УДК 517.956.225+517.575

В.В. Карачик, Н.А. Антропова

Южно-Уральский государственный университет

Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона

Найдено полиномиальное решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном шаре. Использовалось явное представление гармонических функций в формуле Альманси. Исследована разрешимость обобщенной краевой задачи для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе.

Ключевые слова: третья краевая задача, уравнение Пуассона, полиномиальное решение, представления Альманси.

I. Введение

Хорошо известно классическое представление Альманси для полигармонических функций, которое успешно применяется для построения решений модельных задач для бигармонического и полигармонического уравнений (см., например, [1]). В работе [2] уже была сделана попытка построения полиномиальных решений уравнения Пуассона: $\Delta u(x) = Q(x)$ и полигармонического уравнения: $\Delta^m u(x) = Q(x)$ (здесь $Q(x)$ — некоторый полином) с помощью формулы Альманси. Найденные решения отличаются от полиномиальных решений дифференциальных уравнений в частных производных общего вида, полученных в [3, 4].

Хорошо известна функция Грина $G(x,\xi)$ задачи Дирихле в шаре, а поэтому с теоретической точки зрения построение решения такой задачи не представляет интереса. Однако при полиномиальной правой части $Q(x)$ и полиномиальном граничном значении $u_{|x|=1} = P(x)$ решение $u(x)$ задачи Дирихле оказывается полиномиальным. Для нахождения этого решения при $P(x) = 0$ необходимо вычислять сингулярный интеграл вида

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|<1} G(x,\xi) Q(\xi) d\xi, \tag{1}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в R^n, функция Грина имеет вид $G(x,\xi) = E(x,\xi) - E(|x|\xi, x/|x|)$, а $E(x,\xi) = (n-2)^{-1}|\xi - x|^{2-n}$ $(n > 2)$ — элементарное решение уравнения Лапласа [5]. В разделе 2 настоящей работы с помощью исследования свойств представлений Альманси, описанных в леммах 2–4 и теоремах 1, 2. В теореме 4 будет дана формула (22), позволяющая легко вычислять полиномиальное решение $u(x)$, задаваемое формулой (1). Кроме этого, в теореме 6 получена более общая формула (26) для представления полиномиального решения задачи Дирихле уравнения Пуассона с полиномиальными $Q(x)$ и $P(x)$. К сожалению, полученные полиномиальные решения для записи их в обычном виде требуют вычисления степеней оператора Лапласа от некоторых многочленов. Этот недостаток легко устраняется с помощью применения пакета «Mathematica» (см. пример 1).

В разделе 3 рассматривается обобщенная третья краевая задача для уравнения Пуассона (27), когда на границе задается условие $P_m(\partial/\partial\nu)u_{|x|=1} = \varphi$. А.В. Бицадзе опубликовал в [5] исследования обобщенной задачи Неймана для уравнения Лапласа, когда на границе задается n-я нормальная производная, то есть при $P_m(t) = t^m$. В теореме 7 сформулированы условия существования решения обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона. С помощью явного представления гармонических функций в формуле Альманси в теореме 8 получено полиномиальное решение в виде (32) третьей краевой задачи (30) для уравнения Пуассона с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и граничными данными $P(x)$.

II. Полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Сначала рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Пуассона в единичном шаре: $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$.

$$\Delta u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

$$u_{|x|=1} = 0, \tag{3}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n > 2$. В [6] было доказано, что имеет место представление Альманси, записанное в виде

$$Q(x) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} v_k(\alpha x) d\alpha, \tag{4}$$

где гармонические полиномы $v_k(x)$, $k = 0,\, 1,\, ...$, определяются формулой

$$v_k(x) = \Delta^k Q(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta^{k+s} Q(\alpha x) d\alpha. \tag{5}$$

Следует отметить, что операторный ряд в формуле (5) является, по сути, конечной суммой, поскольку $Q(x)$ — полином. Поэтому лишь конечное число $v_k(x)$ в (4) отлично от нуля. Для удобства записи мы сохраним в суммах верхний предел равный ∞.

Используя представление (4), в работе [2] установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Некоторое решение уравнения (2) может быть найдено в виде

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x) d\alpha, \tag{6}$$

где следует считать, что $(-\Delta)^k Q(\alpha x) = ((-\Delta)^k Q)(\alpha x)$.

Предположим сначала, что $Q(x) = Q_m(x)$ — однородный полином степени m. В [2] показано, что в этом случае решение (6) может быть записано в виде

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s Q_m(x)}{(2{,}2)_{s+1}(2m-2s+n{,}2)_{s+1}}. \tag{7}$$

Здесь $(a{,}b)_k = a(a+b)...(a+(k-1)b)$ — обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a{,}b)_0 = 1$. Например, $(2{,}2)_k = (2k)!!$. Заметим, что выражение $(2m-2s+n{,}2)_{s+1} = (2m-2s+n)...(2m+n)$ не обращается в нуль, поскольку $2s \leqslant m$.

В дальнейших исследованиях нам понадобится одно комбинаторное тождество.

