УДК 517.946

В.Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Регуляризация вырожденного оператора Шредингера и минимизация семейства полунорм*

В работе изучается задача Коши для уравнения Шредингера с вырожденным гамильтонианом, заданным дифференциальным выражением второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Указаны необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи Коши, в случае нарушения которой обобщенная постановка задачи изучается с помощью метода эллиптической регуляризации и метода квазирешений. Получено согласование двух указанных подходов в том смысле, что всякая последовательность решений регуляризованных задач и любая минимизирующая последовательность семейства функционалов невязки имеют общий предел.

Ключевые слова: оператор с неотрицательной характеристической формой, эллиптическая регуляризация, квазирешение.

В настоящей работе изучается влияние вырождения характеристической формы гамильтониана $\mathbf{L}$ квантовой системы на некотором подмножестве координатного пространства на корректность задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$i\,\frac{d}{dt}\,u(t) = \mathbf{L}u(t),\ t > 0. \qquad (1)$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{L}$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка с неотрицательной характеристической формой в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$. Нарушение корректности задачи Коши проявляется в том, что оператор Шредингера $\mathbf{L}$ с вырожденной характеристической формой является симметрическим, но не самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H с нетривиальными и различными конечными индексами дефекта $n_{\pm} = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L} \pm i\mathbf{I}))$. Это приводит к разложению гильбертова пространства начальных данных H в ортогональную сумму подпространства корректности и подпространства некорректности задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера (1), (2) с вырожденным гамильтонианом $\mathbf{L}$, заданным дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}u(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,u + \frac{i}{2}\,a(x)u\right) + \frac{i}{2}\,a(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,u \qquad (3)$$

на области определения:

$$D(\mathbf{L}) = \Big\{ u \in W_2^1 :\ u|_{\mathbb{R}_-} \in W_2^2(\mathbb{R}_-),$$
$$\left(g(x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}\,a(x)u\right) \in W_2^1(\mathbb{R}) \Big\}. \qquad (4)$$

Здесь и далее $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Согласование метода квазирешений (см. [1]) и метода эллиптической регуляризации (см. [2]) исследования задачи Коши (1), (2) рассмотрим на модельной задаче с вырожденным на полупрямой гамильтонианом, в котором функции $g(x)$ и $a(x)$ заданы равенствами $g(x) = \theta(-x)$, $a(x) = \alpha\theta(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Оператор $\mathbf{L}$ является плотно определенным замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта (1,0) при $\alpha < 0$, (0,0) при $\alpha = 0$ и (0,1) при $\alpha > 0$ (см. [4]).

Под регуляризацией вырождающегося линейного дифференциального оператора второго порядка понимается такая последовательность операторов второго (или более высокого) порядка, каждый член которой является равномерно эллиптическим самосопряженным оператором в пространстве H, и такая, что последовательность характеристических форм (символов) регуляризованных операторов сходится к характеристической форме вырожденного оператора равномерно на каждом компакте. В работах [3], [4], [5] исследовано поведение последовательности решений регуляризованных задач и получены необходимые и достаточные условия ее сходимости (или компактности) в сильной и в слабой топологиях пространства H.

С другой стороны, существует подход к определению квазирешений некорректно поставленных задач вида $\mathbf{A}x = f$ (где x — неизвестный, а f — заданный вектор некоторого банахова пространства X, а $\mathbf{A}$ — линейный оператор в пространстве X), связанный с минимизацией функционалов невязки — функционалов, измеряющих отклонение от нуля величин $\mathbf{A}x - f$ по всем допустимым значениям $x \in D(\mathbf{A})$. Задача Коши с вырожденным гамильтонианом может быть различными способами представлена в виде уравнения $\mathbf{A}x = f$ в различных банаховых пространствах. От ука-

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 09-01-265 и № 10-01-395, при поддержке АВЦП РНПВШ проект № 2.1.1/11133 и при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

занного произвола в выборе функционала невязки зависит как поведение минимизирующей последовательности (сходимость, компактность), так и ее предельная точка (если существует) (см. [6], [7]).

В связи с указанными свойствами последовательностей решений регуляризованных задач и минимизирующих последовательностей функционалов невязки возникает задача согласовать метод невязки и метод аппроксимаций в следующем смысле. Связать выбор последовательности регуляризованных операторов задачи Коши, аппроксимирующих вырожденный, с выбором функционала невязки так, чтобы последовательность регуляризованных решений и минимизирующая последовательность функционала невязки имели общий предел.

