УДК 517.946

А.К. Волосова

Московский государственный университет путей сообщения

К теории нелинейной диффузии и теплопроводности

Вычислены собственные числа матрицы системы функциональных линейных уравнений эквивалентной квазилинейному параболическому уравнению и обнаружена связь их с характером поведения решения. Построены точные решения. Предложена альтернативная классификация решений.

Ключевые слова: замена переменных, собственные числа матрицы, классификация решений.

I. Введение

Теория нелинейных процессов переноса и связанная с ней теория нелинейных дифференциальных уравнений активно выстраивалась в течение двадцатого века. Различные аспекты этой теории изложены в [1–8] и подробные ссылки на большое количество других работ, связанные с этой темой, приведены там же. Однако интерес к различным аспектам этой теории выражается в большом потоке работ и сегодня. Преимуществом подхода изложенного в данной работе является возможность провести все вычисления в комплексе программ, построенных с использованием символьных и численных методов и с использованием в будущем принципов параллельных символьных вычислений.

К задачам, связанным с квазилинейным параболическим уравнением (1), мы применяем новый эффективный метод построения точных решений уравнений с частными производными — *метод нефиксированной конструктивной замены переменных*, который предложен в [8–12][1]. Метод основан на новом скрытом свойстве нелинейных уравнений в частных производных, который связан с тем фактом, что они эквивалентны системе линейных функциональных алгебраических уравнений (СФЛАУ).

В данной работе найдены необходимые условия существования «предельного притягивающего» решения. Общий вид собственных чисел для уравнения переноса вычислен в [11, 12].

Они неявно зависят от краевых и начальных условий, если вычислены на точных решениях конкретных смешанных задач. Обнаружена важная удивительная закономерность, связывающая собственные числа СЛАУ и поведение решения соответствующей задачи. Сформулировано утверждение о необходимых условиях характера эволюции решения смешанной задачи относительно «предельного притягивающего» решения. Произвольную замену переменных использовали классики математики для классификации линейных уравнений в частных производных для классификации линейных уравнений, см., например, [2]. Однако они не использовали такие дифференциальные связи, как в работах [8–12], и не провели весь объем вычислений, который проведен в цитируемых работах. Они не заметили обнаруженное в цитируемых работах свойство.

Рассмотрим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными. Тогда одно дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка заменяется системой четырех уравнений первого порядка с частными производными. В работах [8–12], обнаружено, что эта внешне сильно нелинейная система является на самом деле СФЛАУ $AX = b(!)$ и имеет единственное решение.

II. Постановка задачи и основные формулы

Поскольку выкладки при анализе нелинейного уравнения не простые, проще для удобства читателя изложить метод на примере квазилинейного параболического уравнения — уравнения переноса. (Если бы выкладки были тривиальные, то описываемый факт был бы давно известен.)

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0. \qquad (1)$$

Данное уравнение известно как уравнение нелинейной диффузии и теплопроводности, то есть это уравнение переноса. Приведенные в данном пункте формулы справедливы и для функции $F(Z'_x, Z, x, t)$ в (1) до момента вычисления условий разрешимости новой системы. Сделаем произвольную замену переменных:

$$Z(x,t)\big|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = U(\xi,\delta). \qquad (2)$$

[1] См. также www.aplsmath.ru. — сайт «Любителей прикладной математики», http://sites.google.com/site/invproblems/project - updates/2010 — «сайт семинара Р.Г. Новикова, Г.М. Хенкина, А.А. Шананина — где был сделан доклад». Диссертация [8] также выставлена на сайте «Мир дифференциальных уравнений», http://eqworld.ipmnet.ru, в разделе диссертаций.

Обратная замена, хотя бы локально, восстанавливает решение $Z(x,t)$ уравнения (1) по функции $U(\xi,\delta)$: $Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\substack{\xi=\xi(x,t),\\ \delta=\delta(\xi,\delta)}}$.

Предполагается что все функции дважды непрерывно дифференцируемые. Предположим, что якобиан замены переменных $\det J = x'_\xi t'_\delta - x'_\delta t'_\xi \neq \neq 0$ и бесконечности. Тогда существует обратное преобразование, хотя бы локально.

