

# Программа курса „Математическая статистика“

лектор — к.ф.-м.н. М. Е. Жуковский

Весна 2013

1. Различные виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Законы больших чисел для сходимостей случайных векторов.
2. Различные виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого.
3. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение): три эквивалентных определений, основные свойства, критерий независимости компонент гауссовского вектора.
4. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко–Кантелли.
5. Вероятностно–статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки.
6. Статистики и оценки. Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики, выборочные квантили.
7. Статистики и оценки. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность.
8. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.
9. Метод моментов, состоятельность оценки метода моментов.
10. Метод максимального правдоподобия. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия.
11. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Различные подходы к сравнению оценок.
12. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки.
13. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия. Эффективность и асимптотическая эффективность оценки максимального правдоподобия.

14. Условное математическое ожидание случайной величины относительно  $\sigma$ -алгебры. Явный вид условного математического ожидания в случае, если  $\sigma$ -алгебра порождена счетным разбиением.
15. Основные свойства условного математического ожидания.
16. Условные распределения и условные плотности. Вычисление условного математического ожидания с помощью условной плотности.
17. Достаточные статистики и  $\sigma$ -алгебры. Критерий факторизации Неймана–Фишера (док-во для дискретного и абсолютно непрерывного случаев).
18. Теорема Колмогорова–Блекуэлла–Рао об улучшении несмещенных оценок.
19. Полные достаточные статистики. Единственность наилучшей несмещенной оценки. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.
20. Схема нахождения оптимальных оценок с помощью полных достаточных статистик.
21. Доверительные интервалы. Асимптотические доверительные интервалы.
22. Методы построения доверительных интервалов.
23. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Несмещенная оценка для дисперсии ошибки измерений  $\sigma^2$ .
24. Линейная гауссовская модель. Достаточные статистики в линейной гауссовской модели. Наилучшие несмещенные оценки параметров в линейной гауссовской модели, их распределения.
25. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского вектора. Доверительные интервалы для параметров гауссовской линейной модели.
26. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
27. Сравнения критериев: наиболее мощные и равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана–Пирсона.
28. Теорема о монотонном отношении правдоподобия (б/д). Построение равномерно наиболее мощных критериев для односторонних альтернатив.
29. Пример построения равномерно наиболее мощного критерия в случае отсутствия монотонного отношения правдоподобия.
30.  $F$ -критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.
31. Проверка непараметрических гипотез. Теорема Пирсона. Критерий согласия Пирсона для проверки простой гипотезы в схеме испытаний Бернулли с  $m$  исходами. Расширение области применения критерия Пирсона.