Лемма 1. $\forall\, \alpha \in \mathrm{R}_+$ и $\forall\, m \in \mathrm{N}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k-1} \frac{(2m-2k+2{,}2)_k (2m-2k+\alpha{,}2)_k}{(2{,}2)_k (4m-2k-2+\alpha{,}2)_k} = 0. \tag{8}$$

Доказательство этого утверждения легко получается с помощью метода математической индукции.

Рассмотрим уравнение Пуассона со специальной правой частью:

$$\Delta u = |x|^{2m} \cdot P_s(x), x \in D, \tag{9}$$

где $P_s(x)$ — однородный гармонический полином степени s, $m \in \mathrm{N}_0^n (\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\})$, а $D \subset \mathrm{R}^n$ — звездная область с центром в начале координат.

Теорема 2. Решение уравнения (9), записанное в форме (6) или (7), имеет вид

$$u(x) = \frac{|x|^{2m+2} P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 некоторое решение $u(x)$ уравнения Пуассона $\Delta u = Q(x)$, $x \in D$, может быть найдено в виде (6). Положим $Q(x) = |x|^{2m} P_s(x)$. По формуле (6) вычислим это решение:

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int\limits_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{k+n/2-1} \Delta^k (|\alpha x|^{2m} P_s(\alpha x)) d\alpha.$$

Рассмотрим выражение $\Delta^k(|x|^{2m} P_s(x))$. Вычислим его при произвольном $k \in \mathrm{N}$. Нетрудно подсчитать, что

$$\Delta(|x|^{2m} P_s(x)) = 2m(2m+2s+n-2)|x|^{2m-2} P_s(x).$$

Поэтому при $2k \leqslant 2m + s$ будем иметь

$$\Delta^k(|x|^{2m} P_s(x)) = 2m(2m-2)...(2m-2k+2)\times$$

$$\times(2m+2s+n-2)(2m+2s+n-4)...(2m+2s+n-2k)|x|^{2m-2k} P_s(x) =$$

$$= (2m-2k+2{,}2)_k (2m+2s+n-2k{,}2)_k \cdot |x|^{2m-2k} P_s(x).$$

Следовательно, можно записать

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k |x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int\limits_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{k+n/2-1} \times$$

$$\times (2m-2k+2{,}2)_k (2m+2s+n-2k{,}2)_k |\alpha x|^{2m-2k} P_s(\alpha x) d\alpha.$$

И поскольку $P_s(\alpha x) = \alpha^s P_s(x)$, получим

$$u(x) = \frac{|x|^{2m+2} P_s(x)}{2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m-2k+2{,}2)_k (2m+2s+n-2k{,}2)_k}{(2k)!!(2k+2)!!} \int\limits_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{2m+s+n/2-k-1} d\alpha.$$

Вычислим отдельно интеграл в полученном выражении. Имеем

$$\int\limits_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{2m+s+n/2-k-1} d\alpha = \mathrm{B}(k+1{,}2m+s+n/2-k) =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(2m+s+n/2-k)}{\Gamma(2m+s+n/2+1)} = \frac{k!}{(2m+s+n/2)...(2m+s+n/2-k)},$$

где $\Gamma(k)$ — гамма функция Эйлера, а $\mathrm{B}(m{,}n)$ — бета функция Эйлера. Тогда $u(x)$ преобразуется к виду

$$u(x) = \frac{|x|^{2m+2} P_s(x)}{2} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m-2k+2{,}2)_k (2m+2s+n-2k{,}2)_k \cdot k!}{2^k k!(2k+2)!! \cdot (2m+s+n/2)...(2m+s+n/2-k)} =$$

$$= |x|^{2m+2} P_s(x) \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m-2k+2{,}2)_k (2m+2s+n-2k{,}2)_k}{(2k+2)!! \cdot (4m+2s+n)...(4m+2s+n-2k)} =$$

$$= |x|^{2m+2}P_s(x)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k+2,2)_k(2m+2s+n-2k,2)_k}{(2,2)_{k+1}\cdot(4m+2s+n-2k,2)_{k+1}}.$$

Пусть $\alpha = 2s+n$. Покажем, что для $m \in \mathrm{N}_0 = \mathrm{N}\cup\{0\}$ верно равенство

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k+2,2)_k(2m+\alpha-2k,2)_k}{(2,2)_{k+1}\cdot(4m+\alpha-2k,2)_{k+1}} = \frac{1}{(2m+2)(2m+\alpha)}. \tag{10}$$

Легко видеть, что это равенство верно при $m=0$. Далее, умножим левую и правую части равенства (10) на $(2m+2)(2m+\alpha)$. Тогда будем иметь

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k+2,2)_{k+1}(2m+\alpha-2k,2)_{k+1}}{(2,2)_{k+1}\cdot(4m+\alpha-2k,2)_{k+1}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k+2,2)_k(2m+\alpha-2k,2)_k}{(2,2)_{k+1}\cdot(4m+\alpha-2k,2)_{k+1}} = 0.$$

Добавим в сумму слагаемое с номером -1. Тогда получим равенство

$$\sum_{k=-1}^{m}\frac{(-1)^k(2m-2k+2,2)_{k+1}(2m+\alpha-2k,2)_{k+1}}{(2,2)_{k+1}\cdot(4m+\alpha-2k,2)_{k+1}} = 0.$$

Сдвинем индекс суммирования на 1, заменяя $k+1\to k$. Получим

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}(2m-2k+4,2)_k(2m+\alpha-2k+2,2)_k}{(2,2)_k\cdot(4m+\alpha-2k+2,2)_k} = 0.$$

Так как $m\in\mathrm{N}_0$ любое, то вместо $m+1$ возьмем $m\in\mathrm{N}$:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k-1}(2m-2k+2,2)_k(2m+\alpha-2k,2)_k}{(2,2)_k\cdot(4m+\alpha-2k-2,2)_k} = 0. \tag{11}$$

Мы получили равенство (8). По лемме 1 это равенство справедливо для всех $m\in\mathrm{N}$. Так как равенство (11) равносильно равенству (10), то теорема доказана.