При этом существуют формулы пересчёта производных «старых» переменных x, t, по «новым» ξ, δ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J \frac{\partial \delta}{\partial x},\\ \frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J \frac{\partial \xi}{\partial x}.\end{gathered} \tag{3}$$

Далее введем обозначения (установим дифференциальные связи):

$$\begin{gathered}K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = Y(\xi,\delta),\\ K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{\substack{x=x(\xi,\delta),\\ t=t(\xi,\delta)}} = T(\xi,\delta).\end{gathered} \tag{4}$$

Дифференцируем и получим выражения

$$\begin{gathered}K(U(\xi,\delta))(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}) = Y(\xi,\delta)\det J,\\ K(U(\xi,\delta))(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}) = T(\xi,\delta)\det J.\end{gathered} \tag{5}$$

Уравнение (1) принимает вид

$$T(\xi,\delta) - K(U)\,\frac{\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}}{\det J} + \\ + K(U)F(U) = 0. \tag{6}$$

С необходимостью выполнено соотношение: $\frac{\partial}{\partial t}Z'_x = \frac{\partial}{\partial x}Z'_t$, равенства смешанных производных в переменных ξ, δ. Тогда это соотношение можно записать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{Y}{K(U)}\right] + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left[\frac{Y}{K(U)}\right] - \\ -\frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{T}{K(U)}\right] + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{T}{K(U)}\right] = 0. \tag{7}$$

Вывод очень подробно проведен в [12], заметим только, что при выводе неоднократно применяются (2) – (4). Система четырёх уравнений (5) – (7), на первый взгляд, кажется системой нелинейных уравнений. Однако в цитируемых работах приведено доказательство, что вся система является СФЛАУ относительно производных x'_ξ, x'_δ, t'_ξ, t'_δ.

Теорема 1. Единственное решение СФЛАУ (5) – (7) имеет вид

$$\begin{gathered}x'_\xi = \Psi_1(\xi,\delta), \quad x'_\delta = \Psi_2(\xi,\delta),\\ t'_\xi = \Psi_3(\xi,\delta), \quad t'_\delta = \Psi_4(\xi,\delta). \quad \square\end{gathered} \tag{8}$$

Это новая система, где

$$\Psi_1(\xi,\delta) = (K[-FKU'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - (-TU'_\delta Y'^2_\xi - \\ -TT'_\delta U'^2_\xi + TU'_\delta T'_\xi U'_\xi - YY'_\delta T'_\xi U'_\xi + TY'_\delta Y'_\xi U'_\xi + \\ +YT'_\delta U'_\xi Y'_\xi)])/P_1(\xi,\delta), \tag{9}$$

$$\Psi_2(\xi,\delta) = K[-FKU'_\delta(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - TT'_\xi U'^2_\delta + \\ +YY'_\delta T'_\xi U'_\delta + TT'_\delta U'_\xi U'_\delta - YT'_\delta Y'_\xi U'_\delta + \\ +TY'_\delta Y'_\xi U'_\delta - TY'^2_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta), \tag{10}$$

$$\Psi_3(\xi,\delta) = K[-YY'_\xi + FKU'_\xi + TU'_\xi]\times \\ \times[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta), \tag{11}$$

$$\Psi_4(\xi,\delta) = K[-YU'_\delta + FKU'_\delta + TU'_\delta]\times \\ \times[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta). \tag{12}$$

Здесь обозначено

$$P_1(\xi,\delta) = FK[(TY'_\xi - T'_\xi Y)U'_\delta + (YT'_\delta - TY'_\delta)U'_\xi] + \\ +TY[-U'_\delta T'_\xi + U'_\xi T'_\delta] + Y^2[Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi] + \\ +T^2[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]. \tag{13}$$

Вывод формул приведен в [8–12][2].

