УДК 629.7.05

Н. Е. Зубов[1], *Е. А. Микрин*[1,2], *С. С. Негодяев*[2,3], *В. Н. Рябченко*[2,4], *А. В. Лапин*[1]

[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева
[4]ОАО «Федеральная сетевая компания Единой энергетической системы»

Оптимизация законов управления орбитальной стабилизации космического аппарата

Рассматривается задача орбитальной стабилизации космического аппарата. Предложен метод, обеспечивающий решения задачи оптимального размещения полюсов замкнутой системы. С помощью предложенного метода осуществлен синтез закона управления с обратной связью для орбитальной стабилизации космического аппарата.

Ключевые слова: орбитальная стабилизация космического аппарата, обратная связь, замкнутая система, оптимальное размещение полюсов, декомпозиция, ортогональный делитель нуля.

Введение

Задача поддержания орбитальной ориентации космического аппарата (КА) является достаточно распространенной и практически реализуется на всех типах КА, находящихся на околоземных орбитах. Следует заметить, что в соответствии с целевым назначением того или иного КА предъявляются различные требования к качеству управления орбитальной стабилизацией. Так, для КА дистанционного зондирования Земли определяющим моментом является точность орбитальной стабилизации, характеризующаяся в том числе и качеством переходного процесса на всем интервале времени решения целевой задачи, которая может быть достигнута методами аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) [1]. В этом случае для линейных систем оптимальное квадратическое управление определяется путем решения нелинейного матричного уравнения Риккати [1], а в стационарном случае — нелинейного матричного уравнения Лурье–Риккати [1]. При решении задачи стабилизации орбитальной ориентации КА используют линейную стационарную модель углового движения КА вида [2, 3]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t),$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ — вектор входа; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — постоянные матрицы, определяющие динамические свойства КА; n, r — соответственно размерности векторов состояния и управления КА.

В [4] указано на существование мнения, что квадратическая оптимизация в линейных системах представляет собой не более чем один из методов определения матрицы коэффициентов обратной связи $\mathbf{K}$, обеспечивающей устойчивость матрице состояния замкнутой системы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ в случае стабилизируемости пары $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. И в этом своем качестве данный метод не решает сам по себе ни одной из фундаментальных структурных проблем общей задачи синтеза [4]. Одной из таких проблем является недостаточная робастность (грубость) оптимального управления, связанная, прежде всего, с размещением полюсов оптимальной системы.

С другой стороны, известно, что синтез обратной связи с помощью назначения полюсов (т.е. с помощью модальных методов) осуществить гораздо проще, чем определить, например, оптимальное квадратическое управление путем решения нелинейного матричного уравнения Риккати или Лурье–Риккати. Тем не менее полученное управление, как правило, не будет оптимальным.

Данная статья посвящена решению задачи синтеза законов стабилизации орбитальной ориентации КА, обеспечивающих оптимальное в смысле минимума линейно-квадратического функционала (квадратическая оптимизация, LQ-метод [1, 4]) размещение полюсов. Полученное решение базируется на выполненных в работе исследованиях, устанавливающих связь модального и оптимизационного подходов к синтезу обратной связи в целях обеспечения заданных требований качества и устойчивости переходных процессов управления КА.

1. Уравнения движения КА

Линеаризованные уравнения углового движения КА при стабилизации орбитальной ориентации на круговых орбитах с учетом действия гравитационного момента при создании управляющих моментов с использованием двигательной установки имеют вид [5]

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{x_5} \\ \dot{x_6} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & a_{65} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline J_x^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_z^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$a_{21} = \frac{J_y - J_z}{J_x} 4\omega_0^2, \quad a_{24} = -\frac{J_x + J_y - J_z}{J_x}\omega_0,$$

$$a_{42} = \frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}\omega_0, \quad a_{43} = \frac{J_x - J_z}{J_y}\omega_0^2, \quad a_{65} = \frac{J_x - J_y}{J_z} 3\omega_0^2,$$

ω_0 — орбитальная угловая скорость; J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции КА;

$$x_1 = \gamma,\ x_2 = \dot{\gamma},\ x_3 = \psi,\ x_4 = \dot{\psi},\ x_5 = \vartheta,\ x_6 = \dot{\vartheta};$$

γ, ψ, ϑ — углы крена, рысканья, тангажа; u_x, u_y, u_z — управляющие воздействия.

Математическая модель КА (1) представляет собой взаимосвязанные движения по крену и рысканию и изолированное движение по тангажу. Поэтому движение «крен–рыскание» можно рассматривать отдельно от движения по тангажу. В этом случае система уравнений (1) разбивается на две независимые подсистемы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x_5} \\ \dot{x_6} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ a_{65} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ J_z^{-1} \end{pmatrix} u_z. \tag{3}$$

Как будет показано дальше, решение задачи стабилизации орбитальной ориентации КА, обеспечивающее оптимальное в смысле минимума линейно-квадратического функционала размещение полюсов, может быть получено на основе комбинации LQ-метода и подходящего метода размещения полюсов. Другими словами, подходящий метод размещения полюсов дает возможность получить оптимальные в среднеквадратичном законы управления КА.