I. Постановка задачи Коши. Условия корректной разрешимости

Оператор $\mathbf{L}$, заданный равенством (3) на области определения (4) является плотно определенным замкнутым симметрическим оператором в пространстве H. Это позволяет превратить его область определения $D(\mathbf{L})$ в гильбертово пространство, наделенное нормой графика оператора $\mathbf{L}$. Оператор $\mathbf{L}$ не самосопряжен и его сопряженный оператор $\mathbf{L}^*$ имеет более широкую область определения $D(\mathbf{L}^*)$ (см. [3]).

Определение 1. *Решением* (*сильным*) *задачи* (1), (2) назовем функцию $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathbf{L})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ и условию (2) в том смысле, что $\|u(t,x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0$ при $t \to +0$.

Функцию $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))$ назовем *обобщенным решением задачи* (1), (2), если существует последовательность начальных условий $\{u_{0,n}(x)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_{0,n}(x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$ такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует решение $u_n(t,x)$ задачи (1), (2) с начальными данными $u_{0,n}(x)$ и выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t,x) - u(t,x)\|_{C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))} = 0$.

Заметим, что если $u(t,x)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2), то тогда $\lim\limits_{t\to+0} \|u(t,x) - u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$. Действительно, $u(t,x) - u_0(x) = u(t,x) - u_n(t,x) + u_n(t,x) - u_{0,n}(x) + u_{0,n}(x) - u_0(x)$, откуда следует требуемое утверждение.

Из определения 1 вытекает, что обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному тождеству

$$i\int_0^T ((i\,\frac{\partial}{\partial t}\,v(t) + L^* v(t)), u(t))\,dt = (v(T), u(T)) - (v(0), u(0)) \quad \forall T > 0 \quad (5)$$

при любом выборе $v(t,x) \in C(\mathbb{R}_+,\ D(\mathbf{L}^*)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R}))$, где через $v(t)$ и $u(T)$ обозначены функции $v(t,x)$ и $u(T,x)$ как элементы пространства $L_2(\mathbb{R})$, а через $(u(T), v(T))$ — их скалярное произведение в указанном пространстве.

В работе [3] доказана приведенная ниже теорема 1 о том, что пространство H разлагается в прямую ортогональную сумму двух подпространств H_0 и H_1, причем для любого $u_0 \in H_0$ задача Коши имеет единственное решение со значениями в H_0, а при любом $u_0 \in H_1$ решения задачи Коши не существует.

Теорема 1. При $a \leqslant 0$ оператор $-i\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U_L}(t) = e^{-i\mathbf{L}t}$, $t > 0$, в пространстве H и задача Коши имеет единственное решение $\mathbf{U_L}(t)u_0$. Если же $a > 0$, то оператор $i\mathbf{L}$ генерирует изометрическую полугруппу $\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t) = e^{i\mathbf{L}t}$, $t > 0$, в пространстве H, сопряженная к которой является сжимающей полугруппой $(\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t))^* = e^{-i\mathbf{L}^* t}$, $t > 0$, с генератором $-i\mathbf{L}^*$. Задача Коши в этом случае имеет решение тогда и только тогда, когда вектор начальных данных u_0 лежит в подпространстве $H_0 = \overline{\bigcap\limits_{t>0} \mathrm{Im}(\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t))}$. Если $u_0 \in H_0$, то решение единственно, и $u(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$. □

II. Аппроксимационный подход. О понятии регуляризации

Различные определения регуляризации некорректных краевых задач изучались в работах [8], [9]. Следуя подходу указанных работ, мы дадим следующее определение регуляризации задачи Коши (1), (2).

Наряду с задачей (1), (2) с вырожденным оператором рассмотрим семейство регуляризованных задач Коши (2), (3), аппроксимирующих задачу (1), (2) при $n \to \infty$:

$$i\,\frac{d}{dt}\,u(t) = \mathbf{L}_n u(t), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Определение 2. Будем называть последовательность линейных операторов $\mathbf{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, действующих в гильбертовом пространстве H, *самосопряженной* (*максимальной симметрической*) *регуляризацией* порядка $q \in \mathbb{N}$ вырождающегося оператора $\mathbf{L}$, если выполнены условия:

1R) для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $\mathbf{L}_n$ является самосопряженным (максимальным симметрическим) оператором в пространстве H, генерирующим полугруппу изометрических операторов $e^{-i\mathbf{L}_n t}$, $t > 0$;

2R) линейное многообразие
$$D_q = D(\mathbf{L}^q) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(\mathbf{L}_n^q)\right)$$
плотно в пространстве H;