Если разложить полином $Q_m(x)$ с помощью формулы Альманси на слагаемые вида $|x|^{2s}R_{m-2s}(x)$, то решение уравнения $\Delta v(x) = Q_m(x)$, задаваемое формулой (7), имеет вид

$$v(x) = \sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{|x|^{2s+2}R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2m-2s+n)}, \tag{12}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, а однородные гармонические полиномы $R_k(x)$ определяются формулой Альманси в виде

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2R_{m-2}(x)+\ldots+|x|^{2s}R_{m-2s}(x). \tag{13}$$

Какой же вид имеют гармонические полиномы $R_k(x)$ в этой формуле?

Лемма 2. Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси (13) имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что имеет место следующая связь между полиномом $v_k(x)$ из формулы (5) и полиномом $R_{m-2k}(x)$ из формулы (13):

$$R_{m-2k}(x) = \frac{v_k(x)}{4^kk!(k-1)!}\int_0^1(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{m-2k+n/2-1}d\alpha = v_k(x)\frac{\mathrm{B}(k,m-2k+n/2)}{4^kk!(k-1)!} =$$

$$= \frac{v_k(x)}{(2{,}2)_k(2m-4k+n{,}2)_k} = \frac{(2m-4k+n-2{,}2)v_k(x)}{(2{,}2)_k(2m-4k+n-2{,}2)_{k+1}}, \tag{14}$$

где $\mathrm{B}(m{,}n)$ — бета-функция Эйлера. Отсюда видно, что $v_0(x) = R_m(x)$. Воспользуемся формулой (5). Тогда будем иметь

$$v_0(x) = Q_m(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}}{4^s s!(s-1)!} \int_0^1 (1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s+n/2-2}\Delta^s Q_m(\alpha x) d\alpha =$$

$$= Q_m(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|x|^{2s}(-\Delta)^s Q_m(x)}{4^s s!(s-1)!} \int_0^1 (1-\alpha)^{s-1}\alpha^{m-s+n/2-2} d\alpha.$$

Если воспользоваться свойствами бета $\mathrm{B}(m{,}n)$ и гамма $\Gamma(s)$ функций Эйлера, то можно записать

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{s-1}\alpha^{m-s+n/2-2} d\alpha = \mathrm{B}(s{,}m-s+n/2-1) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(m-s+n/2-1)}{\Gamma(m+n/2-1)} =$$

$$= \frac{(s-1)!}{(m-s+n/2-1)...(m+n/2-2)} = \frac{(s-1)!}{(m-s+n/2-1)_s},$$

где $(m)_s = m(m+1)...(m+s-1)$ — символ Похгаммера. Значит:

$$v_0(x) = Q_m(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!|x|^{2s}(-\Delta)^s Q_m(x)}{(s-1)!4^s s!(m-s+n/2-1)_s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|x|^{2s}(-1)^s \Delta^s Q_m(x)}{(2{,}2)_s(2m-2s+n-2{,}2)_s}.$$

Если в формуле (5) обозначить $v_0(x) = v_0(x;Q)$, то получим $v_k(x) = v_0(x;\Delta^k Q)$.

Поэтому

$$v_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}\Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2{,}2)_s(2m-4k-2s+n-2{,}2)_s}.$$

Значит, из (14) выводим:

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2{,}2)_k(2m-4k+n-2{,}2)_{k+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}\Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2{,}2)_s(2m-4k-2s+n-2{,}2)_s} =$$

$$= \frac{2m-4k+n-2}{(2{,}2)_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}\Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2{,}2)_s(2m-4k-2s+n-2{,}2)_{s+k+1}}.$$

Вернемся к решению (12). Подставим в формулу (12) вместо сомножителей $|x|^{2s+2}$ единицу. Тогда многочлен

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{[m/2]} \frac{R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2m-2s+n)} \tag{15}$$

является гармоническим, поскольку таковы $R_{m-2s}(x)$, и обладает свойством $u_0(x) = v(x)$ при $|x| = 1$. Поэтому многочлен $u(x) = v(x) - u_0(x)$ является решением задачи Дирихле (2)–(3) при $Q(x) = Q_m(x)$. Преобразуем многочлен $u_0(x)$.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k (m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}}. \tag{16}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 для преобразования многочлена $u_0(x)$ из (15). Будем иметь

$$u_0(x) = \sum_{q=0}^{[m/2]} \frac{R_{m-2q}(x)}{(2q+2)(2m-2q+n)} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2m-4q+n-2}{(2,2)_q(2q+2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k|x|^{2k}\Delta^{q+k}Q_m(x)}{(2,2)_k(2m-4q-2k+n-2,2)_{q+k+1}(2m-2q+n)} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2,2)_{q+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2m-4q+n-2)|x|^{2k}\Delta^{q+k}Q_m(x)}{(2,2)_k(2m-4q-2k+n-2,2)_{q+k+2}}.$$

