где $h \in \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^{rn}}$.

Умножение в $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ индуцирует отображения (ср. (11))

$$\mu_{n,\, n} := \mu^\infty_{n,\, n} \colon \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^{2n}}.$$

Заметим, что $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n}$ является базой векторного $\mathbb{C}^{l^n}$-расслоения $\vartheta_{kl^\infty,\, l^n}$, чье ограничение на подпространство $\mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n} \subset \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n}$ есть $\vartheta_{kl^m,\, l^n}$ (ср. Предложение 2). Более того (ср. Предложение 3),

$$\mu^*_{n,\, n}(\vartheta_{kl^\infty,\, l^{2n}}) \cong \vartheta_{kl^\infty,\, l^n} \boxtimes \vartheta_{kl^\infty,\, l^n}. \tag{12}$$

Мы также имеем изоморфизм (ср. Предложение 2)

$$\iota^*_{n,\, n}(\vartheta_{kl^\infty,\, l^{2n}}) \cong \vartheta_{kl^\infty,\, l^n} \otimes [l^n]. \tag{13}$$

Таким образом, умножение в моноиде $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ отвечает тензорному произведению векторных расслоений подобно тому, как умножение в проективной унитарной группе отвечает тензорному произведению линейных расслоений (см. (4)). Посмотрим теперь, каким будет аналог снопов расслоений в данном случае.

3. Гомотопические снопы расслоений

3.1. Гомотопические коциклы

В случае группоподобного топологического моноида M роль 1-коциклов играют *гомотопические коциклы* (которые мы будем называть HTC от англ. «Homotopy Transition Cocycle»), основные свойства которых изучены в работе [10]. Так же, как в случае групп и «обычных» 1-коциклов, их (подходящим образом определенные) классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений в классифицирующее пространство BM моноида M. Далее мы рассматриваем случай $\mathrm{M} = \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$. Как раньше, $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} := U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$.

Определение 1. *Гомотопический коцикл* $(g, \mathcal{U})$ *со значениями в моноиде* $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ — набор отображений

$$g_{\alpha_0 \ldots \alpha_m} \colon U_{\alpha_0 \ldots \alpha_m} \times I^{m-1} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty},$$

заданных для всех $m \geq 1$, которые согласованы в следующем смысле: если $\sigma = (\alpha_0 \dots \alpha_m)$, $\sigma_i = (\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_m)$ и $(\varepsilon, i)(I^{m-1})$ — грань $t_i = \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ или 1), то для $i = 1, \dots, m-1$

$$g_\sigma|_{U_\sigma \times (1,i)(I^{m-1})} = g_{\sigma_i}, \quad g_\sigma|_{U_\sigma \times (0,i)(I^{m-1})} = g_{\alpha_0 \dots \alpha_i} g_{\alpha_i \dots \alpha_m}.$$

Если расшифровать приведенное определение, то, во-первых, мы имеем набор отображений $g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$, затем гомотопий $g_{\alpha\beta\gamma} \colon U_{\alpha\beta\gamma} \times I \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$ между $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$ и $g_{\alpha\gamma}$, а также гомотопий $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \colon U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I^2 \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$, которые заполняют квадрат

$$\begin{tikzcd}
g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} \arrow[r, "g_{\alpha\beta\gamma} g_{\gamma\delta}"] \arrow[d, "g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma\delta}"'] & g_{\alpha\gamma} g_{\gamma\delta} \arrow[d, "g_{\alpha\gamma\delta}"] \\
g_{\alpha\beta} g_{\beta\delta} \arrow[r, "g_{\alpha\beta\delta}"'] & g_{\alpha\delta},
\end{tikzcd},$$

и т.д. до бесконечности.

Без потери общности можно предположить, что $g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \subset \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$ для некоторого n (одновременно для всех элементов покрытия), и вообще

$$g_{\alpha_0 \dots \alpha_r} \colon U_{\alpha_0 \dots \alpha_r} \times I^{r-1} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{rn}}, \quad r \geq 1.$$

Для тройных пересечений определим отображения $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \colon U_{\alpha\beta\gamma} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}}$, заданные как композиции

$$U_{\alpha\beta\gamma} \xrightarrow{\mathrm{diag}} U_{\alpha\beta\gamma} \times U_{\alpha\beta\gamma} \xrightarrow{g_{\alpha\beta} \times g_{\beta\gamma}} \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \xrightarrow{\mu_{n,n}} \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}}. \tag{14}$$

Тогда над тройными пересечениями мы имеем гомотопии $g_{\alpha\beta\gamma} \colon U_{\alpha\beta\gamma} \times I \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}}$, такие что

$$g_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma} \times \{0\}} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}, \quad g_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma} \times \{1\}} = \iota_{n,n} \circ g_{\alpha\gamma}, \tag{15}$$

где $\iota_{n,n} \colon \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}}$ — вложение. Заметим, что отображения $\iota_{n,n} \circ g_{\alpha\gamma}$ и $g_{\alpha\gamma}$ отождествляются как отображения $U_{\alpha\gamma} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$ (ср. Замечание 1).