2. Размещение полюсов

Задача размещения полюсов или назначения собственных значений (eigenvalue assignment) в линейных динамических системах в той или иной постановке рассматривалась в многочисленных работах (см., например, [8–19]).

Рассмотрим линейную многомерную динамическую систему с многими входами и многими выходами (MIMO — Multi Input Multi Output):

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{4}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ — вектор входа; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $n > r$; $\mathfrak{D}$ — символ, обозначающий либо оператор дифференцирования: $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$, либо оператор сдвига: $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$.

Предполагается, что матрица $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ имеет полный ранг, а матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ заведомо неустойчива, т.е. множество ее собственных значений (спектр)

$$\mathrm{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \ \det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0\},$$

где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (комплексная плоскость), обязательно включает такие $\lambda_i \in \mathbb{C}$, что $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ для случая $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ и $|\lambda_i| > 1$ для случая $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$. Здесь $|\lambda_i|$ — модуль собственного значения λ_i.

Введем понятие $\mathbb{C}^{stab}$, которое в дальнейшем в зависимости от типа изучаемой MIMO-системы (непрерывной или дискретной) будет обозначать соответственно левую полуплоскость $\mathbb{C}^-$ плоскости $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{C}^{stab} \doteq \mathbb{C}^-$, либо область внутри круга единичного радиуса с центром в начале $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{C}^{stab} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda|<1}$. Считается, что для MIMO-системы (4) существует управление с обратной связью вида

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \tag{5}$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрица регулятора по состоянию.

Управление системой (4) с помощью законов (5) является классической задачей, когда необходимо найти такую матрицу $\mathbf{K}$, что обеспечиваются некоторые заданные требования к процессу управления. Эти требования условно можно разделить на три группы [6]: (a) требования на размещение полюсов замкнутой системы (собственных значений матриц $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$) в заданных точках $\mathbb{C}^{stab}$ или в заданной области $\mathbb{C}^{stab}$ (заданной областью, например, может быть вся левая полуплоскость $\mathbb{C}$); (b) требования на размещение полюсов и нулей (тех или иных нулей передаточной матрицы MIMO-системы [4, 18]) замкнутой системы в заданных точках $\mathbb{C}^{stab}$ или заданных областях $\mathbb{C}^{stab}$; (c) требования к переходным процессам в замкнутой системе в смысле минимума заданного функционала.

Требование (a) распространяется на все известные постановки задачи стабилизации. При этом, как правило, выдвигаются дополнительные требования полной управляемости и полной наблюдаемости системы.

Наиболее ярко требование (a) выражается в постановках модального управления [6–11, 17–18].

Хорошо известно, что характеристический полином

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}), \tag{6}$$

где $\lambda = s$ для случая $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ и $\lambda = z$ для случая $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$, задает распределение полюсов замкнутой системы на $\mathbb{C}$. Они являются определяющими для устойчивости MIMO-системы (4). Накладывая требования на желаемое требование (a) по распределению полюсов, можно обеспечить устойчивость и (опосредованно) качество переходных процессов в замкнутой системе.

Требования на распределение полюсов можно задавать с помощью разложения полинома (6) на множители, например,

$$\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (\lambda - \tilde{\lambda}_1)(\lambda - \tilde{\lambda}_2)\dots(\lambda - \tilde{\lambda}_n), \tag{7}$$

где $\tilde{\lambda}_i$ — заданные значения корней полинома (собственные значения матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$), или разложения матрицы

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \mathbf{W}\Lambda\mathbf{W}^{-1}, \tag{8}$$

где Λ — матрица диагонально-клеточного типа; $\mathbf{W}$ — матрица преобразования.

В матрице Λ для каждого i-го действительного полюса λ_i, соответствующего заданному значению корня характеристического полинома (7), имеется клетка размера 1×1, а для каждой пары комплексно-сопряженных корней — клетка размера 2×2 вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Re}(\lambda_i) & \mathrm{Im}(\lambda_i) \\ \hline -\mathrm{Im}(\lambda_i) & \mathrm{Re}(\lambda_i) \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Если заданы кратные корни, то это отражается в структуре матрицы Λ, как это делается в жордановой форме матрицы [20].

Еще одним способом реализации требования (а) является использование LMI-областей [10, 21]. Пусть D — некоторая заданная выпуклая область $\mathbb{C}^{stab}$ в смысле требования (а), тогда существуют определенного вида линейные матричные неравенства (LMI — Linear Matrix Inequalities), описывающие границы этой (выпуклой) области.

Известные на сегодня методы размещения полюсов зачастую не применимы в практических задачах в связи с присущими им недостатками, к которым относятся: плохая обусловленность используемых матриц (например, матриц управляемости); возможная неразрешимость задачи при полной управляемости (например, ограничение в виде различия алгебраической и геометрической кратности назначаемых полюсов); быстрый рост размерности решаемых уравнений и др.

Далее в работе представлен метод стабилизации по состоянию КА, рассматриваемого как MIMO-система, т.е. обеспечение выполнения требования (а) для MIMO-системы (4) с помощью закона (5) по размещению собственных значений матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ в области $\mathbb{C}^{stab}$. В основе метода лежит специфическая декомпозиция исходной системы. При этом в явном виде определяются элементы матрицы $\mathbf{A}$ и/или их комбинации, изменение которых с помощью обратной связи позволяет обеспечить устойчивость замкнутой системы.