3R) $\lim\limits_{n\to\infty} \|(\mathbf{L}_n - \mathbf{L})u\|_H = 0$ для любого $u \in D_q$;

4R) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует линейный оператор $\mathbf{Q}_n$ в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(\mathbf{Q}_n) = D(\mathbf{L}^{q-1})$, который отображает линейное многообразие $D(\mathbf{L}^q) \subset D(\mathbf{Q}_n)$ в гильбертово пространство $D(\mathbf{L}_n)$, при этом последовательность операторов $\{\mathbf{Q}_n\}$ такова, что существует бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющая при любых $u \in D(\mathbf{L}^q)$ и $n \in \mathbb{N}$ неравенству

$$\|\mathbf{Q}_n u - u\|_H + \|\mathbf{L}_n \mathbf{Q}_n u - \mathbf{Q}_n \mathbf{L} u\|_H \leqslant b_n \|u\|_{D(\mathbf{L}^q)}.$$

Замечание. Если оператор $\mathbf{L}$ имеет максимальную симметрическую (самосопряженную) регуляризацию $\{\mathbf{L}_n\}$, то его график лежит в сильном граф-пределе (см. [10], гл. 8) последовательности $\{\mathbf{L}_n\}$.

Примеры самосопряженных регуляризаций вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве приведены в работах [3], [4], [11]. В качестве примера регуляризации оператора $\mathbf{L}$ задачи Коши (1) – (4) мы приведем последовательность операторов $\{\mathbf{L}_\epsilon,\ \epsilon \in E\}$, задаваемых в пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$ равенством

$$\mathbf{L}_\epsilon u(x) = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(g_\epsilon(x)\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{i}{2} a(x) u\right) + \frac{i}{2} a(x) \frac{\partial}{\partial x} u \quad (7)$$

на области определения

$$D(\mathbf{L}_\epsilon) = \left\{ u \in W_2^1 :\ u|_{\mathbb{R}_\pm} \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm), \right. \\ \left. \left(g_\epsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2} a(x) u\right) \in W_2^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Здесь $g(x) = g(x) + \epsilon$, $\epsilon \in (0,1)$. В статье [4] доказано следующее утверждение.

Для любого $\epsilon_n \in (0,1)$ оператор $\mathbf{L}_{\epsilon_n}$ самосопряжен и генерирует унитарную полугруппу $e^{-i\mathbf{L}_{\epsilon_n} t}$, $t > 0$, в пространстве H. Нетрудно проверить, что для последовательности гамильтонианов $\{\mathbf{L}_{\epsilon_n}\}$ выполнены условия определения 2 при $q = 2$ (проверка условий в подобной ситуации проведена подробно в работах [3], [4], [5]).

В работе [3] исследована сходимость семейства решений задач (2), (6) при $\epsilon_n \to 0$ и является ли решение задачи (1), (2) пределом решений семейства задач (2), (6).

Теорема 2. Если оператор $\mathbf{L}$ является максимальным симметрическим оператором, то последовательность $\{u_\epsilon(t)\}$ решений регуляризованных задач (2), (6), (7) сходится в пространстве H равномерно на любом отрезке $[0,T]$, $T > 0$, тогда и только тогда, когда задача Коши (1), (2) для вырожденного оператора имеет решение $u(t)$, причем решение задачи Коши (1), (2) является пределом последовательности решений вырожденных задач, т. е. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u_\epsilon(t) - u(t)\|_H = 0$ для любого $T > 0$.

В случае отсутствия решения задачи Коши (1), (2) последовательность $\{u_\epsilon(t)\}$ решений регуляризованных задач сходится слабо в пространстве H равномерно на любом отрезке $[0,T]$, $T > 0$, к вектор-функции $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t) u_0$, которая является решением задачи Коши для уравнения Шредингера с сопряженным оператором $\mathbf{L}^*$ и начальным условием (2), т. е. для любых $T > 0$ и $\varphi \in H$ выполняется равенство $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\limits_{t\in[0,T]} |(u_\epsilon(t) - u^*(t), \varphi)_H| = 0.$ □