Над четырехкратными пересечениями $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$ мы получаем диаграмму из гомотопий:

$$\begin{tikzcd}
g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} \arrow[r, "g_{\alpha\beta\gamma} g_{\gamma\delta}"] \arrow[d, "g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma\delta}"'] & (\iota_{n,n} \circ g_{\alpha\gamma}) g_{\gamma\delta} = \iota_{2n,n} \circ (g_{\alpha\gamma} g_{\gamma\delta}) \arrow[d, "\iota_{2n,n} \circ g_{\alpha\gamma\delta}"] \\
g_{\alpha\beta}(\iota_{n,n} \circ g_{\beta\delta}) = \iota_{2n,n} \circ (g_{\alpha\beta} g_{\beta\delta}) \arrow[r, "\iota_{2n,n} \circ g_{\alpha\beta\delta}"'] & \iota_{2n,n} \circ \iota_{n,n} \circ g_{\alpha\delta} = \iota_{n,2n} \circ g_{\alpha\delta},
\end{tikzcd} \tag{16}$$

где $\iota_{n,2n} \colon \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{3n}}$ и т.п., которая получается из рассмотрения коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \arrow[r, "\mu_{n,n} \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu_{n,n}"'] & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \arrow[d, "\mu_{2n,n}"] & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \arrow[l, "\iota_{n,n} \times \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mu_{n,n}"] \\
\mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}} \arrow[r, "\mu_{n,2n}"] & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{3n}} & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}} \arrow[l, "\iota_{2n,n}"'] \\
\mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \times \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n} \arrow[r, "\mu_{n,n}"] \arrow[u, "\mathrm{id} \times \iota_{n,n}"] & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}} \arrow[u, "\iota_{2n,n}"'] & \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n}. \arrow[l, "\iota_{n,n}"'] \arrow[u, "\iota_{n,n}"'] \arrow[ul, "\iota_{n,2n}"']
\end{tikzcd}$$

Следующее условие гомотопического коцикла состоит в том, что существует гомотопия

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} \colon U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I^2 \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{3n}},$$

такая что

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I \times \{0\}} = g_{\alpha\beta\gamma} g_{\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I}, \quad g_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I \times \{1\}} = \iota_{2n,n} \circ g_{\alpha\beta\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I},$$
$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times \{0\} \times I} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I}, \quad g_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times \{1\} \times I} = \iota_{2n,n} \circ g_{\alpha\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I}.$$

Далее мы имеем гомотопии над пятикратными пересечениями и т.д.

Посмотрим теперь, к какому аналогу понятия снопа расслоений приводят гомотопические коциклы.

3.2. Гомотопические снопы расслоений

В начале работы мы видели, что снопы расслоений естественно возникают из проективных коциклов. Рассматривая НТС $(g, \mathcal{U})$ как аналог проективного коцикла, можно определить понятие *гомотопического снопа расслоений* (HBG, от англ. Homotopy Bundle Gerbe) $(\xi(g), Y)$, рассматривая обратные образы канонического расслоения над моноидом.

Выше были определены канонические векторные $\mathbb{C}^{l^{rn}}$-расслоения $\vartheta_{kl^\infty, l^{rn}} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{rn}}$. НТС $(g, \mathcal{U})$ — это, во-первых, набор отображений $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^n}$. Таким образом, мы имеем набор векторных $\mathbb{C}^{l^n}$-расслоений $\xi_{\alpha\beta} := g^*_{\alpha\beta}(\vartheta_{kl^\infty, l^n}) \to U_{\alpha\beta}$ над попарными пересечениями $U_{\alpha\beta}$.