3. Полное размещение полюсов

Рассмотрим эффективный метод решения задачи полного размещения полюсов [22] MIMO-системы (4). Метод не требует решения никаких специальных матричных уравнений (типа уравнения Сильвестра), имеет один и тот же вид для непрерывного и дискретного случаев задания модели системы, не имеет ограничений по алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов, легко реализуется в среде MATLAB.

Пусть $\mathbf{B}^{\perp T} = \mathrm{null}(\mathbf{B}^T)$ — ортогональный делитель нуля, т.е. матрица, удовлетворяющая следующим условиям [23, 24]:

$$\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r)\times r}, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{B}^{\perp T} = \mathbf{I}_{n-r}; \tag{10}$$

$\mathbf{B}^{+}$ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза, т.е.

$$\mathbf{BB}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{B},\ \mathbf{B}^{+}\mathbf{BB}^{+} = \mathbf{B}^{+},\ (\mathbf{B}^{+}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B},\ (\mathbf{BB}^{+})^T = \mathbf{BB}^{+}.$$

Здесь $\mathrm{null}(\cdot)$ — оператор вычисления базиса нуль-пространства [23]; $\mathbf{0}_{(n-r)\times r}$ — нулевая матрица размера $(n-r) \times r$.

Введем в рассмотрение следующую многоуровневую декомпозицию MIMO-системы (4) [22], представляемую парой матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Нулевой (исходный) уровень:

$$\mathbf{A_0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B_0} = \mathbf{B}, \tag{11}$$

Первый уровень:

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{B_0^{\perp}A_0B_0^{\perp T}}, \quad \mathbf{B_1} = \mathbf{B_0^{\perp}A_0B_0}, \tag{12}$$

k-й (промежуточный) уровень:

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{B_{k-1}^{\perp}A_{k-1}B_{k-1}^{\perp T}}, \quad \mathbf{B_k} = \mathbf{B_{k-1}^{\perp}A_{k-1}B_{k-1}}, \tag{13}$$

L-й (конечный) уровень, $L = \mathrm{ceil}(n/r) - 1$:

$$\mathbf{A_L} = \mathbf{B^{\perp}_{L-1} A_{L-1} B^{\perp T}_{L-1}}, \quad \mathbf{B_L} = \mathbf{B^{\perp}_{L-1} A_{L-1} B_{L-1}}. \tag{14}$$

Здесь ceil(*) — операция округления числа * в сторону большего значения, например, $\mathrm{ceil}(0.1) = 1$, $\mathrm{ceil}(1.6) = 2$, $\mathrm{ceil}(2.01) = 3$ и т.д.

Теорема 1. *Если MIMO-система* (4) *с парой матриц* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *полностью управляемая, то полностью управляемы все пары матриц* $(\mathbf{A_i}, \mathbf{B_i})$ (12)–(14), *где* $i \in \{0, \ldots, L\}$.

Доказательство теоремы 1. Известно, для полной управляемости MIMO-системы необходимо и достаточно, чтобы [9, 6, 16, 18]

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B}) = n. \tag{15}$$

Условие $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ может быть заменено на $\forall\ \lambda \in \mathrm{eig}(\mathbf{A})$.

Используя матрицу преобразования

$$\mathbf{T} = \left(\frac{\mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{B}^{+}} \right) = (\mathbf{B}^{\perp T} | \mathbf{B})^{-1},$$

осуществим преобразование пучка матриц $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B})$ по типу

$$\mathbf{T}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B}) = \left(\frac{\mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{B}^{+}} \right) (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B}). \tag{16}$$

Раскрывая правую часть (16), получим

$$\left(\frac{\mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{B}^{+}} \right) (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) & 0_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{B}^{+}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) & \mathbf{I}_r \end{array} \right),$$

при этом

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B}) = \mathrm{rank} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) & 0_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{B}^{+}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) & \mathbf{I}_r \end{array} \right). \tag{17}$$

Как следует из структуры (17), подматрица

$$(\mathbf{B}^{+}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) | \mathbf{I_r})$$

при любых λ имеет ранг r. Поэтому для выполнения условия (15) необходимо и достаточно, чтобы ранг подматрицы $\mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ удовлетворял требованию

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{rank} \mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = n - r.$$

Осуществим далее невырожденное преобразование подматрицы $\mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$ по типу

$$\mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)(\mathbf{B}^{\perp T} | \mathbf{B}). \tag{18}$$

Раскроем правую часть (18):

$$\mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)(\mathbf{B}^{\perp T} | \mathbf{B}) = (\mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \mathbf{T}} - \lambda \mathbf{I_{n-r}} | \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}_{n-r} | \mathbf{B_1}). \tag{19}$$

При этом, как и в предыдущем случае (17),

$$\mathrm{rank} \mathbf{B}^{\perp}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = \mathrm{rank}(\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}_n | \mathbf{B_1}). \tag{20}$$

Сравнивая правые части из (15) и (20), приходим к справедливости следующего промежуточного утверждения: *MIMO-система* (4) *полностью управляема, если и только если полностью управляема пара матриц* $(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_1})$.