Теорема 3. Пусть оператор $\mathbf{L}$ задачи Коши (1), (2) является симметрическим с конечными индексами дефекта (n_-, n_+) и пусть $\{\mathbf{L}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — самосопряженная регуляризация некоторого порядка $q \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если последовательность регуляризованных полугрупп $\{e^{-i\mathbf{L}_n t},\ t > 0\}$ сходится в сильной операторной топологии равномерно на любом отрезке $[0,T]$, то предельная операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)$, $t > 0$, является изометрической полугруппой в пространстве H, генератором которой служит одно из максимальных симметрических расширений оператора $\mathbf{L}$, причем выполняется неравенство $n_- \geqslant n_+$.
2) Если $n_- \geqslant n_+$, то для любого максимального симметрического расширения Λ оператора $\mathbf{L}$ найдется такая его максимальная симметрическая регуляризация $\{\mathbf{L}_n\}$, что последовательность регуляризованных полугрупп $\{e^{-i\mathbf{L}_n t}\}$ сходится к полугруппе $e^{-i\mathbf{\Lambda} t}$, $t > 0$, в сильной операторной топологии равномерно на любом отрезке $[0,T]$. □

Следствие 1. Если $n_- < n_+$, то тогда не существует такой максимальной симметрической регуляризации, чтобы последовательность регуляризованных полугрупп $\{e^{-i\mathbf{L}_n t}\}$ сходилась в сильной операторной топологии равномерно на любом отрезке $[0,T]$. □

III. Квазирешения как точки минимума функционалов невязки. Вариационный подход

Несколько иные свойства проявляют вариационные методы минимизации функционалов невязки. Естественно ожидать, что минимизирующий элемент и свойства минимизирующей последовательности зависят от выбора банахова пространства, в котором рассматривается уравнение. Определим функционалы невязки для случая некорректности задачи Коши (см. теорему 1), когда оператор $\mathbf{L}$ является максимальным симметрическим оператором с индексами дефекта $(n_-, n_+) = (0, m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Фиксируем некоторое число $T > 0$ и рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_T = L_2([0,T], H)$. Задача Коши для уравнения (1) на интервале $(0,T)$ с начальным условием (2) может быть представлена уравнением вида

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} u - f = 0, \quad (8)$$

где вектор $u \in \mathcal{H}_T$ представляет неизвестную функцию из уравнения (1), $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_T)$ — некоторый линейный оператор в пространстве $\mathcal{H}_T$, f — определяемый начальным условием (2) элемент пространства $\mathcal{H}_T$. Изучению начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в форме абстрактного уравнения (8) посвящена монография [1]. Ниже рассмотрены два различных представления задачи Коши (1), (2) уравнением (8), использующие дифференциальную и интегральную форму уравнения (1).

Пусть функционал невязки задачи Коши (1), (2), представленной уравнением (8) с замкнутым линейным оператором $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$, определен на линейном многообразии $D(J) = D(\mathcal{A})$ равенством

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_{\mathcal{H}_T}, \; u \in D(J). \tag{9}$$

Определение 3. Квазирешением задачи Коши (1), (2) с функционалом невязки J называется точка минимума функционала J.

Согласно результатам работы [1, п. 2.3, гл. 1] справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть f_0 и f_1 есть проекции вектора $f \in \mathcal{H}_T$ на ортогональные подпространства $\mathcal{H}_{1T} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{H}_{0T} = \mathcal{H}_T \ominus \mathcal{H}_{1T}$. Тогда точная нижняя грань функционала есть $\inf J = \|f_1\|^2_{\mathcal{H}_T}$. Точная грань достигается на элементе $u_*(t) \in D(J)$, являющимся решением уравнения $\mathcal{A}u = f_0$ тогда и только тогда, когда $f_0 \in \operatorname{Im} \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Стационарная точка $\hat{u}$ функционала J_{T,u_0} является точкой его локального минимума (строгого, если $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) = \{0\}$, и нестрогого — в противном случае). □

В частности, если множество значений оператора $\mathcal{A}$ есть замкнутое подпространство, то функционал J достигает своей нижней грани.

Функционал невязки в интегральной форме. Задачу Коши (1), (2) можно представить в форме уравнения (8) различными способами. Рассмотрим задачу (1), (2) в форме интегрального уравнения

$$u(t) - u_0 + i \int\limits_0^t \mathbf{L}u(s)\, ds = 0, \; t \in [0, T].$$

На плотном в пространстве $\mathcal{H}_T$ линейном многообразии $D(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{H}_T\colon\, u(t) \in L_2([0,T], D(\mathbf{L}))\}$ зададим линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_T$ по правилу:

$$\mathcal{A}u(t) = u(t) + i \int\limits_0^t \mathbf{L}u(s)\, ds.$$

Рассмотрим связанный с задачей Коши (1), (2) в форме интегрального уравнения функционал невязки

$$j_{T,u_0}(u) = \|\mathcal{A}u - f\|^2_{\mathcal{H}}, \; u \in D(\mathcal{A}),$$

где $f \in \mathcal{H}_T$ — постоянная функция $f(t) = u_0$, $t \in [0, T]$.

Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ включает в свою область определения $D(\mathcal{A}^*)$ плотное в пространстве $\mathcal{H}_T$ линейное многообразие $D_* = \{u(t) \in C([0,T], D(\mathbf{L}^*))\}$ и определен на линейном многообразии D_* соотношением

$$\mathcal{A}^*u(t) = u(t) - i \int\limits_t^T \mathbf{L}^*u(s)\, ds.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ замыкаем, его замыкание обозначим через $\bar{\mathcal{A}}$. Оператор $\bar{\mathcal{A}}$ шире оператора $\mathcal{A}$: так, если $a < 0$ и $u_0 \in H$, то функция $u(t) = \mathbf{U}_L(t)u_0$, $t \in [0,T]$, лежит в области определения и в ядре оператора $\bar{\mathcal{A}}$, но в области определения оператора $\mathcal{A}$ лежит только в том случае, если $u_0 \in D(L)$.

Определим функционал

$$J_{T,u_0}(u) = \|\bar{\mathcal{A}}u - f\|^2_{\mathcal{H}} \tag{10}$$

на линейном многообразии $D(J_{T,u_0}) = D(\bar{\mathcal{A}})$, где $f(t) = u_0$, $t \in [0,T]$. Функционал (10) назовем *функционалом невязки задачи Коши* (1), (2) *в интегральной форме.*

Функционал невязки в дифференциальной форме. Задаче Коши (1), (2) сопоставляется линейный оператор $i\frac{d}{dt} - \mathbf{L}$ в пространстве $\mathcal{H}$, заданный на плотном линейном многообразии достаточно гладких функций. Замыкание указанного оператора определяет функционал невязки вида (9) задачи Коши (1), (2) в дифференциальной форме.

На линейном многообразии $D(\mathbf{T}) = C([0,T], D(\mathbf{L})) \cap C^1((0,T), H)$ определим линейный оператор $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, сопоставляющий вектору $v(t) \in D(\mathbf{T})$ вектор $\mathbf{T}v(t) = i\frac{d}{dt}v(t) - \mathbf{L}v(t)$ пространства $\mathcal{H}$. Оператор $\mathbf{T}$ плотно определен и имеет плотно определенный сопряженный оператор $\mathbf{T}^*$. Следовательно, оператор $\mathbf{T}$ имеет замыкание $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{H}_T$.

Для каждого $u_0 \in D(\mathbf{L})$ положим $D(S_{T,u_0}) = \{u \in D(\mathcal{T})\colon\; u(+0) = u_0\}$ и на множестве $D(S_{T,u_0})$ определим функционал

$$S_{T,u_0}(u) = \|\mathcal{T}u\|^2_{\mathcal{H}_T} = \int\limits_0^T dt \|\frac{d}{dt}u(t) + i\mathbf{L}u(t)\|^2_H. \tag{11}$$

Функционал $S_{T,u_0}(u)$ назовем *функционалом невязки задачи Коши* (1), (2) *в дифференциальной форме.*

Замечание 1. Понятию квазирешения некорректной краевой задачи посвящены монографии [1, гл. 1.2], и [12, гл. 2.1], в которых для абстрактного линейного уравнения в банаховом пространстве определяется функционал невязки. Функционалы невязки из [1] совпадают с функционалом (11) для линейных дифференциальных уравнений в пространстве $\mathcal{H}_T$. В работе [6] вариационная задача минимизации функционала невязки (11) решена с помощью методов спектральной теории операторов.

Общее утверждение теоремы 2 для замкнутого линейного оператора в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$ принимает различные формы для различных реализаций представления задачи Коши (1), (2) в форме уравнения (8). В работе [7] рассмотрены функционалы невязки для уравнения Шредингера в дифференциальной форме (1) и для этого же уравнения в интегральной форме. При этом поведение минимизирующей последовательности функционалов в дифференциальной и в интегральной формах существенно отличаются друг от друга и от поведения последовательности решений регуляризованных задач.

IV. Согласование выбора функционала невязки с методом эллиптической регуляризации

В настоящей работе предлагается вместо одного функционала невязки определить семейство функционалов невязки таким образом, что любая минимизирующая последовательность семейства функционалов невязки является последовательностью решений регуляризованных задач и наоборот.