Далее, в определение НТС входит также набор отображений $g_{\alpha\beta\gamma}\colon U_{\alpha\beta\gamma} \times I \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{2n}}$, которому соответствует набор векторных $\mathbb{C}^{l^{2n}}$-расслоений $\xi_{\alpha\beta\gamma} := g^*_{\alpha\beta\gamma}(\vartheta_{kl^\infty, l^{2n}}) \to U_{\alpha\beta\gamma} \times I$ таких, что

$$\xi_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{0\}} = \xi_{\alpha\beta} \otimes \xi_{\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} \quad \text{и} \quad \xi_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{1\}} = \xi_{\alpha\gamma} \otimes [l^n]|_{U_{\alpha\beta\gamma}},$$

что следует из (15), (14), (12) и (13). В силу последнего свойства $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ можно рассматривать как гомотопию над $U_{\alpha\beta\gamma}$ между расслоениями $\xi_{\alpha\beta} \otimes \xi_{\beta\gamma}$ и $\xi_{\alpha\gamma} \otimes [l^n]$.

Продолжая дальше, имеем набор отображений $g_{\alpha\beta\gamma\delta}\colon U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I^2 \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^{3n}}$ и соответствующий набор векторных $\mathbb{C}^{l^{3n}}$-расслоений $\xi_{\alpha\beta\gamma\delta} := g^*_{\alpha\beta\gamma\delta}(\vartheta_{kl^\infty, l^{3n}}) \to U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times I^2$ таких, что

$$\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times\{0\}\times I} = (\xi_{\alpha\beta} \otimes \xi_{\beta\gamma\delta})|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I}; \quad \xi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I\times\{0\}} = (\xi_{\alpha\beta\gamma} \otimes \xi_{\gamma\delta})|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I};$$

$$\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times\{1\}\times I} = (\xi_{\alpha\gamma\delta} \otimes [l^n])|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I}; \quad \xi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I\times\{1\}} = (\xi_{\alpha\beta\delta} \otimes [l^n])|_{U_{\alpha\beta\gamma\delta}\times I},$$

и т.п. «Граничные» условия изображаются диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\xi_{\alpha\beta} \otimes \xi_{\beta\gamma} \otimes \xi_{\gamma\delta} \arrow[r, "\xi_{\alpha\beta\gamma}\otimes\xi_{\gamma\delta}", "\simeq"'] \arrow[d, "\xi_{\alpha\beta}\otimes\xi_{\beta\gamma\delta}"', "\simeq"] & \xi_{\alpha\gamma} \otimes \xi_{\gamma\delta} \otimes [l^n] \arrow[d, "\simeq"', "\xi_{\alpha\gamma\delta}\otimes[l^n]"] \\
\xi_{\alpha\beta} \otimes \xi_{\beta\delta} \otimes [l^n] \arrow[r, "\simeq", "\xi_{\alpha\beta\delta}\otimes[l^n]"'] & \xi_{\alpha\delta} \otimes [l^{2n}],
\end{tikzcd}$$

которая получается из диаграммы (16).

Тем самым мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Гомотопическим снопом расслоений* (ξ, Y) называется набор $\mathbb{C}^{l^{mn}}$-векторных расслоений

$$\xi_{\alpha_0\ldots\alpha_m} \to U_{\alpha_0\ldots\alpha_m} \times I^{m-1},$$

заданных для всех $m \geq 1$, которые согласованы в следующем смысле: если $\sigma := (\alpha_0 \ldots \alpha_m)$, $\sigma_i := (\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_m)$ и $(\varepsilon, i)(I^{m-1})$ — грань $t_i = \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ или 1), то для $i = 1, \ldots, m-1$

$$\xi_\sigma|_{U_\sigma \times (1,i)(I^{m-1})} = \xi_{\sigma_i} \otimes [l^n], \quad \xi_\sigma|_{U_\sigma\times(0,i)(I^{m-1})} = \xi_{\alpha_0\ldots\alpha_i} \otimes \xi_{\alpha_i\ldots\alpha_m}.$$

4. Стабильная теория

4.1. Стабильная тривиализация гомотопических коциклов

Следующий вопрос, на который нужно ответить, — какие HBG считать тривиальными? Для «обычного» снопа расслоений $(L(g), Y)$ условие тривиальности эквивалентно тому, что соответствующее главное $\mathrm{PU}(k)$-расслоение происходит из $\mathrm{U}(k)$-расслоения, см. (7). Естественным обобщением этого на случай рассматриваемых нами HBG является условие редуцируемости структурного моноида до структурной группы, где имеется в виду вложение топологических моноидов

$$\mathrm{U}(kl^\infty) \to \mathrm{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}, \tag{17}$$

получающиеся как прямой предел отображений $\mathrm{U}(kl^m) \to \mathrm{Fr}_{kl^m,\, l^n}$ (ср. (9)). По техническим причинам нам удобно разложить эту редукцию на два шага: во-первых, сначала до проективной унитарной группы $\mathrm{PU}(kl^\infty)$, а уже затем до унитарной группы $\mathrm{U}(kl^\infty)$.