Теорема 2. Система (5) – (7) эквивалентна уравнению (1) и может быть записана как СФЛАУ $AX = b$:

$$\begin{pmatrix} YU'_\delta & -YU'_\xi & TU'_\delta & -TU'_\xi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4\end{pmatrix}. \quad \square$$

Здесь вектор $X = (x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta)^\tau$, а вектор $b = (0,0,0,b_4)^\tau$, где $b_4 = K[-YY'_\delta + FKU'_\delta + + TU'_\delta][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]$. Знак τ означает транспонирование.

$$\begin{gathered}a_{21} = -KY'_\delta + YK'(U)U'_\delta, \quad a_{22} = KY'_\xi - YK'(U)U'_\xi,\\ a_{23} = -KT'_\delta + TK'(U)U'_\delta, \quad a_{24} = KT'_\xi - TK'(U)U'_\xi,\\ a_{33} = -YY'_\delta + (FK(U) + T)U'_\delta,\\ a_{34} = YY'_\xi - (FK(U) + T)U'_\xi], \quad a_{44} = P_1(\xi,\delta).\end{gathered}$$

Собственные числа имеют вид

$$\begin{gathered}\lambda_1 = -YY'_\delta + FKU'_\delta + TU'_\delta,\\ \lambda_2 = P_1(\xi,\delta), \quad \lambda_3 = [M - \sqrt{D}]/2,\\ \lambda_4 = [M + \sqrt{D}]/2,\\ M = KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\delta),\\ D = 4YK(Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta) + \\ +[KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\xi)]^2.\end{gathered} \tag{14}$$

Замечание 1. СФЛАУ для уравнения (1) может быть записано и с другой матрицей [12]. Сравнение свойств собственных чисел, приведенное ниже в лемме, показывает, что обсуждаемый вариант теоремы 2 имеет преимущества. Лемма 1 о свойствах собственных чисел приведена ниже.

На втором этапе рассмотрим *новую систему* уравнений первого порядка (8) относительно функций $x = x(\xi,\delta)$, $t = t(\xi,\delta)$. Хорошо известно,

[2] http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html. doi:10.1155./2009/319269. См. также www.aplsmath.ru, и очень подробно в [12].

что условие разрешимости системы такого типа получается вычислением вторых смешанных производных функций $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$ (9) – (12) по аргументам ξ и δ, далее приравниваем эти выражения друг другу согласно равенствам

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi}, \quad t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{15}$$

Таким образом, формально возникают два уравнения разрешимости системы (8). Один из важных результатов работ [8–10] мы коротко перескажем. Доказано, что в двух равенствах (15) всегда имеется общий множитель, то есть вместо двух равенств надо всегда анализировать только одно:

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \delta} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial \xi} = 0, \tag{16}$$

где Ψ_3, Ψ_4 заданы формулами (11), (12).

Это важно, и значительно упрощает процедуру построения решения. В данном случае при детальном анализе условия разрешимости (16) возникает различие между формулами для функций $F(Z)$ и $F(Z'_x, Z, x, t)$.

Это подробно объяснено в [8, с. 83].

Следствие 1. Если какая-то тройка функций U, Y, T удовлетворяет соотношению (16), то соответствующая новая линейная система (8) разрешима. При условии, что якобиан не равен нулю и бесконечности, решение уравнения восстанавливается. Аналогичное утверждение приведено в [8] для квазилинейных эллиптических и квазилинейных гиперболических уравнений с частными производными. Таким образом, вместо двух соотношений разрешимости всегда имеем одно соотношение. Приведенные утверждения демонстрируют некоторое скрытое, ранее неизвестное, свойство квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которое позволяет конструировать новые решения уравнения (1) в параметрической или неявной форме. Открывается возможность вычисления собственных чисел и векторов матрицы СФЛАУ эквивалентной уравнению (1) и провести альтернативную классификацию решений. □

Пример 1. В качестве примера можно привести точное решение задачи Коши со специальными начальными условиями, построенное **методом нефиксированной конструктивной замены переменных** для полулинейных уравнений.