Выполняя далее преобразования пары матриц $(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_1})$, аналогичные предыдущим, получим по индукции формулировку теоремы 1. Доказательство теоремы 1 закончено.

Без ограничения общности будем считать, что все матрицы $\mathbf{B_i}$ в (11), (12), (13), (14) являются матрицами полного ранга по столбцам. Тогда справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть MIMO-система* (4) *полностью управляемая и матрица* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *удовлетворяет формулам*

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{A} - \Phi_0 \mathbf{B}_0^-, \quad \mathbf{B}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp + \mathbf{B}_0^+, \tag{21}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-, \quad \mathbf{B}_1^- = \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp + \mathbf{B}_1^+, \ldots \tag{22}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^- \mathbf{A}_k - \Phi_k \mathbf{B}_k^-, \quad \mathbf{B}_k^- = \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k^\perp + \mathbf{B}_k^+, \ldots \tag{23}$$

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{B}_L^- \mathbf{A}_L - \Phi_L \mathbf{B}_L^-, \tag{24}$$

тогда

$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \operatorname{eig}(\Phi_{i-1}). \tag{25}$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим следующие формулы для матрицы регулятора:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^- \mathbf{A} - \Phi \mathbf{B}^-,$$

$$\mathbf{B}^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B}^+.$$

Тогда можно записать цепочку невырожденных (подобных) преобразований:

$$\left(\frac{\mathbf{B}^\perp}{\mathbf{B}^+}\right)(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^-\mathbf{A} - \Phi\mathbf{B}^-))(\mathbf{B}^{\perp T}|\mathbf{B}) =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{B}^\perp \mathbf{A}}{-\mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{A} + \Phi\mathbf{B}^+ + \Phi\mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp}\right)(\mathbf{B}^{\perp T}|\mathbf{B}) = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T}}{-\mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} + \Phi\mathbf{K_1}} \middle| \frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi - \mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}\right).$$

Применим далее к полученной матрице

$$\left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T}}{-\mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp \mathbf{T}} + \Phi\mathbf{K_1}} \middle| \frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi - \mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}\right) \tag{26}$$

невырожденное преобразование подобия следующего вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ \hline \mathbf{K}_1 & \mathbf{I}_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ \hline -\mathbf{K}_1 & \mathbf{I}_m \end{array}\right)^{-1}. \tag{27}$$

При умножении (27) слева на (26) получим

$$\left(\frac{\mathbf{I}_{n-m}}{\mathbf{K}_1}\middle|\frac{0}{\mathbf{I}_m}\right)\left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T}}{-\mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} + \Phi\mathbf{K_1}} \middle| \frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi - \mathbf{K_1}\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}\right) = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T}}{\Phi\mathbf{K_1}}\middle|\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi}\right).$$

Умножение справа результата предыдущего преобразования на обратную к (27) матрицу дает

$$\left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T}}{\Phi\mathbf{K_1}}\middle|\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi}\right)\left(\frac{\mathbf{I}_{n-m}}{-\mathbf{K}_1}\middle|\frac{0}{\mathbf{I}_m}\right) = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} - \mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}\mathbf{K}_1}{0}\middle|\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi}\right).$$

Таким образом, с помощью невырожденного преобразования подобия (27) получена матрица

$$\left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} - \mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}\mathbf{K}_1}{0}\middle|\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi}\right) = \left(\frac{\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1}{0}\middle|\frac{\mathbf{B}_1}{\Phi}\right), \tag{28}$$

собственные значения которой очевидны:

$$\operatorname{eig}\left(\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} - \mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}\mathbf{K}_1}{0}\middle|\frac{\mathbf{B}^\perp\mathbf{AB}}{\Phi}\right) = \operatorname{eig}\left(\frac{\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1}{0}\middle|\frac{\mathbf{B}_1}{\Phi}\right) =$$

$$= \mathrm{eig}(\Phi)\bigcup \mathrm{eig}(\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp T} - \mathbf{B}^{\perp}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}_1) = \mathrm{eig}(\Phi)\bigcup \mathrm{eig}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1).$$

Проделывая аналогичные предыдущим преобразования для матрицы (28), получим

$$\mathrm{eig}\left(\frac{\mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A_1}\mathbf{B}_1^{\perp T} - \mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{K}_2}{0}\left|\frac{\mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}{\Phi_1}\right.\right) =$$

$$= \mathrm{eig}(\Phi_1)\bigcup \mathrm{eig}(\mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1^{\perp T} - \mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{K}_2) = \mathrm{eig}(\Phi_1)\bigcup \mathrm{eig}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2).$$

Продолжая приведенные ниже преобразования вплоть до пары матриц $(\mathbf{A}_L, \mathbf{B_L})$, где $L = \mathrm{ceil}(n/r) - 1$, получим равенство (25), что и требовалось показать. Доказательство теоремы 2 закончено.

Таким образом, регулятор, заданный матричными соотношениями (21) – (24), обеспечивает выполнение условия (25), т.е. заданного размещения полюсов.