Определение 3. Пространство $\mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n}$, параметризующее унитальные $*$-подалгебры, изоморфные $M_{kl^m}(\mathbb{C})$, в фиксированной матричной алгебре $M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$, называется *матричным грассманианом.*

Простым следствием теоремы Нетер—Сколема является его представление

$$\mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n} = \mathrm{PU}(kl^{m+n})/(\mathrm{PU}(kl^m) \otimes \mathrm{PU}(l^n))$$

как однородного пространства группы $\mathrm{PU}(kl^{m+n})$ всех $*$-автоморфизмов алгебры $M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$.

Через $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ обозначим прямой предел $\varinjlim_{m,\, n} \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n}$ матричных грассманианов $\mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n}$ относительно отображений, индуцированных унитальными $*$-гомоморфизмами матричных алгебр.

Имеется действие моноида $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ на матричном грассманиане $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$, определенное на конечномерных подпространствах отображениями

$$\varphi\colon \mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\, l^p} \times \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n} \to \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^{n+p}}, \quad \varphi(h,\, A_{kl^m}) = h(A_{kl^m}) \subset M_{kl^{m+n+p}}(\mathbb{C})$$

для гомоморфизма $h \in \mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\, l^p} = \mathrm{Hom}_{alg}(M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}),\, M_{kl^{m+n+p}}(\mathbb{C}))$ и подалгебры $A_{kl^m} \subset M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$. В частности, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_{kl^{m+n+p},\, l^q} \times \mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\, l^p} \times \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fr}_{kl^{m+n+p},\, l^q} \times \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^{n+p}} \arrow[d] \\
\mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\, l^{p+q}} \times \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^n} \arrow[r] & \mathrm{Gr}_{kl^m,\, l^{n+p+q}}.
\end{tikzcd}$$

Далее используются соглашения и обозначения, введенные после Определения 1.

Определение 4. *Проективной стабильной тривиализацией*[1] НТС $(g,\, \mathcal{U})$ назовем следующие данные: набор отображений $h_\alpha\colon U_\alpha \to \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^n}$, гомотопии $g_{\alpha\beta}h_\beta \overset{h_{\alpha\beta}}{\simeq} h_\alpha$, т.е. отображения

$$h_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \times I \to \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^{2n}}$$

такие, что

$$h_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}\times\{0\}} = g_{\alpha\beta}h_\beta, \quad h_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}\times\{1\}} = \iota'_{n,n} \circ h_\alpha,$$

где $\iota'_{n,n}$ обозначает вложение $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^n} \to \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^{2n}}$, а $g_{\alpha\beta}h_\beta$ — композицию

$$U_{\alpha\beta} \overset{\mathrm{diag}}{\to} U_{\alpha\beta} \times U_\beta \overset{g_{\alpha\beta}\times h_\beta}{\longrightarrow} \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^n} \times \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^n} \overset{\varphi}{\to} \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^{2n}};$$

далее гомотопии $h_{\alpha\beta\gamma}$, отвечающие квадратам

$$\begin{tikzcd}
g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}h_\gamma \arrow[r, "g_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}"] \arrow[d, "g_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma"'] & g_{\alpha\beta}(\iota'_{n,n} \circ h_\beta) = \iota'_{2n,n} \circ (g_{\alpha\beta}h_\beta) \arrow[d, "\iota'_{2n,n}\circ h_{\alpha\beta}"] \\
(\iota_{n,n} \circ g_{\alpha\gamma})h_\gamma = \iota'_{2n,n} \circ (g_{\alpha\gamma}h_\gamma) \arrow[r, "\iota'_{2n,n}\circ h_{\alpha\gamma}"'] & \iota'_{2n,n} \circ \iota'_{n,n} \circ h_\alpha = \iota'_{n,2n} \circ h_\alpha,
\end{tikzcd}$$

то есть

$$h_{\alpha\beta\gamma}\colon U_{\alpha\beta\gamma} \times I^2 \to \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^{3n}},$$

[1] Мы используем здесь термин «стабильный», чтобы избежать смешения с понятием тривиального $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$-коцикла, см. [10]. Условие *стабильной* тривиальности существенно слабее условия тривиальности: ниже мы покажем, что оно эквивалентно тому, что гомотопический $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$-коцикл эквивалентен проективному коциклу, который не обязательно тривиален.