Пусть в (1)

$$K(Z) = 1, \quad \text{а} \quad F(Z) = -Z^2(1 - Z). \tag{17}$$

Решение уравнения с частными производными (1) имеет вид

$$Z(x,t) = \frac{1 - \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2}\right)}{1 + \left(-1 + t + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2}\right)}. \tag{18}$$

□

Здесь удовлетворено условие разрешимости (16) [8–12]. Распределение «стоков» (диссипации) и «источников» таково, что при своей эволюции «предельным притягивающим» решением является некоторая не равная нулю структура. Это пример переключения процесса с одного более интенсивного режима на другой.

Пример 2. Пусть специальное начальное условие для уравнения (1) имеет вид $Z(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая некоторому ОДУ второго порядка, и поэтому она зависит от двух произвольных констант. Здесь верно (17). Тогда решение задачи Коши со специальными начальными данными для уравнения (1) задается формулой

$$t = 2\int\limits_{u_0(x)}^{Z(x,t)} \left(3U^2(1-U) + \sqrt{2}(3U-1)G(x,U)\right)^{-1} dU.$$

Функция $G(x, U)$ определена нелинейным алгебраическим уравнением

$$\frac{1}{2U} + \frac{3x}{2\sqrt{2}} + \frac{3U(U-1)}{2(U^2 - U - \sqrt{2}G(x,U))} + \frac{(1-3U)G(x,U)}{\sqrt{2}U(U^2 - U - \sqrt{2}G(x,U))} - \ln 2 + \ln\left|U^2 - \sqrt{2}G(x,U)\right| - \ln\left|U - U^2 - \sqrt{2}G(x,U)\right| = 0. \quad \square$$

Численное исследование этого уравнения проводится просто. Выразим из него переменную x, стоящую отдельно во втором слагаемом. Получим выражение $x = \Omega(U, G)$. Зададим область изменения переменной $U \in [0, 1]$. Будем задавать значения переменных U, G с некоторым шагом. Выясняется, что значения переменной G, при которых нелинейное алгебраическое уравнение имеет решения, существуют. Например, при значениях $U = 0.05$ переменная G принимает значения на отрезке $G \in [-0.04, 0.02]$; при значениях $U = 0.5$ переменная G принимает значения на отрезке $G \in [-0.16, 0.16]$; при значениях $U = 0.9$ переменная G принимает значения на отрезке $G \in [-0.06, 0.6]$. Далее построенный трехмерный график надо перевернуть, как нам удобно.

III. Связь характера поведения решений уравнения (1) с собственными числами матрицы

Известно, что поведение интегральных кривых в окрестности особой точки дает много информации о поведении решения. К.А. Волосовым был поставлен вопрос о связи вычисленных собственных чисел и следа матрицы $\mathrm{Tr}\, A$ с поведением и эволюцией решений уравнения с частными производными в [11, 12, 14]. Было проанализировано большое количество точных решений (порядка ста) смешанных задач для уравнения (1) и близких к нему уравнений в различных задачах по работам Г.И. Баренблатта, Л.Д. Ландау, Я.Б. Зельдовича, А.С. Калашникова, А.А. Самарского, В.В. Пухначева, С.П. Курдюмова, Л.К. Мартинсона, И.С. Граника, В.В. Галактионова, В.А. Дородницына, С.П. Михайлова, Е.М. Воробьева, Н.В. Змитриенко, С.И. Похожаева, Г.Г. Малинецкого, В.П. Маслова, В.Г. Данилова, К.А. Волосова, Л.Б. Берковича, Р.О. Кершнера, Б.Х. Гилдинга, Г.А. Рудных, Э.И. Семенова, В.Н. Денисова, В.Н. Разжевайкина, А.Д. Полянина, В.Ф. Зайцева, А.В. Вязьмина, А.И. Журова, Д.А. Казенина и других перечисленных в цитируемых работах.

По результатам вычислений собственных чисел, приведенных в теореме 2, предлагается провести альтернативную классификацию решений смешанных задач [11, 12, 14].

