Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Набор зачётных задач №2

Каждая задача оценивается исходя из 5 баллов. Набранные баллы суммируются с баллами за первую контрольную, но сумма за каждую задачу не может превышать 10. Каждая задача засчитывается, если на контрольной набрано меньше 8 баллов за задачу с тем же номером. Можно сдавать любой пункт, но каждый пункт засчитывается не более чем k студентам из одной группы. (Значения k указаны отдельно для каждой задачи). Список «свободных» задач для каждой группы доступен по адресу `http://bit.ly/TlLFqr`.

1. ($k = 1$) Приведите следующие формулы к предварённой нормальной форме:

a) $(\forall x A(x,y) \wedge \exists y B(y)) \to (\neg\exists z \forall x C(x,z) \vee D(z))$;
b) $(\exists y A(x,y) \wedge \forall z B(z)) \to (C(z) \vee \neg\exists y \forall t D(y,t))$;
c) $(\neg\forall x \exists y A(x,y) \wedge B(z)) \to (\exists z C(z,x) \vee \forall t D(t))$;
d) $(A(x) \wedge \neg\forall x \exists y B(x,y)) \to (\forall y C(y,z) \vee \exists t D(t))$;
e) $(\exists x A(x,y) \vee \forall z B(x,z)) \to (\neg\exists t \forall z C(z,t) \wedge D(t))$;
f) $(\forall x A(x,y) \vee \exists y B(x,y)) \to (C(y) \wedge \neg\exists t \forall z D(z,t))$;
g) $(\exists x A(x) \vee \forall x B(x,y)) \to (\neg\forall z \exists t C(z,t) \wedge D(z))$;
h) $(\neg\forall x \exists y A(x,y) \vee B(x)) \to (\exists z C(z) \wedge \forall z D(z,t))$;
i) $(\neg\forall x \exists y A(x,y) \to B(z)) \wedge (\exists y C(y) \to \exists z D(x,z))$;
j) $(A(x) \to \neg\forall x \exists y B(x,y)) \wedge (\forall z C(x,z) \to \forall y D(y))$;
k) $(\exists x A(x) \to \forall y B(y,z)) \vee (\neg\exists z \forall x C(x,z) \to D(t))$;
l) $(\forall x A(x,z) \to \exists y B(y)) \vee (C(y) \to \neg\exists t \forall z C(z,t))$;
m) $(\neg\forall x \exists y A(x,y) \to B(z)) \vee (\forall y C(y,t) \to \exists z D(z))$;
n) $(A(x) \to \neg\forall y \exists x B(x,y)) \vee (\exists z C(z) \to \forall z D(z,t))$.

2. ($k = 1$) Являются ли следующие формулы общезначимыми? Если да, то докажите, если нет, то постройте пример интерпретации, в которой они ложны.

a) $\exists x \forall y \exists z A(x,y,z) \to \exists z \forall y \exists x A(x,y,z)$;
b) $\exists x \exists y \forall z A(x,y,z) \to \forall z \exists y \exists x A(x,y,z)$;
c) $\forall x \exists y \forall z A(x,y,z) \to \exists y \forall x \exists z A(x,y,z)$;
d) $((\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \to \forall x C(x)) \to \exists x((A(x) \wedge B(x)) \to C(x))$;
e) $((\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \to \exists x C(x)) \to \exists x((A(x) \wedge B(x)) \to C(x))$;
f) $((\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \to \forall x C(x)) \to \forall x((A(x) \wedge B(x)) \to C(x))$;
g) $\forall x(A(x) \to (B(x) \wedge C(x))) \to (\exists x A(x) \to (\forall x B(x) \wedge \forall x C(x)))$;
h) $\exists x(A(x) \to (B(x) \wedge C(x))) \to (\exists x A(x) \to (\forall x B(x) \wedge \forall x C(x)))$;
i) $\exists x(A(x) \to (B(x) \wedge C(x))) \to (\forall x A(x) \to (\exists x B(x) \wedge \exists x C(x)))$;
j) $\forall x(A(x) \to (B(x) \vee C(x))) \to (\forall x A(x) \to (\forall x B(x) \vee \forall x C(x)))$;
k) $(\exists x A(x) \to \forall y(B(y) \wedge C(y))) \to \forall z(A(z) \to (B(z) \wedge C(z)))$;
l) $(\exists x A(x) \to (\exists y B(y) \wedge \exists z C(z))) \to \exists t(A(t) \to (B(t) \wedge C(t)))$;
m) $(\exists x A(x) \to (\exists y B(y) \vee \exists z C(z))) \to \exists t(A(t) \to (B(t) \vee C(t)))$;
n) $\exists x \forall y \exists z A(x,y,z) \to \exists x(\forall y(\exists z A(x,y,z) \to P(x,y)) \to \forall y P(x,y))$;
o) $\exists x(\forall y(\exists z A(x,y,z) \to P(x,y)) \to \forall y P(x,y)) \to \exists x \forall y \exists z A(x,y,z)$;