такие, что

$$h_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times I\times\{0\}} = g_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma, \quad h_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times I\times\{1\}} = \iota'_{2n,\,n}\circ h_{\alpha\beta},$$
$$h_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{0\}\times I} = g_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}, \quad h_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{1\}\times I} = \iota'_{2n,\,n}\circ h_{\alpha\gamma},$$

и т.п.

В общем случае для всех $m\geq 0$ имеем отображения

$$h_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\colon U_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\times I^m\to \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^{(m+1)n}}$$

такие, что для $i=1,\ldots,m$

$$h_{\alpha_0\ldots\alpha_m}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\times(0,\,i)(I^m)} = g_{\alpha_0\ldots\alpha_i}h_{\alpha_i\ldots\alpha_m}, \quad h_{\alpha_0\ldots\alpha_m}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\times(1,\,i)(I^m)} = \iota'_{mn,\,n}\circ h_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_i\ldots\alpha_m}.$$

НТС, для которого существует проективная стабильная тривиализация, называется *проективно стабильно тривиальным.*

Расширение структурной группы $\mathrm{PU}(kl^m)$ до структурного моноида $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$ описывается в терминах классифицирующих пространств следующим образом. Пусть

$$A^{univ}_{kl^m}\to \mathrm{BPU}(kl^m)$$

— универсальное $M_{kl^m}(\mathbb{C})$-расслоение. Применяя к нему послойно $\mathrm{Hom}_{alg}(\ldots,\,M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C}))$ как функцию от первого аргумента, получаем некоторое $\mathrm{Fr}_{kl^m,\,l^n}$-расслоение

$$\mathrm{H}_{kl^m,\,l^n}(A^{univ}_{kl^m})\to \mathrm{BPU}(kl^m). \tag{18}$$

Нетрудно показать, что имеет место гомотопическая эквивалентность

$$\mathrm{H}_{kl^m,\,l^n}(A^{univ}_{kl^m})\simeq \mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^n},$$

причем такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\,l^p}\times \mathrm{H}_{kl^m,\,l^n}(A^{univ}_{kl^m}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}_{kl^m,\,l^{n+p}}(A^{univ}_{kl^m}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\,l^p}\times \mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^n} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^{n+p}}
\end{tikzcd}$$

коммутативна. При переходе к пределу при $m,\,n\to\infty$ из (18) получается главное $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$-расслоение над $\mathrm{BPU}(kl^\infty)$, действие моноида на тотальном пространстве которого отождествляется при гомотопической эквивалентности с его действием на $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$. Оно классифицируется некоторым отображением

$$\mathrm{BPU}(kl^\infty)\to \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\,l^\infty}, \tag{19}$$

получающемся при распетливании гомоморфизма моноидов $\mathrm{PU}(kl^\infty)\to \mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$, аналогичного (17). Очевидно, (19) является расслоением с гомотопическим слоем $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$, которое имеет также следующую интерпретацию.

Предложение 4. Пусть

$$\mathrm{EFr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\to \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$$

— универсальное главное $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$-расслоение. Тогда имеет место гомотопическая эквивалентность

$$\mathrm{EFr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\underset{\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}}{\times}\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\simeq \mathrm{BPU}(kl^\infty).$$

Более того, расслоение

$$\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\longrightarrow \mathrm{EFr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\underset{\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}}{\times}\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\,l^\infty}\longrightarrow \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\,l^\infty} \tag{20}$$

эквивалентно расслоению

$$\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty} \to \mathrm{BPU}(kl^\infty) \to \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\, l^\infty}. \tag{21}$$

Замечание 2. Нетрудно показать, что расслоение (21) эквивалентно расслоению

$$\mathrm{BPU}(l^\infty) \to \mathrm{BPU}(kl^\infty) \to \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\, l^\infty}.$$

Доказательство. Заметим, что пространство $\mathrm{EFr}_{kl^\infty,\, l^\infty} \underset{\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}}{\times} \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ совпадает с гомотопическим фактором пространства $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ по действию моноида $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$. Поэтому, согласно сказанному в абзаце перед доказываемым Предложением, существует гомотопическая эквивалентность

$$\mathrm{EFr}_{kl^\infty,\, l^\infty} \underset{\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}}{\times} \mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty} \simeq \mathrm{H}_{kl^\infty,\, l^\infty}(A^{univ}_{kl^\infty})/\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty},$$