Верхние пределы суммирования в последних суммах взяты равными ∞, но фактически суммирование ограничено значениями индексов q и k, при которых $\deg(\Delta^{q+k}Q_m(x)) \geqslant 0$, то есть при $2q+2k \leqslant m$. Преобразуем кратное суммирование в полученной выше формуле:

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q+k=s} \frac{(-1)^k(2m-4q+n-2)|x|^{2k}\Delta^{q+k}Q_m(x)}{(2,2)_{q+1}(2,2)_k(2m-4q-2k+n-2,2)_{q+k+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \Delta^s Q_m(x) \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2,2)_{s-k+1}(2,2)_k(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k(m-2s+2k+n/2-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m-2s+k+n/2-1)_{s+2}}.$$

Теперь преобразуем многочлен $v(x) - u_0(x)$, который является решением задачи Дирихле (2)–(3) с $Q(x) = Q_m(x)$.

Лемма 4. Имеет место равенство

$$u_0(x) - v(x) = \frac{1-|x|^2}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{(2s+2)!!(2s)!!} \int_0^1 (1-t)^s t^{m-2s+n/2-1}(1-t|x|^2)^s dt. \tag{17}$$

Доказательство. Используя формулы (16) и (12), запишем:

$$u_0(x) - v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} -$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s|x|^{2s+2}\Delta^s Q_m}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s+1} \frac{(-1)^k(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}(s+1)!} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} |x|^{2k} \frac{(m+n/2-2s+2k-1)\Gamma(m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(m+n/2-s+k+1)}.$$

Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя связь гамма и бета функций Эйлера, можем записать следующее:

$$\frac{\Gamma(m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(m+n/2-s+k+1)} = \frac{B(s+2,m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{(s+1)!} \int_0^1 (1-t)^{s+1} t^{m+n/2+k-2s-2} dt.$$

Значит, внутренняя сумма с учетом того, что $kt^k = t(t^k)'$ и бинома Ньютона имеет вид

$$(m + \frac{n}{2} - 2s - 1) \int_0^1 (1-t)^{s+1} t^{m+n/2-2s-2} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} |x|^{2k} t^k dt +$$

$$+2 \int_0^1 (1-t)^{s+1} t^{m+n/2-2s-2} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} k|x|^{2k} t^k dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{s+1}(t^{m+n/2-2s-1})'(1-t|x|^2)^{s+1}dt + 2\int_0^1 (1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-1}((1-t|x|^2)^{s+1})'dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{s+1}d(t^{m+n/2-2s-1}(1-t|x|^2)^{s+1}) - (s+1)|x|^2\int_0^1 (1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-1}(1-t|x|^2)^{s}dt.$$

Поэтому, учитывая, что при $n>2$, $s \geqslant 0$, $m-2s \geqslant 0$ верно равенство $t^{s+1}(1-t)^{m+n/2-2s-1}|_0^1 = 0$, возьмем первый интеграл по частям. Будем иметь

$$(s+1)\int_0^1 (1-t)^{s}t^{m+n/2-2s-1}(1-t|x|^2)^{s}((1-t|x|^2) - |x|^2(1-t))dt =$$

$$= (s+1)(1-|x|^2)\int_0^1 (1-t)^{s}t^{m+n/2-2s-1}(1-t|x|^2)^{s}dt.$$

Следовательно, многочлен $u_0(x) - v(x)$ можно записать в виде

$$u_0(x) - v(x) = (1-|x|^2)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}((s+1)!)^2}\int_0^1 (1-t)^{s}t^{m+n/2-2s-1}(1-t|x|^2)^{s}dt =$$

$$= \frac{1-|x|^2}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{(2s+2)!!(2s)!!}\int_0^1 (1-t)^{s}t^{m-2s+n/2-1}(1-t|x|^2)^{s}dt.$$

Теперь легко непосредственно видеть, что многочлен $v(x) - u_0(x)$, удовлетворяющий уравнению Пуассона (2) с $Q(x) = Q_m(x)$, удовлетворяет и однородному условию Дирихле (3): $(v(x) - u_0(x))_{|x|=1} = 0$.

Итак, исходя из формулы (17) решение задачи (2)–(3) при $Q(x) = Q_m(x)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{|x|^2-1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\int_0^1 \frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}t^{m-2s+n/2-1}dt. \tag{18}$$

Это решение, записанное в соответствии с леммой 4 в другой форме, имеет вид

$$u(x) = v(x) - u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{4^{s+1}k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}. \tag{19}$$

Пример 1. Решение задачи Дирихле (2)–(3) при $Q_6(x) = x_1^3x_2x_3^2 + x_2^2x_3x_4^3$, записанное в виде (19), легко вычисляется с помощью «Mathematica»:

$$u(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^4x_2x_3 + x_2x_3^2x_4^3)\left(-\frac{1}{32} + \frac{|x|^2}{32}\right) + (12x_1^2x_2x_3 + 6x_2x_3^2x_4 + 2x_2x_4^3)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{1344} + \frac{|x|^2}{768} - \frac{|x|^4}{1792}\right) + (24x_2x_3 + 24x_2x_4)\left(-\frac{1}{46080} + \frac{|x|^2}{21504} - \frac{|x|^4}{30720} + \frac{|x|^6}{129024}\right).$$

Из формулы (19) сразу не видно, что $u(x)_{|x|=1} = 0$. Преобразуем $u(x)$.