Пусть оператор $\mathbf{L}$ является максимальным симметрическим: $n_-n_+ = 0$. Через $\mathcal{M} \equiv C_0([0,+\infty), D(\mathbf{L}))$ обозначим банахово пространство непрерывных финитных отображений полуоси $[0,+\infty)$ в гильбертово пространство $D(\mathbf{L})$, а для каждого $T > 0$ через $\mathcal{M}_T$ обозначим его подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль на полуоси $[T,+\infty)$. Через $\mathcal{H}_T$ и $\mathcal{H}$ обозначим гильбертовы пространства $L_2([0,T],H)$ и $L_2(\mathbb{R}_+,H)$ соответственно.

С задачей Коши (1), (2) свяжем следующее семейство функционалов:

$$P_h,\ h \in \mathcal{M}, \tag{12}$$

определенных на банаховом пространстве $C([0,+\infty),H)$ и принимающих на векторах $u \in C([0,+\infty),H)$ значения

$$P_h(u) = |\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle|^2, \quad h \in \mathcal{M}, \tag{13}$$

где линейный оператор $\mathbf{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ определен на линейном многообразии $\mathcal{M}$ равенством $\mathbf{K}h(t) = h(t) - i\int\limits_t^{+\infty} \mathbf{L}h(s)\,ds$, $t > 0$. Здесь $\langle u, \mathbf{K}h\rangle \equiv \int\limits_0^{+\infty}(u(t), \mathbf{K}h(t))_H\,dt = \int\limits_0^T (u(t), \mathbf{K}h(t))_H\,dt$ и $\langle u_0, h\rangle \equiv \int\limits_0^{+\infty}(u_0, h(t))_H\,dt = \int\limits_0^T (u_0, h(t))_H\,dt$, где отрезок $[0,T]$ содержит носитель функции u.

Определение 4. Будем говорить, что точка $u \in C([0,+\infty),H)$ является точкой минимума (стационарной точкой) семейства функционалов (12), если она является точкой минимума (стационарной точкой) функционала P_h для каждого $h \in \mathcal{M}$.

Замечание 2. Пусть на пространстве $C([0,+\infty),H)$ задано семейство полунорм g_h, $h \in \mathcal{M}$, принимающих значения $g_h(x) = |\langle x, h\rangle|$, $x \in C([0,+\infty),H)$, где $\langle x, h\rangle = \int\limits_0^{+\infty}(u(t), h(t))_H\,dt$. Тогда значение функционала (13) на функции $u(t) \in C([0,T], D(\mathbf{L}))$ есть квадрат полунормы g_h невязки (10) для функции $u(t)$ (учитывается то, что $D(\mathbf{L}) \subset D(\mathbf{L}^*)$ и $\mathbf{L}^*h = \mathbf{L}h$ для любого $h \in D(\mathbf{L})$).

Лемма 1. Если $\mathbf{L}$ — максимальный симметрический оператор в пространстве с индексами дефекта H $(n_-, n_+) = (0, m)$, то точка $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$ есть точка минимума семейства функционалов P_h, $h \in \mathcal{M}$. □

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что $P_h(u^*(t)) = 0$ для любого $h \in \mathcal{M}$. Действительно, оператор $\mathbf{L}$ является максимальным симметрическим, поэтому оператор $-i\mathbf{L}^*$ есть генератор сжимающей полугруппы в пространстве H (см. теорему 1).

Тогда для любого $u_0 \in D(\mathbf{L}^*)$ функция $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+, D(\mathbf{L}^*)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$ и удовлетворяет равенству $(u^*(t), h(t)) - (u_0, h(0)) + i(\int\limits_0^t \mathbf{L}^*u^*(s)\,ds, h(t)) = 0$ для любого элемента $h \in \mathcal{M}$ и любого $t > 0$. Следовательно, из условий $u_0 \in D(\mathbf{L}^*)$ и $h \in \mathcal{M}_T$ следует, что

$$\int\limits_0^T dt\left(u^*(t), h(t) - i\int\limits_t^T \mathbf{L}h(s)\,ds\right)_H - -(u_0, h(t))_H = 0, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

и поэтому $P_h(u^*(t)) = 0$ при любом $h \in \mathcal{M}$.