а последнее пространство, как мы видели, есть $\mathrm{BPU}(kl^\infty)$. Второе утверждение теперь очевидно. $\square$

Следствие 1. *НТС со значениями в* $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ *проективно стабильно тривиален тогда и только тогда, когда он эквивалентен некоторому проективному коциклу (со значениями в группе* $\mathrm{PU}(kl^m)$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$*).*

Доказательство. Заметим, что из Определения 4 следует, что стабильная проективная тривиализация НТС — то же, что отображение из кубической геометрической реализации симплициального множества, связанного с открытым покрытием $\mathcal{U}$ пространства X (и гомотопически эквивалентной X), в тотальное пространство расслоения (20). Оно отвечает подъему классифицирующего отображения $X \to \mathrm{BFr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$, определенного (с точностью до гомотопии) исходным НТС (см. [10]). $\square$

Для того чтобы вместо проективной определить унитарную тривиализацию, нужно заменить $\mathrm{H}_{kl^m,\, l^n}(A^{univ}_{kl^m})$ пространствами $\mathrm{H}_{kl^m,\, l^n}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_{kl^m}))$, где $\xi^{univ}_{kl^m} \to \mathrm{BU}(kl^m)$ — универсальное векторное $\mathbb{C}^{kl^m}$-расслоение. Пусть $\mathrm{H}_{kl^\infty,\, l^\infty}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_{kl^\infty}))$ — их прямой предел при $m,\, n \to \infty$. Заметим, что $\mathrm{H}_{kl^\infty,\, l^\infty}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_{kl^\infty})) \to \mathrm{BU}(kl^\infty)$ — главное $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$-расслоение, в частности, на его тотальном пространстве свободно действует моноид $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$. Если обозначить

$$\widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^m,\, l^n} := \mathrm{H}_{kl^m,\, l^n}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_{kl^m})), \quad \widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^\infty,\, l^\infty} := \mathrm{H}_{kl^\infty,\, l^\infty}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_{kl^\infty})),$$

то будут иметь место аналоги предыдущих результатов (в частности, Предложения 4) с заменой $\mathrm{Gr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ на $\widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ и проективных унитарных групп на соответствующие унитарные. Теперь, используя действие моноида $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ на $\widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^\infty,\, l^\infty}$ (как на главном $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\, l^\infty}$-расслоении), получаем определение *стабильно тривиального НТС* $(g, \mathcal{U})$ (ср. Определение 4).

Посмотрим, что произойдет в унитарном случае, если положить $l = 1$. В этом случае расслоение (ср. (20))

$$\mathrm{H}_{k,\,1}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_k)) \to \mathrm{EFr}_{k,\,1} \underset{\mathrm{Fr}_{k,\,1}}{\times} \mathrm{H}_{k,\,1}(\mathrm{End}(\xi^{univ}_k)) \to \mathrm{BFr}_{k,\,1}$$

гомотопически эквивалентно расслоению (7). Так как $\mathrm{Fr}_{k,\,1} = \mathrm{PU}(k)$ — группа, то НТС со значениями в $\mathrm{Fr}_{k,\,1}$ эквивалентен строгому коциклу, и мы возвращаемся к теории классических снопов расслоений, отвечающих проективным коциклам. В частности, такой коцикл стабильно тривиален тогда и только тогда, когда он эквивалентен некоторому унитарному коциклу.

4.2. Стабильная тривиализация гомотопических снопов расслоений

Посмотрим, как стабильная тривиализация HTC может быть описана в терминах соответствующих HBG. Во-первых, заметим, что над матричным грассманианом $\mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^n}$ определено тавтологическое $M_{kl^m}(\mathbb{C})$-расслоение (над точкой $x \in \mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^n}$ «висит» подалгебра в $M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$, параметризуемая этой точкой). Это расслоение является подрасслоением тривиального расслоения $\mathrm{Gr}_{kl^m,\,l^n} \times M_{kl^{m+n}}(\mathbb{C})$ (причем каждый слой является унитальной подалгеброй). Беря его послойный централизатор, получаем некоторое $M_{l^n}(\mathbb{C})$-расслоение над Gr_{kl^m,l^n}. В унитарном случае определяется аналогичное векторное $\mathbb{C}^{l^n}$-расслоение $\eta_{kl^m,\,l^n} \to \widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^m,\,l^n}$. Для отображений

$$\widehat{\varphi}\colon \mathrm{Fr}_{kl^{m+n},\,l^p} \times \widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^m,\,l^n} \to \widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^m,\,l^{n+p}},$$