Теорема 3. Полином (19) можно записать в виде

$$u(x) = (|x|^2 - 1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{(2s+2)!!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \left(\begin{array}{c} s \\ k \end{array}\right)\frac{|x|^{2k}}{(2m-4s+2k+n,2)_{s+1}}. \qquad (20)$$

Доказательство. Преобразуем правую часть (20) к виду (19). Для этого раскроем скобки $(|x|^2 - 1)$ и сдвинем индекс суммирования в первом слагаемом $k \to k-1$. Имеем

$$(|x|^2 - 1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{(2s+2)!!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \left(\begin{array}{c} s \\ k \end{array}\right)\frac{|x|^{2k}}{(2m-4s+2k+n,2)_{s+1}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\sum_{k=1}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}}{(2k-2)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+1}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k)!!(2m-4s+2k+n,2)_{s+1}}. \qquad (21)$$

Обе внутренние суммы имеют общую область суммирования $\sum_{k=1}^{s}$. Просуммируем сначала полученные двойные суммы по этой области. Имеем

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\sum_{k=1}^{s}\frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}}{(2k-2)!!(2s-2k)!!(2m-4s+2k+n,2)_s}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(2s-2k+2)(2m-4s+2k+n-2)} + \frac{1}{2k(2m-4s+2k+n+2s)}\right).$$

Приводя дроби в скобках к общему знаменателю, получим

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\sum_{k=1}^{s}\frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}(2m-4s+4k+n-2)(2s+2)}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}.$$

Вернемся к сумме (21). В первой двойной сумме мы не учли слагаемое при $k = s+1$. Оно имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\frac{(-1)^{s+2}|x|^{2s+2}}{(2s)!!(2m-2s+n,2)_{s+1}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}\Big|_{k=s+1}.$$

Во второй двойной сумме мы не учли слагаемое при $k = 0$. Оно имеет вид

$$-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2s+2}\frac{1}{(2s+2)!!(2m-4s+n,2)_{s+1}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}\Big|_{k=0}.$$

Складывая три полученных части полинома из (21), видим, что он имеет вид (19).

Получим решение задачи Дирихле (2)–(3) с неоднородным многочленом $Q(x)$.

Теорема 4. Решение задачи Дирихле (2)-(3) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha. \qquad (22)$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — произвольный полином. Представим его в виде суммы однородных слагаемых $Q(x)=\sum_m Q_m(x)$. Обозначим через $u_m(x)$ полиномиальное решение задачи Дирихле (2)-(3) с правой частью $Q(x)=Q_m(x)$. Тогда очевидно, что искомое решение имеет вид $u(x)=\sum_m u_m(x)$. Из формулы (18) следует, что

$$u(x)=\sum_m u_m(x)=\sum_m \frac{|x|^2-1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\alpha^{m-2s}\Delta^s Q_m(x)\alpha^{n/2-1}d\alpha=$$

$$=\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha.$$

Пример 2. Пусть в задаче Дирихле (2)–(3) $Q(x)=x_i$, а значит, $m=1$. Тогда в сумме из формулы (18) или (22) будет только один член при $s=0$. Получаем

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1 \alpha x_i\frac{\alpha^{n/2-1}}{2}d\alpha=x_i\frac{|x|^2-1}{2(n+2)}.$$

Если, с другой стороны, воспользоваться формулой (19), то будем иметь $s=0$, $m=1$ и то же решение:

$$u(x)=x_i\left(-\frac{n}{2n(n+2)}+\frac{n+4}{2(n+2)(n+4)}|x|^2\right)=x_i\frac{|x|^2-1}{2(n+2)}.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре Ω:

$$\Delta v(x)=0, x\in\Omega;\quad v_{|\partial\Omega}=P(x)_{|\partial\Omega}, \tag{23}$$

с полиномиальным граничным значением $P(x)$ и при $n>2$.

Сформулируем утверждение, дополняющее утверждение теоремы 4.

Теорема 5. Решение задачи (23) можно записать в виде

$$v(x)=P(x)-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^{s+1}P(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha. \tag{24}$$

Доказательство. С помощью формулы (22) найдем решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta u(x)=\Delta P(x), x\in\Omega,\quad u_{|x|=1}=0.$$

Имеем

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^{s+1}P(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha.$$

Тогда следующий полином:

$$v(x)=P(x)-u(x)=P(x)-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^{s+1}P(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha$$

является гармоническим, поскольку $\Delta v(x)=\Delta P(x)-\Delta u(x)=0$ и удовлетворяет граничному условию $v(x)_{|x|=1}=P(x)_{|x|=1}$. Решение задачи (23) найдено, и оно имеет вид (24).