3. ($k = 1$) Выразите следующие предикаты в следующих интерпретациях:

a) «p — простое число» в $\langle \mathbb{N}, 1, <, =, \mathrm{gcd}\rangle$, где gcd — наибольший общий делитель;
b) «p — простое число» в $\langle \mathbb{N}, 1, <, =, \mathrm{lcm}\rangle$, где lcm — наименьшее общее кратное;
c) «Точки x и y противоположны» в $\langle S^2, D\rangle$, где S^2 — сфера, а $D(x, y)$ означает, что $\angle xOy = 90^\circ$, где O — центр сферы;
d) «x и y — двоюродные сёстры» в $\langle \mathcal{P}; M, E, P\rangle$, где $\mathcal{P}$ — множество всех людей, $M(x)$ означает «x является мужчиной», $E(x, y)$ означает «x и y — супруги», $P(x, y)$ означает «x — родитель y»;
e) «x — сводная сестра y» в $\langle \mathcal{P}; M, E, P\rangle$;
f) $x = y \cup z$ в $\langle 2^A, \subset\rangle$;
g) $x = A \setminus y$ в $\langle 2^A, \subset\rangle$;
h) «Множества x, y и z пересекаются попарно, но общее пересечение пусто» в $\langle 2^A, \subset\rangle$;
i) «$\triangle xyz$ остроугольный» в $\langle \mathbb{R}^2, C\rangle$, где $C(x, y, z)$ выполнено, если расстояние от x до y равняется расстоянию от x до z ($|xy| = |xz|$);
j) $\angle xyz = 30^\circ$ в $\langle \mathbb{R}^2, C\rangle$;
k) $\angle xyz = 36^\circ$ в $\langle \mathbb{R}^2, C\rangle$;
l) $|xy| = \sqrt{2}$ в $\langle \mathbb{R}^2, E\rangle$, где $E(x, y)$ выполнено, если $|xy| = 1$;
m) $|xy| = \sqrt{5}$ в $\langle \mathbb{R}^2, E\rangle$;
n) $|xy| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в $\langle \mathbb{R}^2, E\rangle$.

4. ($k = 1$) Докажите невыразимость следующих предикатов в сдедующих интерпретациях:

a) D_1 в $\langle \mathbb{R}, D_2\rangle$, где $D_k(x, y)$ выполнено, если $|x - y| = k$;
b) «$\angle xyz = 60^\circ$» в $\langle \mathbb{R}^2, L\rangle$, где $L(x, y, z)$ выполнено, если x, y и z лежат на одной прямой;
c) «x, y, z, t лежат на одной окружности» в $\langle \mathbb{R}^2, L\rangle$;
d) «Скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y})$ положительно» в $\langle \mathbb{R}^2, E\rangle$, где $E(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ выполнено, если $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} - \vec{z}|$;
e) «Точка лежит на верхней стороне $[0, 1]^2$» в $\langle [0, 1]^2, \leqslant_{stand}\rangle$;
f) «Точка лежит на верхней стороне K» в $\langle K, \leqslant_{stand}\rangle$, где K — ромб с вершинами $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$;
g) «Точка лежит на верхней стороне K» в $\langle K, \leqslant_{stand}\rangle$, где K — четырёхугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$;
h) «Точки x и y имеют одинаковые ординаты» в $\langle [0, 1]^2, E\rangle$, где $E(x, y, z)$ выполнено, если торическое расстояние от x до y равно торическому расстоянию от x до z. (Торическое расстояние от $x = (x_1, x_2)$ до $y = (y_1, y_2)$ равняется