определяющих действие моноида $\mathrm{Fr}_{kl^\infty,\,l^\infty}$ на $\widehat{\mathrm{Gr}}_{kl^\infty,\,l^\infty}$, имеем

$$\widehat{\varphi}^*(\eta_{kl^m,\,l^{n+p}}) \cong \vartheta_{kl^{m+n},\,l^p} \boxtimes \eta_{kl^m,\,l^n}.$$

Определение 5. *Стабильная тривиализация* для HBG (ξ, Y) состоит из следующего набора данных. Во-первых, это набор векторных $\mathbb{C}^{l^n}$-расслоений $\eta_\alpha \to U_\alpha$; затем набор векторных $\mathbb{C}^{l^{2n}}$-расслоений $\eta_{\alpha\beta} \to U_{\alpha\beta} \times I$ таких, что

$$\eta_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}\times\{0\}} = \xi_{\alpha\beta} \otimes \eta_\beta, \quad \eta_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}\times\{1\}} = \eta_\alpha \otimes [l^n];$$

затем набор векторных $\mathbb{C}^{l^{3n}}$-расслоений $\eta_{\alpha\beta\gamma} \to U_{\alpha\beta\gamma} \times I^2$ таких, что

$$\eta_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times I\times\{0\}} = \xi_{\alpha\beta\gamma} \otimes \eta_\gamma, \quad \eta_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times I\times\{1\}} = \eta_{\alpha\beta} \otimes [l^n];$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{0\}\times I} = \xi_{\alpha\beta} \otimes \eta_{\beta\gamma}, \quad \eta_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}\times\{1\}\times I} = \eta_{\alpha\gamma} \otimes [l^n],$$

и т.д. На $m+1$-м шаге имеем набор векторных $\mathbb{C}^{l^{(m+1)n}}$-расслоений

$$\eta_{\alpha_0\ldots\alpha_m} \to U_{\alpha_0\ldots\alpha_m} \times I^m$$

таких, что для $i = 1, \ldots, m$

$$\eta_{\alpha_0\ldots\alpha_m}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\times(0,\,i)(I^m)} = \xi_{\alpha_0\ldots\alpha_i} \otimes \eta_{\alpha_i\ldots\alpha_m}; \quad \eta_{\alpha_0\ldots\alpha_m}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\times(1,\,i)(I^m)} = \eta_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_m}.$$

Заметим, что при $l = 1$ (и замене гомотопического коцикла строгим) мы возвращаемся к обычной тривиализации соответствующего снопа расслоений (L, Y): напомним [2], что это — набор линейных расслоений $\eta_\alpha \to U_\alpha$ и изоморфизмов $L_{\alpha\beta} \otimes \eta_\beta \stackrel{\cong}{\to} \eta_\alpha$ над $U_{\alpha\beta}$.

4.3. Стабильная эквивалентность

Понятия стабильной тривиальности гомотопических коциклов и снопов позволяют определить соответствующую стабильную эквивалентность. Для этого заметим, что помимо операции, отвечающей композиции гомоморфизмов (которая приводит к операции в моноиде), на пространствах $\mathrm{Fr}_{k^rl^m,\,l^n}$ есть еще операция

$$\mathrm{Fr}_{k^rl^m,\,l^n} \times \mathrm{Fr}_{k^sl^p,\,l^q} \to \mathrm{Fr}_{k^{r+s}l^{m+p},\,l^{n+q}},$$

индуцированная тензорным произведением матричных алгебр. После перехода к прямому пределу она определяет гомоморфизм моноидов

$$\mathrm{Fr}_{k^rl^\infty,\,l^\infty} \times \mathrm{Fr}_{k^sl^\infty,\,l^\infty} \to \mathrm{Fr}_{k^{r+s}l^\infty,\,l^\infty}.$$

Возникает соответствующая операция тензорного произведения на гомотопических коциклах и гомотопических снопах. Два HTC назовем *стабильно эквивалентными*, если они становятся эквивалентными после тензорного умножения на стабильно тривиальные НТС; аналогично для HBG. В результате мы получаем группу классов стабильной эквивалентности НТС (и HBG) относительно операции, индуцированной тензорным произведением.