Пример 3. Пусть в задаче (23) $P(x)=x_i^2$. Тогда в сумме из формулы (24) будет только один член $s=0$. Поэтому

$$v(x)=x_i^2-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\frac{1}{2}\cdot 2\alpha^{n/2-1}d\alpha=x_i^2+\frac{1}{n}(1-|x|^2).$$

Объединяя теоремы 4 и 5 получим следующее утверждение.

Теорема 6. Решение задачи Дирихле:

$$\Delta u(x) = Q(x), x \in \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega}, \tag{25}$$

в единичном шаре Ω можно записать в виде

$$u(x) = P(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \int\limits_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!} \Delta^s (Q - \Delta P)(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{26}$$

Доказательство. Решение задачи (25) можно разложить на сумму решений двух задач (23) и (2)–(3). Сумма этих решений (24) и (22) и дает искомую функцию (26).

III. Полиномиальные решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона

Рассмотрим следующую обобщенную краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega; P_m\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) u_{|\partial\Omega} = \varphi(s), \quad s \in \partial\Omega, \tag{27}$$

в единичном шаре Ω. Здесь $\partial/\partial\nu$ — производная по направлению внешней нормали к единичной сфере Ω, $P_m(t)$ — многочлен m-й степени с действительными коэффициентами и $t \in \mathrm{R}$. Предположим, что $\varphi \in C(\partial\Omega)$, а $f(x)$ — многочлен произвольной степени.

Пусть $V[f](x)$ — объемный потенциал с плотностью $f(x)$, то есть

$$V[f](x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} E(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{28}$$

где $E(x,\xi)$, как и в (1), элементарное решение уравнения Лапласа.

Рассмотрим некоторый полином $Q(t)$ степени m и $\lambda \in \mathrm{R}$. Запишем $Q(t)$ в виде $Q(t) = \sum_{i=0}^m a_i (t-\lambda)^i$, где $a_i \in \mathrm{R}$. Поставим ему в соответствие другой полином $Q^{(\lambda)}(t)$ степени $m-1$ по формуле

$$Q^{(\lambda)}(t) = \sum_{i=1}^{m-1} a_{i+1}(t-\lambda)^i + a_1 - \frac{a_0}{2\lambda + n - 2}.$$

Ясно, что если λ — корень полинома $Q(t)$, то $a_0 = 0$ и $Q^{(\lambda)}(t) = Q(t)/(t-\lambda)$.

Определение 1. Пусть $P_m(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^k$ — полином из задачи (27). Назовем факториальным полиномом $P_{[m]}(t)$, соответствующим полиному $P_m(t)$, следующий полином: $P_{[m]}(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^{[k]}$, где $t^{[k]} \equiv t(t-1)...(t-k+1)$ — факториальный одночлен.

Обозначим так же $P_{[m]}^{(\lambda)}(t) \equiv P_{[m]}(t)/(t-\lambda)$, где λ — некоторый корень полинома $P_{[m]}(t)$. Введем в рассмотрение множество I неотрицательных целых корней факториального полинома $P_{[m]}(t)$, то есть множество $I = \{k \in \mathrm{N}_0 : P_{[m]}(k) = 0\}$. Справедливо утверждение [7].

Теорема 7. Решение задачи (27) существует тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\lambda \in I \Rightarrow \forall\ H_\lambda(x), \int\limits_{\partial\Omega} H_\lambda(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\Omega} H_\lambda(x) P_{[m]}^{(\lambda)}(\Lambda + 2) f(x) dx, \tag{29}$$

где $H_\lambda(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени λ.

Пример 4. Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = \varphi(s), \quad s \in \partial\Omega. \tag{30}$$

Для нее имеем $m = 2$, $P_m(t) = t^2$, $P_{[m]}(t) = t^{[2]} = t(t-1)$, $I = \{0{,}1\}$, $P_{[m]}^{(0)}(t) = t-1$, $P_{[m]}^{(1)}(t) = t$. Условия разрешимости задачи (30) имеют вид

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x)dx = \int_{\Omega} P_{[m]}^{(0)}(\Lambda+2)f(x)dx = \int_{\Omega} (\Lambda+1)f(x)dx,$$

$$\forall\ i, \int_{\partial\Omega} x_i\varphi(x)dx = \int_{\Omega} x_i P_{[m]}^{(1)}(\Lambda+2)f(x)dx = \int_{\Omega} x_i(\Lambda+2)f(x)dx.$$

Теперь рассмотрим третью краевую задачу в единичном шаре Ω:

$$\Delta u(x) = Q(x), x\in\Omega; \quad \left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + \lambda u\right)_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega} \tag{31}$$

с полиномиальными правой частью $Q(x)$ и граничными данными $P(x)$ и при μ, $\lambda \in \mathrm{R}$. Здесь ν — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Эта задача является частным случаем задачи (27) при $m = 1$ (если $\mu \neq 0$) и $P_m(t) = \mu t + \lambda$. В этом случае $P_{[m]}(t) = P_m(t)$, а поэтому единственный корень многочлена $P_{[m]}(t)$ имеет вид $\lambda_0 = -\lambda/\mu$ и $P_{[m]}^{(\lambda_0)}(t) = \mu$. Поэтому при $\mu \neq 0$ условия разрешимости задачи (31) имеют следующий вид: если $\lambda_0 = -\lambda/\mu \in \mathrm{N}_0$, то для любого $H_{\lambda_0}(x)$ — однородного гармонического полинома степени λ_0 — должно быть выполнено равенство (см. условие (29))

$$\int_{\partial\Omega} H_{\lambda_0}(x)P(x)dx = \mu\int_{\Omega} H_{\lambda_0}(x)Q(x)dx.$$

Решение задачи (31) единственно с точностью до полинома вида $u(x) = V[Q](x) + H_{\lambda_0}(x)$, если $\lambda_0 \in \mathrm{N}_0$. Если $\lambda_0 \notin \mathrm{N}_0$, то решение существует и единственно при любых полиномах $P(x)$ и $Q(x)$. Как же находить это решение?