4. Размещение полюсов и оптимизация

Справедливо утверждение, вытекающее из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть матрица* $\mathbf{A_1} - \mathbf{B_1}\mathbf{K_1} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ *асимптотически устойчива, тогда асимптотически устойчива любая матрица* $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$*, где*

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{A} - \Phi(\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+}), \tag{29}$$

и Φ *— произвольная устойчивая матрица размера* $r \times r$*. При этом*

$$\mathrm{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \mathrm{eig}(\mathbf{A_1} - \mathbf{B_1}\mathbf{K_1})\bigcup \mathrm{eig}(\Phi). \tag{30}$$

Доказательство следствия 1 очевидно вытекает из доказательства теоремы 2.

Согласно формулировке следствия 1 полюса замкнутой MIMO-системы в случае выбора в качестве матрицы регулятора выражения (29) состоят из полюсов (собственных значений) матрицы $\mathbf{A_1} - \mathbf{B_1}\mathbf{K_1}$ и собственных значений матрицы Φ.

С другой стороны, известно следующее утверждение относительно задачи АКОР.

Теорема 3 [25]. *Пусть* $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$*, тогда для замкнутой непрерывной MIMO-системы матрица регулятора* $\mathbf{K}'$ *является оптимальной в смысле минимума квадратического функционала качества Летова–Калмана*:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt, \tag{31}$$

где $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R} > 0$, *т.е. удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати*:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0,$$

и $\mathbf{P}$ *— (строго) положительно определенная симметрическая матрица, если и только:*
1) $\mathrm{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}') < 0$, *т.е. замкнутая MIMO-система является асимптотически устойчивой;*
2) $\mathbf{K}'\mathbf{B} > 0$, *т.е. матрица* $\mathbf{K}'\mathbf{B}$ *является (строго) положительно-определенной симметрической матрицей.*

При этом всегда существует подходящая положительно-определенная матрица $\mathbf{S}$, что

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}^{+T}|\mathbf{B}^{\perp T})\left(\frac{\mathbf{R}\mathbf{K}'\mathbf{B}}{\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{K}'^{T}\mathbf{R}^T}\left|\frac{\mathbf{R}\mathbf{K}'\mathbf{B}^{\perp T}}{\mathbf{S}}\right.\right)\left(\frac{\mathbf{B}^{+}}{\mathbf{B}^{\perp}}\right) > 0,$$

или эквивалентно

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}^{+T}\mathbf{R}\mathbf{K}'\mathbf{B} + \mathbf{B}^{\perp T}\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{K}'^{T}\mathbf{R}^T)\mathbf{B}^{+} + (\mathbf{B}^{+T}\mathbf{R}\mathbf{K}'\mathbf{B}^{\perp T} + \mathbf{B}^{\perp T}\mathbf{S})\mathbf{B}^{\perp} > 0.$$

Симметрическую положительно-полуопределенную матрицу $\mathbf{Q}$ можно найти по формуле

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{BK} - \mathbf{A})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{BK} - \mathbf{A}) + (\mathbf{K}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}'^T),$$

или

$$\mathbf{Q} = \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}.$$

Не составляет труда распространить предыдущее утверждение на случай дискретной MIMO-системы ($\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$).

Заметим, что в случае существования решения уравнения Риккати $\mathbf{P} > 0$ пара матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$ является полностью наблюдаемой, т.е.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}: \quad \operatorname{rank}\left(\frac{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n}{\mathbf{Q}}\right) = n. \tag{32}$$

Сформулируем теорему.

Теорема 4. *Пусть MIMO-система*

$$\mathfrak{D}\mathbf{z}(t) = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1)\mathbf{z}(t) \tag{33}$$

— асимптотически устойчива,

$$\operatorname{eig}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1) \subset \mathbb{C}^{stab}, \tag{34}$$

тогда оптимальный регулятор в смысле минимума (31) *имеет вид*

$$\mathbf{K}_{opt} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{A} - \Phi_{opt}(\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+}), \tag{35}$$

где матрица Φ_{opt} *удовлетворяет линейному матричному уравнению*

$$\Phi_{opt} - (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} < 0 \tag{36}$$

и условию

$$\operatorname{eig}(\Phi_{opt}) \subset \mathbb{C}^{stab}. \tag{37}$$

Доказательство теоремы 4. Согласно формулировке теоремы 3 для оптимальности регулятора необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий: 1) $\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) < 0$, 2) $\mathbf{KB} > 0$. В следствии 1 было показано, что формула регулятора (29) обеспечивает заданное (в т.ч. асимптотически устойчивое) размещение полюсов у MIMO-системы (33), а при устойчивой матрице и у MIMO-системы (4).