$$\sqrt{(\min\{|x_2 - x_1|, |1 + x_1 - x_2|, |1 + x_2 - x_1|\})^2 + (\min\{|y_2 - y_1|, |1 + y_1 - y_2|, |1 + y_2 - y_1|\})^2},$$

фактически квадрат превращается в тор путём отождествления противоположных сторон, и расстояние меряется по тору).

5*. ($k = 1$) Выразите в арифметике следующие предикаты:

a) $x = n!$;
b) $x = C_n^k$;
c) $x = A_n^k$;
d) Доску $n \times k$ можно обойти ходом коня;
e) На доску $n \times k$ можно поставить m ферзей, так чтобы они не били друг друга;
f) «x — n-ое по счёту простое число»;
g) «x — n-ое число Фибоначчи»;

h) «x — n-ое число Каталана»;
i) «x — n-ое число Падована» (Числа Падована заданы рекуррентным соотношением $P(n) = P(n-2) + P(n-3)$ с начальным условием $P(0) = P(1) = P(2) = 1$);
j) «x — n-ое число в последовательности Туэ-Морса» (Это последовательность 0 и 1, которая строится по шагам. На нулевом шаге последовательность равна 0, на $(k+1)$-ом шаге берётся последовательность с k-ого шага, 0 заменяется на 01, 1 — на 10. Последовательность на $(k+1)$-ом шаге будет продолжением последовательности на k-ом шаге, поэтому можно рассмотреть объединение всех последовательностей);
k) «x — n-ая десятичная цифра после запятой в разложении $\sqrt{2}$;
l) «x — n-ая десятичная цифра после запятой в разложении π;
m) «x — совершенное число» (т.е. сумма всех делителей x, кроме самого x, равна x);
n) «x — избыточное число» (т.е. сумма всех делителей x, кроме самого x, больше x);
o) «x — недостаточное число» (т.е. сумма всех делителей x, кроме самого x, меньше x);
p) «x — полусовершенное число» (т.е. сумма некоторых его делителей равна ему самому);
q) «x — странное число» (т.е. избыточное, но не полусовершенное);
r) «x — счастливое число» (Рассматривается следующая операция: число переходит в сумму квадратов своих цифр. Счастливым называется число, которое после нескольких таких операций обращается в единицу);
s) «x — n-ое число Форчуна» (т.е. минимальное число, которое, будучи сложенным с произведением первых n простых чисел, даёт простое число).

6*. ($k = 3$) Докажите, что любая формула в следующих интерпретациях эквивалентна некоторой бескванторной. Докажите невыразимость указанных предикатов.

a) $\langle \mathbb{N}, S, = \rangle$ (S — операция прибавления единицы). Предикат: $x = 2y$;
b) $\langle \mathbb{N}, \vdots \rangle$. Предикат: в разложении x на простые множители нет множителей степени, большей 1;
c) $\langle \mathbb{Q}, S, = \rangle$ (S — операция прибавления единицы). Предикат: $x = 2y$;
d) $\langle \mathbb{Q}, +, = \rangle$. Предикат: $|x| > |y|$;
e) $\langle \mathbb{R}, +, = \rangle$. Предикат: $|x| > |y|$;
f) $\langle \Xi, \sqsubset \rangle$, где Ξ — множество всех последовательностей нулей и единиц, $\sqsubset$ — отношение «быть началом». Предикат: x длиннее y;
g) $\langle 2^{\mathbb{N}}, \subset \rangle$. Предикат: равномощность.