Теорема 8. Пусть полиномы $Q(x)$ и $P(x)$ разложены по своим однородным составляющим:

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{d} Q_m(x), \quad P(x) = \sum_{m=0}^{d} P_m(x).$$

Решение третьей краевой задачи (31) существует, если при условии $\lambda_0 = -\lambda/\mu \in \mathrm{N}_0$ для любого однородного гармонического полинома $H_{\lambda_0}(x)$ выполнено равенство

$$\int_{\partial\Omega} H_{\lambda_0}(x)P(x)dx = \mu\int_{\Omega} H_{\lambda_0}(x)Q(x)dx.$$

Это решение единственно с точностью до полиномов вида $u(x) = V[Q](x) + H_{\lambda_0}(x)$, где $H_k(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени k. Если $\lambda_0 \notin \mathrm{N}_0$, то решение существует и единственно при любых полиномах $Q(x)$ и $P(x)$. Решение третьей краевой задачи (31) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{m=-2}^{d}\left(\frac{P_{m+2}(x)}{(m+2)\mu+\lambda} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^{k+1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}\Delta^s((\lambda+(m+2)\mu)Q_m(x) - \Delta P_{m+2}(x))}{(\lambda+(m-2s+2k)\mu)(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2{,}2)_{s+2}}\right). \tag{32}$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем пример вычисления решения конкретной задачи:

$$\Delta u(x) = x_3^4, x\in\Omega\subset\mathrm{R}^4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial\nu} + 2u\right)_{|\partial\Omega} = x_1^4x_{2|\partial\Omega}^2$$

по формуле (32) с помощью пакета «Mathematica». Решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{23040}(2880x_1^4x_2^2 + (2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2)(216 - 240|x|^2 + 72|x|^4)+$$
$$+(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 - 4x_3^4)(320 - 240|x|^2) - 60 + 54|x|^2 - 20|x|^4 + 3|x|^6).$$

Доказательство. Условия существования решения задачи (31) следуют из теоремы 7 и обсуждались перед формулировкой этой теоремы. Пусть $u(x)$ — решение задачи (31). В силу теоремы 1 функция $u(x)$ может быть представлена как сумма полинома (6) и некоторой гармонической функции $u_0(x)$. Поскольку $u_0(x)$ представляется в единичном шаре Ω в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда, то функция $u(x)$ в Ω также есть сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$, где $u_k(x)$ — однородные полиномы степени k.

Далее, поскольку на $\partial\Omega$ имеет место равенство $\partial u/\partial\nu = \Lambda u$, где $\Lambda u = \sum_{i=1}^{n} x_i u'_{x_i}$, то задача (31) эквивалентна следующей задаче:

$$\Delta u(x) = Q(x), x \in \Omega; \quad (\mu\Lambda u + \lambda u)_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega}. \tag{33}$$

Нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Lambda u = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sum_{i=1}^{n} x_i u_{x_i} = 2u_{x_jx_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i (u_{x_i})_{x_jx_j} = 2u_{x_jx_j} + \Lambda u_{x_jx_j}$$

и, значит:

$$\Delta\Lambda u = 2\Delta u + \Lambda\Delta u = (\Lambda + 2)\Delta u.$$

Применим оператор $\mu\Lambda+\lambda+2\mu$ к уравнению из (33). Если обозначить $Q_1(x) = (\mu\Lambda+\lambda+2\mu)Q(x)$, то будем иметь

$$(\mu\Lambda + \lambda + 2\mu)\Delta u = \mu(\Lambda + 2)\Delta u + \lambda\Delta u = \Delta(\mu\Lambda u + \lambda u) = Q_1(x)$$

для $x \in \Omega$. Обозначим $v = \mu\Lambda u + \lambda u$. Тогда функция $v(x)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta v(x) = Q_1(x), x \in \Omega; \quad v_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega}.$$

Поэтому в соответствии с теоремой 6 запишем:

$$v(x) = P(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s(1 - \alpha)^s}{(2s + 2)!!(2s)!!}\Delta^s(Q_1 - \Delta P)(\alpha x)\alpha^{n/2-1}d\alpha. \tag{34}$$

Для нахождения функции $u(x)$ необходимо решить уравнение $v(x) = (\mu\Lambda + \lambda)u(x)$. Если разложить полином $v(x)$ по однородным составляющим и вспомнить что функция $u(x)$ тоже есть сумма однородных полиномов

$$v(x) = \sum_{k=0}^{d+2} v_k(x), \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x),$$