Если $u_0 \in H$ и $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$, то функция $u^*(t)$ есть обобщенное решение задачи Коши с оператором $\mathbf{L}^*$, поэтому является пределом в пространстве $C(\mathbb{R}_+, H)$ последовательности сильных решений $u_k^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_{0k}$, каждое из которых при любом выборе элемента $h \in \mathcal{M}_T$ удовлетворяет равенству вида (14) с неоднородным слагаемым $(u_{0k}, h(t))_H$. В пределе при $k \to \infty$ получаем, что для любого $h \in \mathcal{M}_T$ выполняется равенство $(u(t), h(t))_{\mathcal{H}_T} + i(u(t), \int\limits_t^T \mathbf{L}h(s)\,ds)_{\mathcal{H}_T} - (u_0, h(t))_{\mathcal{H}_T} = 0$, то есть $P_h(u^*(t)) = 0$ при любом $h \in \mathcal{M}$.

Лемма 2. Если $n_- = 0$, то ядро оператора $\mathbf{K}$ тривиально. □

Действительно, всякий элемент h ядра тождественно равен нулю на полуоси $[T,+\infty)$ при некотором $T > 0$, а на отрезке $[0,T]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $i\,\frac{d}{dt}\,u(t) = \mathbf{L}u(t)$ и условию $u(T) = 0$. Поскольку при $n_- = 0$ оператор $-i\mathbf{L}$ генерирует изометрическую полугруппу $e^{-i\mathbf{L}t}$, $t \leqslant 0$, то тогда решение указанной задачи единственно и тривиально, поэтому тривиально и ядро оператора $\mathbf{K}$.

Лемма 3. Если $n_- = 0$, то стационарная точка семейства функционалов P_h, $h \in \mathcal{M}$, удовлетворяет семейству равенств

$$\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{M}. \qquad \square \ (15)$$

Доказательство. Если точка $u \in C([0,+\infty), H)$ является стационарной точкой каждого из функционалов P_h, $h \in \mathcal{M}$, то тогда для каждого $h \in \mathcal{M}_T$ обращается в нуль первая вариация

$$\delta P_h(u, \delta u) = \langle \delta u, \mathbf{K}h\rangle \overline{[\langle u, \mathbf{K}_T h\rangle - \langle u_0, h\rangle]} + \overline{\langle \delta u, \mathbf{K}h\rangle}[\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle].$$

Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда

$$\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle = 0.$$

Достаточность очевидна, докажем необходимость. Действительно, пусть найдутся такие векторы $u \in \mathcal{H}$ и $h \in \mathcal{M}$, что $\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle \neq 0$.

Поскольку $\mathrm{Ker}(\mathbf{K}) = \{\theta\}$, то для любого $h \in \mathcal{M}$, $h \neq 0$, выполняется неравенство $\mathbf{K}h \neq 0$. Поэтому найдется такой вектор $\delta u \in C([0,+\infty), H) \cap \mathcal{H}$, что $\delta P_h(u, \delta u) = 2\|\delta u\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{K}h\|_{\mathcal{H}} |\langle u, \mathbf{K}h\rangle - \langle u_0, h\rangle| \neq 0$ и, следовательно, точка $u(t)$ не является стационарной для семейства функционалов P_h, $h \in \mathcal{M}$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Теорема 5. Если $n_- = 0$, то семейство функционалов P_h, $h \in \mathcal{M}$, имеет единственную стационарную точку — точку минимума $u^*(t)$. $\square$

Доказательство. Существование указанной точки минимума установлено в лемме 1. Если предположить, что семейство функционалов имеет две различные стационарные точки, то в силу леммы 3 их разность $w \in C([0,+\infty), H)$ удовлетворяет семейству равенств

$$\langle w(t), \mathbf{K}h(t)\rangle = 0, \quad h \in \mathcal{M}. \qquad (16)$$

Лемма 4. Функция $w(t) \in C([0,+\infty), H)$, удовлетворяющая семейству равенств (16), равна нулю. $\square$

Доказательство. Покажем, что образ оператора $\mathbf{K}$ плотен в пространстве $\mathcal{H}$. Покажем, что образ оператора $\mathbf{K}$ содержит линейное многообразие $C_0^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbf{L}))$ непрерывно дифференцируемых финитных функций, значения которых и производной от которых лежат в пространстве $D(\mathbf{L})$.