Умножим обе части формулы регулятора (29) справа на матрицу $\mathbf{B}$, в результате получим цепочку преобразований:

$$\mathbf{KB} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} - \Phi(\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{B},$$

$$\mathbf{KB} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} - \Phi\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} - \mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{KB} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} - \Phi\underbrace{\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}}_{I_r} - \mathbf{K}_1\underbrace{\mathbf{B}^{\perp}\mathbf{B}}_{0},$$

$$\mathbf{KB} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} - \Phi. \tag{38}$$

Из (38) следует, что выполнение условия (строгой) положительной определенности $\mathbf{KB} > 0$ эквивалентно выполнению условия:

$$\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+} - \Phi > 0,$$

или

$$\Phi - (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} < 0. \tag{39}$$

Отсюда следует, что выполнение условий $\mathrm{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) < 0$ и $\mathbf{KB} > 0$ эквивалентно выполнению условий (39) и

$$\mathrm{eig}(\Phi_{opt}) \subset \mathbb{C}^{stab}.$$

При этом

$$\mathrm{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{BK}_{opt}) = \mathrm{eig}(\mathbf{A}_1-\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1)\bigcup \mathrm{eig}(\Phi_{opt}) \subset \mathbb{C}^{stab},$$

что и требовалось доказать. Доказательство теоремы 4 закончено.

Линейное матричное неравенство (36) при стандартных требованиях выполнения условий управляемости

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n|\mathbf{B}) = n \tag{40}$$

и наблюдаемости (32) разрешимо всегда (поскольку в этом случае всегда существует решение задачи АКОР), при этом можно указать подмножество решений с помощью диагонального доминирования:

$$\Phi_{opt} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{AB}-\alpha\mathbf{I}_r, \tag{41}$$

где

$$\alpha > \mathrm{Re}(\lambda_{\max}((\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{AB})).$$

Здесь

$$\mathrm{Re}(\lambda_{\max}((\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{AB}))$$

— действительная часть максимально удаленного от мнимой оси $\mathbb{C}$ вправо собственного значения матрицы $(\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

С использованием (41) формула регулятора, обеспечивающего оптимальное размещение полюсов, имеет вид

$$\mathbf{K}_{opt} = (\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{A}-((\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+})\mathbf{AB}-\alpha\mathbf{I}_r)(\mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{B}^{+}).$$

Таким образом, для MIMO-системы (4), управляемой и наблюдаемой в смысле (40) и (32) соответственно, можно произвольным образом разместить $n-r$ полюсов (собственных значений), а оставшиеся r полюсов будут определять условия (36) и (37).

5. Орбитальная стабилизация КА с оптимальным размещением полюсов

Рассмотрим далее применение изложенного в разделе 4 алгоритма синтеза регулятора, обеспечивающего оптимальное размещение полюсов применительно к задаче нахождения законов стабилизации орбитальной ориентации КА. В качестве математической модели движения КА будем использовать уравнения (2), (3), описывающие раздельное движение в каналах «крен–рыскание» и тангажа. В данном случае имеем

$$\mathbf{A}_{\gamma-\psi} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right), \mathbf{B}_{\gamma-\psi} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right), \tag{42}$$

$$\mathbf{A}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_{65} & 0 \end{array}\right), \mathbf{B}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline J_z^{-1} \end{array}\right).$$

Здесь размерность подпространств состояний, описывающих объект управления, — $n_{\gamma-\psi} = 4$, $n_{\vartheta} = 2$, векторов управления — $r_{\gamma-\psi} = 4$, $r_{\vartheta} = 2$, а число уровней декомпозиции для каждого из каналов

$$L = \mathrm{ceil}(n/r) - 1 = 2 - 1 = 1$$

— два (нулевой и первый).

Согласно введенной в разделе 4 многоуровневой декомпозиции нулевой уровень для системы (4) при $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ и матриц (42) имеет вид

$$\mathbf{B}^{\perp}_{\gamma-\psi} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \mathbf{B}^{+}_{\gamma-\psi} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & J_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_y \end{array}\right), \tag{43}$$

$$\mathbf{B}^{\perp}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right), \mathbf{B}^{+}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_{zy} \end{array}\right) \tag{44}$$

Нетрудно убедиться, что для матриц $\mathbf{B}^{\perp}$ из (44) выполняется условие ортогональности (10).

Первый (и конечный) уровень выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{1(\gamma-\psi)} = \mathbf{B}^{\perp}_{\gamma-\psi}\mathbf{A}_{\gamma-\psi}\mathbf{B}^{\perp T}_{\gamma-\psi} = \\ = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \\ \mathbf{A}_{1(\vartheta)} = \mathbf{B}^{\perp}_{\vartheta}\mathbf{A}_{\vartheta}\mathbf{B}^{\perp T}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_{65} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{1(\gamma-\psi)} = \mathbf{B}^{\perp}_{\gamma-\psi}\mathbf{A}_{\gamma-\psi}\mathbf{B}_{\gamma-\psi} = \\ = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right), \\ \mathbf{B}_{1(\vartheta)} = \mathbf{B}^{\perp}_{\vartheta}\mathbf{A}_{\vartheta}\mathbf{B}_{\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_{65} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ J_z^{-1} \end{pmatrix} = J_z^{-1}; \end{cases} \tag{46}$$

$$\mathbf{B}^{+}_{1(\gamma-\psi)} = \mathbf{B}^{-1}_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right), \quad \mathbf{B}^{+}_{1(\vartheta)} = \mathbf{B}^{-1}_{1(\vartheta)} = J_z. \tag{47}$$

Зададим матрицы Φ_1 для соответствующих каналов в следующем виде:

$$\Phi_{1(\gamma-\psi)} = \left(\begin{array}{c|c} -s & w \\ \hline -w & -s \end{array}\right), \quad \Phi_{1(\vartheta)} = -v, \tag{48}$$

где $s > 0$, $v > 0$ — действительные числа.