Данное отношение эквивалентности аналогично отношению эквивалентности на проективных коциклах, возникающему из операции «тензорного произведения» проективных групп

$$\mathrm{PU}(k^r) \times \mathrm{PU}(k^s) \to \mathrm{PU}(k^{r+s}),$$

классы эквивалентности которого соответствуют подгруппе k-кручения

$$Br_k(X) = \mathrm{coker}\{[X,\, \mathrm{BU}(k^\infty)] \to [X,\, \mathrm{BPU}(k^\infty)]\} = \mathrm{im}\{[X,\, \mathrm{BPU}(k^\infty)] \to [X,\, \mathrm{K}(\mathbb{Z},\, 3)]\}$$

в топологической группе Брауэра $Br(X) \cong H^3_{tors}(X,\, \mathbb{Z})$.

Следующая теорема обобщает сформулированный результат.

Теорема. *Группа классов стабильной эквивалентности HBG, получающихся из гомотопических* $\mathrm{Fr}_{k^r l^\infty,\, l^\infty}$*-коциклов* ($r \in \mathbb{N}$)*, естественно изоморфна группе*

$$\mathrm{coker}\{[X,\, \mathrm{BU}(k^\infty l^\infty)] \to [X,\, \mathrm{BFr}_{k^\infty l^\infty,\, l^\infty}]\}$$

(*ср.* (21))*, а также образу «отображения Диксмье–Дуади»* (*см. Замечание* 2):

$$\mathrm{im}\{[X,\, \mathrm{BFr}_{k^\infty l^\infty,\, l^\infty}] \to [X,\, \mathrm{BBU}(l^\infty)]\}.$$

Доказательство. Согласно [10], классы (обычной) эквивалентности НТС со значениями в моноиде $\mathrm{Fr}_{k^r l^\infty,\, l^\infty}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $X \to \mathrm{BFr}_{k^r l^\infty,\, l^\infty}$. Используя «унитарный» аналог Следствия 1, нетрудно показать, что два НТС стабильно эквивалентны тогда и только тогда, когда их классифицирующие отображения $X \to \mathrm{BFr}_{k^r l^\infty,\, l^\infty}$ отличаются на некоторое отображение $X \to \mathrm{BU}(k^r l^\infty)$. $\square$

Таким образом, HBG с введенным отношением стабильной эквивалентности дают геометрическое представление элементов $[X,\, \mathrm{BBU}(l^\infty)]$, принадлежащих (после локализации по l) второму множителю в (1), отвечающему «высшим» скручиваниям в K-теории.

Из результатов статьи идея рассматривать коциклы со значениями в моноиде принадлежит первому автору, которому также принадлежат результаты главы 2, § 3.1 и Определение 2. Важные Определения 4 и 5 предложены вторым автором, а их интерпретация в терминах действия моноида — первым, которому также принадлежат Предложение 4 и теорема из § 4.3.

Благодарности

Работа первого автора была поддержана грантом РФФИ №11-01-00057-а.

Литература

1. *Atiyah M., Segal G.* Twisted K-theory // Ukr. Mat.Visn. — 2004. — V. 1, N 3. — P. 287–330.
2. *Bouwknegt P., Carey A.L., Mathai V., Murray M.K., Stevenson D.* Twisted K-theory and K-theory of bundle gerbes // Commun. Math. Phys. — 2002. — V. 228. — P. 17–49.
3. *Donovan P., Karoubi M.* Graded Brauer groups and K-theory with local coefficients // Pub. Math. IHES. — 1971. — N 38. — P. 5–25.
4. *Karoubi M.* Algèbres de Clifford et K-théorie // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. — 1968. — V. 4. — P. 161–270.
5. *Madsen I., Snaith V., Tornehave J.* Infinite loop maps in geometric topology // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1977. — V. 81, N 3. — P. 399–430.
6. *Murray Michael K.* Bundle gerbes // J. Lond. Math. Soc. — 1996. — V. 54. — P. 403–416.

7. *Murray Michael K., Stevenson Daniel* Bundle gerbes: stable isomorphism and local theory // J. Lond. Math. Soc. — 2000. — V. 62. — P. 925–937.

8. *Rosenberg J.* Continuous-trace algebras from the bundle theoretic point of view // J. Austral Math. Soc. Ser. A. — 1989. — V. 47, N 3. — P. 368–381.

9. *Segal G.B.* Categories and cohomology theories // Topology. — 1974. — V. 13. — P. 293–312.

10. *Wirth James, Stasheff Jim* Homotopy Transition Cocycles // Journal of Homotopy and Related Structures. — 2006. — V. 1, N 1. — P. 273–283.

Поступила в редакцию 12.06.2012.