Пусть функция $g \in C_0^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbf{L}))$ и ее производная $g' \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathbf{L}))$. При этом существует такое число $T > 0$, что носители функций g и g' лежат в отрезке $[0, T]$. Тогда уравнение $h(t) - i\int\limits_t^T \mathbf{L}h(s)\,ds = g(t)$, $t \in [0,T]$, имеет единственное удовлетворяющее условию $g(T) = 0$ решение $h(t) = \int\limits_t^T \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(s-t) g'(s)\,ds$, $t \in [0,T]$, так как оператор $-\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t)$, $t > 0$. Продолженная нулем на интервал $(T, +\infty)$ функция h является элементом множества $\mathcal{M}$, таким, что $\mathbf{K}h = g$. Следовательно, линейное многообразие функций $h(t) - i\int\limits_t^T \mathbf{L}h(s)\,ds$, $h \in \mathcal{M}$, плотно в пространстве $\mathcal{H}$, поэтому $v(t) = 0$. Лемма 4 доказана.

Таким образом, семейство интегральных тождеств (15) определяет точку минимума семейства функционалов невязки полунорм $P_h(\cdot)$, $h \in \mathcal{M}$, однозначно. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Если оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $n_- = 0$, то семейство равенств (15) при всевозможных $h \in \mathcal{M}$ однозначно определяет решение задачи Коши с начальным условием (2) для уравнения

$$i\,\frac{d}{dt}\,u(t) = \mathbf{L}^* u(t), \quad t > 0.$$

Поэтому его выполнение для всех пробных функций $h \in \mathcal{M}$ можно положить за определение решения задачи Коши. Такое определение решения является операторной формулировкой определения обобщенного решения краевой задачи с помощью интегрального тождества, выполнение которого справедливо для всех пробных функций из подходящего класса (см. [2]), в данном случае из класса $\mathcal{M}$.

Замечание 4. Если оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $n_+ = 0$, то множество функций, удовлетворяющих семейству равенств (15) при всевозможных $h \in \mathcal{M}$, определено лишь с точностью до ядра оператора $\mathcal{A}_T^*$. В случае симметрического оператора $\mathbf{L}$ множество функций, удовлетворяющих семейству интегральных тождеств вида (15) при всевозможных h из более широкого класса пробных функций $\mathcal{M}^* \equiv C([0,T], D(\mathbf{L}^*))$, состоит не более чем из одного элемента. Этот факт нетрудно доказать теми же аргументами, что и лемму 4. Если симметрический оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $n_+ = 0$, то множество функций, удовлетворяющих семейству равенств вида (15) при всевозможных $h \in \mathcal{M}^*$, состоит из единственного элемента — обобщенного решения задачи Коши (1), (2) (см. (5) и теорему 1).

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть оператор $\mathbf{L}$ имеет конечные индексы дефекта и является максимальным симметрическим. Тогда в случае $n_+ > 0$ последовательность регуляризованных решений сходится слабо в пространстве H равномерно на любом отрезке, а семейство функционалов невязки $\{P_h, h \in M\}$ имеет единственную точку минимума, которая совпадает с пределом последовательности регуляризованных решений.

В случае $n_+ = 0$ последовательность регуляризованных решений сходится по норме пространства H равномерно на любом отрезке к обобщенному решению задачи Коши (1), (2), а семейство функционалов невязки $\{P_h,\ h \in M^*\}$

имеет единственную точку минимума, которая совпадает с обобщенным решением задачи Коши. □

Литература

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

2. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Серия: Математика. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1969.

3. *Сакбаев В.Ж.* О свойствах решений задачи Коши для вырождающегося вне отрезка уравнения Шредингера и спектральных аспектах регуляризации // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 21. – С. 87–113.

4. *Сакбаев В.Ж.* О спектральных аспектах регуляризации задачи Коши для вырожденного уравнения // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. – 2008. – **261**. – С. 258–267.

5. *Сакбаев В.Ж.* Динамика квантовых систем с вырожденным гамильтонианом: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – М., 2010.

6. *Сакбаев В.Ж.* Аппроксимационные и вариационные методы регуляризации некорректных задач // Доклады РАН. – 2008. – Т. 419, № 2. – С. 174–178.

7. *Сакбаев В.Ж.* Вариационные методы исследования некорректных задач // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. тр. / Моск. физ.-техн. ин-т. – М.: МФТИ, 2007. – С. 173–201.

8. *Жиков В.В.* К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях // Функ. ан. и его прил. – 2001. – Т. 35, № 1. – С. 23–39.

9. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Наука: Физматлит, 1995.

10. *Рид М., Саймон Б.* Современные методы математической физики. Т. 1. – М.: Мир, 1977.

11. *Плотников П.И., Саженков С.А.* Задача Коши для ультрапараболического уравнения Гратца-Нуссельта // Доклады РАН. – 2005. – Т. 401, № 4. – С. 455–458.

12. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. – М.: УРСС, 2002.

13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 10.01.2011