Как видно из (48), матрица $\Phi_{1(\gamma-\psi)}$ асимптотически устойчива, а ее собственные значения равны $-s \pm iw$.

Выполняя вычисления по формулам (21) – (24) с учетом матриц (43) – (48), получим

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{1(\gamma-\psi)} = \mathbf{B}^{+}_{1(\gamma-\psi)}\mathbf{A}_{1(\gamma-\psi)} - \Phi_{1(\gamma-\psi)}\mathbf{B}^{+}_{1(\gamma-\psi)} = \\ = \left(\begin{array}{c|c} -s & w \\ \hline -w & -s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} J_x & 0 \\ \hline 0 & J_y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_x s & -J_y v \\ \hline J_x w & J_y s \end{array}\right), \\ \mathbf{K}_{1(\vartheta)} = \mathbf{B}^{+}_{1(\vartheta)}\mathbf{A}_{1(\vartheta)} - \Phi_{1(\vartheta)}\mathbf{B}^{+}_{1(\vartheta)} = J_x v. \end{cases} \tag{49}$$

Согласно формуле (36) вычислим матрицы

$$\mathbf{D}_{\gamma-\psi} = \mathbf{B}^{+}_{\gamma-\psi}\mathbf{A}_{\gamma-\psi}\mathbf{B}_{\gamma-\psi} + \mathbf{K}_{1(\gamma-\psi)}\mathbf{B}_{1(\gamma-\psi)} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & J_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline J_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & J_y^{-1} \end{array}\right) + \tag{50}$$

$$+ \left(\begin{array}{c|c} J_x s & -J_y w \\ \hline J_x w & J_y s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} J_x & 0 \\ \hline 0 & J_y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} s & -w + J_x a_{24} J_y^{-1} \\ \hline w + J_y a_{42} J_x^{-1} & s \end{array}\right),$$

$$\mathbf{D}_{\vartheta} = \mathbf{B}^{+}_{\vartheta}\mathbf{A}_{\vartheta}\mathbf{B}_{\vartheta} + \mathbf{K}_{1\vartheta}\mathbf{B}_{1\vartheta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_z \\ \hline a_{65} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline J_z^{-1} \end{array}\right) + J_z v (J_z^{-1}) = v. \tag{51}$$

Используя тулбокс символьных вычислений MATLAB, найдем собственные значения матрицы (50):

$$\operatorname{eig}(D_{\gamma-\psi}) = \left(\begin{array}{c} s + (-(a_{24}J_x^2 w + J_z J_y w^2 - a_{24}a_{42}J_x J_y - a_{42}J_y^2 w)/J_x J_y)^{\frac{1}{2}} \\ \hline s - (-(a_{24}J_x^2 w + J_z J_y w^2 - a_{24}a_{42}J_x J_y - a_{42}J_y^2 w)/J_x J_y)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right). \tag{52}$$

В силу того, что собственные значения канала крен–рысканье определяются неоднозначно (подкоренное выражение в (52) может быть как отрицательным, так и положительным), то для обеспечения условия (36) и возможности применения формулы (41) поступим следующим образом.

Назначим число $\alpha_{\gamma-\psi} \doteq \varepsilon$ таковым, что оно (по определению) обеспечивает асимптотическую устойчивость матрицы Φ_i и отрицательную определенность разности матриц $\Phi_i - \mathbf{D}_{\gamma-\psi}$.

Для канала тангажа число α_v определим как $\alpha_v \doteq \delta$.

Используя формулу (41), будем иметь

$$\begin{cases} \Phi^{opt}_{\gamma-\psi} = \mathbf{D}_{i(\gamma-\psi)} - \varepsilon\mathbf{I}_2 = \left(\begin{array}{c|c} s-\varepsilon & -w + J_x a_{24} J_y^{-1} \\ \hline w + J_y a_{42} J_x^{-1} & s-\varepsilon \end{array}\right), \\ \\ \Phi^{opt}_{\vartheta} = \mathbf{D}_{i(\vartheta)} - \delta = v - \delta. \end{cases}$$