1-й случай. В различных разделах теории тепломассопереноса существует класс решений в смешанных задачах для различных конкретных видов уравнений (1), когда при наличии диссипации переносимой величины решение убывает со временем и стремится к нулю при любом значении x при t, стремящемся к бесконечности. Говорят о «стабилизации» решения. В данном и аналогичных случаях, с нашей точки зрения, «предельное притягивающее» решение здесь константа, равная тождественно нулю. Сюда же, с нашей точки зрения, можно отнести периодические решения, хотя данных по ним мало. См. пример в пункте **(c).**

2-й случай. Второй тип решения возникает в смешанных задачах для полулинейных уравнений, рассмотренных в [1], [3]. Для уравнений типа Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, Зельдовича и других доказано, что существует **свое соответствующее**, может быть неизвестное нам, то есть не выписанное как формула, решение задач с предельным профилем бегущей волны с областью изменения $Z \in [a_0, a_1], a_0, a_1 = \mathrm{const}$, которое, с нашей точки зрения, можно считать «предельным притягивающим» решением. Все остальные решения конкретной смешанной задачи с другими начальными данными стремятся к своему соответствующему «предельному притягивающему» решению данной конкретной смешанной задачи. (Данная теория будет развиваться и будет дополнена исследованиями и классификацией результатов важных работ А.М. Ильина – О.А. Олейник, Г.М. Хенкина – А.А. Шананина и многих других — связанных с решениями уравнения типа Бюргерса, приведенных в главе 2 [16].)

3-й случай. Если в смешанной задаче существует стационарное решение, то есть решение не зависящее от переменной t — времени, то другие решения, которые отличаются начальными данными, эволюционируют к стационарному решению. Его, с нашей точки зрения, можно считать «предельным притягивающим» решением.

На основе результатов проведенных вычислений мы объединяем эти три случая вместе. Поскольку вывод формул собственных чисел был сделан для произвольной замены переменных, то в данном пункте мы можем конкретизировать вид замены. Сделаем замену в конечных формулах собственных чисел

$$x = x(\xi, \delta) = \xi,$$
$$t = t(\xi, \delta) = \delta,$$
$$Z(x,t)|_{x=\xi, t=\delta} = U(\xi, \delta).$$

Решение переходит само в себя, уравнение переходит само в себя. Якобиан такой замены равен единице. Поскольку замена тривиальная, дифференциальные связи (4) имеют вид

$$Y(\xi, \delta) = U'_\xi, T(\xi, \delta) = U'_\delta.$$

Тогда все полученные в теореме 2 выражения для собственных чисел матрицы можно поставить в соответствие исходному уравнению (1).

Справедлива лемма.

Лемма 1. Собственное число $\lambda_2 = -(\lambda_1)^2$ всегда отрицательное. Собственное число $\lambda_3 \leqslant 0$, если $M \leqslant 0$ и если $M > 0$, то должно быть выполнено неравенство

$$K^3 Z'_x \frac{\partial}{\partial x}(Z'_t / Z'_x) \geqslant 0. \qquad \Box$$

Краткий комментарий к доказательству. Комбинируя формулы теоремы 2 и уравнение (1), получим первое утверждение. Если $M \leqslant 0$, то $\lambda_3 \leqslant 0$, что очевидно. Если $M > 0$, то если мы хотим, чтобы собственное число было не положительным $\lambda_3 \leqslant 0$, то необходимо выполнение неравенства $M^2 \leqslant D$. Из последнего следует утверждение леммы 1. После тривиальной замены на известных решениях задач вышеперечисленных авторов мы вычислили значения собственных чисел и следа матрицы по формулам теоремы 2. Были обнаружены удивительные закономерности. Полученное совпадение результатов нельзя считать случайностью.[3]

[3] Обсуждая вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, академик РАН В.И. Арнольд сказал: «... математика — это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей». Здесь можно только добавить, что стоимость математического эксперимента значительно выше, чем это оценил В.И. Арнольд. Во-первых, нужна идея, которая приходит в голову далеко не каждому. Во-вторых, нужно много труда и усидчивости для доведения нетривиальных расчетов до логического конца. В-третьих, нужно осознать и обобщить результаты примеров и понять, что речь идет не об ошибках вычисления, а о математической закономерности, математическом открытии. Еще нужно иметь крепкую нервную систему, чтобы довести до коллег полученные результаты [12].