то тогда будем иметь

$$\sum_{k=0}^{d+2} v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k\mu + \lambda)u_k(x).$$

Здесь, поскольку $\deg Q_1 \leqslant \deg Q$ и $\deg v \leqslant \max\{\deg P, \deg Q_1 + 2\}$, то имеем $\deg v \leqslant \max\{\deg P, \deg Q + 2\} \leqslant d + 2$. По теореме о единственности разложения функции в ряд Тейлора, при $k\mu + \lambda \neq 0$ будем иметь

$$u_k(x) = \frac{v_k(x)}{k\mu + \lambda}.$$

Если окажется, что $-\lambda/\mu \in \mathrm{N}_0$, то есть при некотором целом неотрицательном k будет $k\mu+\lambda=0$, то в этом случае должно быть выполнено равенство $v_k(x)=0$, иначе $v(x)$ не удовлетворяет уравнению $v(x)=(\mu\Lambda+\lambda)u(x)$ ни при какой $u(x)$. Итак,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{d+2}\frac{v_k(x)}{k\mu+\lambda}. \tag{35}$$

Преобразуем это решение. Рассмотрим простейший случай, когда $Q(x)=Q_m(x)$ и $P(x)=P_{m+2}(x)$ — однородные полиномы. Решение задачи (31) в этом случае обозначим $u^{(m)}(x)$. Промежуточный полином $Q_1(x)$ будет иметь вид

$$Q_1(x)=(\mu\Lambda+\lambda+2\mu)Q_m(x)=(\lambda+(m+2)\mu)Q_m(x).$$

Тогда, в соответствии с формулой (19) и доказательством теоремы 5 решение $v^{(m)}(x)$ из формулы (34) запишется в виде

$$v^{(m)}(x)=P_{m+2}(x)+\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s((\lambda+(m+2)\mu)Q_m(x)-\Delta P_{m+2}(x))\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}.$$

Значит, решение (35) перепишется в форме

$$u^{(m)}(x)=\frac{P_{m+2}(x)}{(m+2)\mu+\lambda}+\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s((\lambda+(m+2)\mu)Q_m(x)-\Delta P_{m+2}(x))\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{((m-2s+2k)\mu+\lambda)(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2,2)_{s+2}}.$$

Заметим, что полином $u^{(m)}(x)$ имеет степень не выше $m+2$. Если теперь просуммировать эти решения $u^{(m)}(x)$ по m от -2 до d, то получим (32). Нетрудно видеть, что $Q_{-i}(x)=0$ и $u^{(-i)}(x)=P_{2-i}(x)/(\lambda+(2-i)\mu)$ для $i=1,\,2$.

Пример 5. Найдем решение следующей задачи:

$$\Delta u(x)=x_i, x\in\Omega;\quad \left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu}+\lambda u\right)_{|\partial\Omega}=x^3_{j|\partial\Omega}.$$

Воспользуемся формулой (32). В ней $Q(x)=x_i, P(x)=x_j^3$ и, значит, внешняя сумма имеет ненулевые слагаемые только при $m=1$, и поэтому $s=0$, а $k=0{,}1$. Решение (32) рассматриваемой задачи имеет вид

$$u^{(1)}(x)=\frac{x_j^3}{3\mu+\lambda}+[(\lambda+3\mu)x_i-6x_j]\left(-\frac{n}{2(\lambda+\mu)n(n+2)}+\frac{(n+4)|x|^2}{2(\lambda+3\mu)(n+2)(n+4)}\right)=$$

$$=\frac{x_j^3}{3\mu+\lambda}+\frac{(\lambda+3\mu)x_i-6x_j}{2(n+2)}\left(\frac{|x|^2}{\lambda+3\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu}\right).$$

Проверим это решение. Легко видеть, что

$$\Delta u^{(1)}(x)=\frac{6x_j}{3\mu+\lambda}+\frac{3\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}x_i-\frac{6x_j}{3\mu+\lambda}=x_i,$$

и поскольку на $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\nu}=\frac{3x_j^3}{3\mu+\lambda}+\frac{(\lambda+3\mu)x_i-6x_j}{2(n+2)}\left(\frac{3}{3\mu+\lambda}-\frac{1}{\lambda+\mu}\right),$$

то тогда будем иметь

$$\mu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\nu}+\lambda u^{(1)}=\frac{3\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}x_j^3+\frac{(\lambda+3\mu)x_i-6x_j}{2(n+2)}\left(\frac{3\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{\mu+\lambda}\right)=x_j^3.$$

Литература

1. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

2. *Карачик В.В., Антропова Н.А.* О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. — 2010. — № 46:3. — С. 384–395.

3. *Бондаренко Б.А.* Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. — Ташкент: Фан, 1984.

4. *Karachik V.V.* Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients // Yokohama Mathematical Journal. — 2000. — N 47. — P. 121–142.

5. *Бицадзе А.В.* К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. — 1990. — № 311:1. — С. 11–13.

6. *Карачик В.В.* Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Математические труды. — 2007. — № 10:2. — С. 142–162.

7. *Карачик В.В.* Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными на границе // Дифференциальные уравнения. — 1996. — № 32:3. — С. 416–418.

Поступила в редакцию 18.03.2011.