На основании выражений (42) матрицы обратной связи, обеспечивающие оптимальное размещение полюсов в задаче орбитальной стабилизации КА, запишутся следующим образом:

$$\mathbf{K}^{opt}_{\gamma-\psi} = (\mathbf{K}_{1(\gamma-\psi)}\mathbf{B}^{\perp}_{\gamma-\psi} + \mathbf{B}^{+}_{\gamma-\psi})\mathbf{A}_{\gamma-\psi} - \Phi_{i(\gamma-\psi)}(\mathbf{K}_{1(\gamma-\psi)}\mathbf{B}^{\perp}_{\gamma-\psi} + \mathbf{B}^{+}_{\gamma-\psi}) =$$

$$= \left(\left(\begin{array}{c|c} J_x s & -J_y w \\ \hline J_x w & J_y s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} J_x & 0 \\ \hline 0 & J_y \end{array}\right) \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} s-\varepsilon & -w + J_x a_{24} J_y^{-1} \\ \hline w + J_y a_{42} J_x^{-1} & s-\varepsilon \end{array}\right) \times$$

$$\times \left(\left(\begin{array}{c|c} J_x s & -J_y w \\ \hline J_x w & J_y s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & J_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_y \end{array}\right) \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_x(-s^2 + \varepsilon s + w^2 + a_{21}) - J_x^2 a_{24} w J_y^{-1} & J_x\varepsilon & -s(J_x a_{24} - J_y w) + J_y w(s-\varepsilon) & 0 \\ \hline -J_x w(s-\varepsilon) - s(J_y a_{42} - J_x w) & 0 & s + w^2 + a_{21}) + J_x^2 a_{42} w J_y^{-1} & J_y\varepsilon \end{array}\right),$$

$$\mathbf{K}_v^{opt} = (\mathbf{K}_{1(v)}\mathbf{B}_v^{\perp} + \mathbf{B}_v^{+})\mathbf{A}_v - \Phi_{i(v)}(\mathbf{K}_{1(v)}\mathbf{B}_v^{\perp} + \mathbf{B}_v^{+}) =$$

$$= (J_z v(1|0) + (0|J_z)) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ a_{65} & 0 \end{array}\right) - (v-\delta)(J_z v(1|0) + (0|J_z)) =$$

$$= (J_z a_{65} + J_z v(-v+\delta)|J_z\delta).$$

Как и прежде, с помощью тулбокса символьных вычислений MATLAB вычислим собственные значения оптимальной системы. Получим

$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{\gamma-\psi}^{opt}) = \left(\begin{array}{c} -s - iw \\ \hline -s + iw \\ \hline s - \varepsilon + (a_{24}a_{42} - w^2 + J_x a_{24} w J_y^{-1} - J_y a_{42} w J_x^{-1})^{\frac{1}{2}} \\ \hline s - \varepsilon - (a_{24}a_{42} - w^2 + J_x a_{24} w J_y^{-1} - J_y a_{42} w J_x^{-1})^{\frac{1}{2}} \end{array}\right).$$

$$\operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_v^{opt}) = \begin{pmatrix} v - \delta \\ -v \end{pmatrix},$$

Анализ двух последних выражений показывает, что оптимальная система всегда будет асимптотически устойчива при правильно выбранных параметрах ε и δ. Соответствующий выбор не составляет большого труда.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача орбитальной стабилизации КА. Предложен метод, обеспечивающий решение задачи оптимального размещения полюсов замкнутой системы. В основе метода лежит оригинальная декомпозиция модели исходной систем и установленная в работе взаимосвязь модального и оптимальных подходов к синтезу обратной связи в целях обеспечения, заданных требований качества в виде функционала Летова–Калмана и устойчивости переходных процессов управления КА. С помощью предложенного метода осуществлен синтез оптимальных законов во всех каналах управления и соответственно впервые для них получены выражения, однозначно определяемые параметрами орбиты и массо-инерционными характеристиками КА.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации в рамках договора с Минобрнауки России № 13.G25.31.0028.

Литература

1. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987.

2. *Воробьева Е. А., Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н.* Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 1. — С. 116–126.

3. *Богачев А. В., Воробьева Е. А., Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н., Тимаков С. Н.* Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 3. — С. 125–132.

4. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. — М.: Наука, 1980.

5. *Боднер В. А.* Системы управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1973.

6. *Мисриханов М. Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. — М.: Наука, 2007.
7. *Рябченко В. Н.* Сравнение подходов к анализу и синтезу динамических систем // Вестник ИГЭУ, 2001. — Вып. 3. — С. 170–191.
8. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
9. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 1998.
10. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007.
11. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
12. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.
13. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
14. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н.Крылова // АиТ. 2007. — № 12. — С. 53–69.
15. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул // Вестник ИГЭУ, 2005. — Вып. 5. — С. 243–248.
16. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
17. *Подчукаев В. А.* Теория автоматического управления (аналитические методы). — М.: Физматлит, 2005.
18. *Kailath T.* Linear Systems. Englewood Cliffs. — NJ: Prentice Hall, 1980.
19. *Kautsky J., Nichols N. K., Van Dooren P.* Robust pole assignment in linear state feedback // Int. J. Control. — 1985. — V. 41, N 5. — P. 1129–1155.
20. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
21. *Skelton R. E., Iwasaki T., Grigoriadis K.* An unified algebraic approach to linear control design. — London: Taylor&Francis Ltd., 1998.
22. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Размещение полюсов в больших системах. — URL: http://lab7.ipu.ru:8081/rus/seminars.asp.
23. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
24. *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. — 2005. — Вып. 5. — С. 196–240.
25. *Iracleous D. P., Alexandridis F. T.* A Simple Solution to the Optimal Eigenvalue Assignment Problem // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, N 9. — P. 1746–1749.

Поступила в редакцию 14.10.2011.

-