Будем называть «предельным притягивающим» решением известное или неизвестное решение $\Omega(x,t)$ смешанной задачи для уравнения (1), то есть решение задачи Коши со специальными начальными данными и краевыми условиями, к которому эволюционирует, стремится в некотором смысле функция $Z(x,t)$ — другое решение той же задачи. Функция $Z(x,t)$ является другим решением той же задачи с другими начальными данными. Далее рассмотрим характерные примеры, в которых решение задачи и его свойства заранее известны.

(a) Решение полулинейного уравнения Зельдовича, возникающего в теории горения, приведено в [3], [10]. Здесь $K(Z)=1$ и функция $F(Z)$ определена в (17). Это решение задачи Коши со специальными начальными условиями описывает решение типа бегущей волны для двух независимых переменных и имеет вид

$$Z(x,t)=(1+\exp(-t/2-x/\sqrt{2}))^{-1} \quad , \qquad (19)$$

то есть это решение уравнения в частных производных и соответствующего ОДУ. Про это решение известно, что оно близко к профилю «предельной» волны в окрестности значений $Z(x,t)$, близкой к единице. Делаем указанную выше тривиальную замену переменных. Получим кратные собственные числа:

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_3=0,$$
$$\lambda_4=(\operatorname{sech}(\rho/2))^4(\sqrt{2}-4\sinh(\rho/2))/64, \quad |\lambda_4|<1.$$

Здесь введено обозначение $\rho=t+x\sqrt{2}$. При некоторых значениях переменной $\rho>\rho_0$ функция принимает отрицательные значения. Именно в этой области функция $Z(x,t)$ принимает значения, близкие к единице.

В [3] и в других работах давно показано, что исследуемое решение стремится к «предельному притягивающему» решению — выходит на предельную волну при $t\to\infty$, там же, где след матрицы $\operatorname{Tr}A=\lambda_4\leqslant 0$.

Замечание 2. Здесь можно привести ещё одно соображение. Пусть верно (17). Если убрать из уравнения (1) вторую производную, то соответствующее ОДУ имеет две неподвижных стационарных точки: $Z=0$, $Z=1$. Точка $Z=1$ устойчивая.

(b) Рассмотрим уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера [1, 6, 13], [13, с. 236].

Оно следует из (1), если положить $F(Z)=-Z(1-Z)$, $K(Z)=1$.

Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями описывает решение типа бегущей волны для двух независимых переменных и имеет вид [7, 13]

$$Z(x,t)= \\ =(\exp(5t/6+x/\sqrt{6}))/(1+\exp(5t/6+x/\sqrt{6}))^2. \qquad (20)$$

Это решение уравнения с частными производными и соответствующего ОДУ. Про него известно, что оно хорошо описывает профиль «предельной» волны в окрестности значений Z, близкой к единице. Сделаем вышеуказанную тривиальную замену переменных. Уравнение и решение переходит само в себя. Находим собственные числа. Получим

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_3=0,$$
$$\lambda_4= \\ =\exp(2\rho)\,\frac{6+9\exp(\rho)+5\sqrt{6}\exp(2\rho)-3\exp(3\rho)}{9(1+\exp(\rho))^6}.$$

Здесь введено обозначение $\rho=5t/6+x/\sqrt{6}$. Здесь и во всех аналогичных случаях поведение $\operatorname{Tr}A$ такое же, как в пункте **(a)**. След матрицы меняет знак в области определения. В работах, ссылки на которые приведены в [8], было проведено исследование и показано, что на множестве где $\operatorname{Tr}A=\lambda_4\leqslant 0$, исследуемое решение стремится к «предельному притягивающему» решению — к волне с «предельным» профилем. Здесь также справедливо **замечание 2**.

(c) Классическое описание процесса диффузии и теплопроводности связано с линейным параболическим уравнением, которое следует из (1), если положить $F(Z)=\gamma Z$, $K(Z)=1$. Если $\gamma>0$, то такое слагаемое описывает диссипацию («сток») переносимой величины. Если $\gamma<0$, то такое слагаемое описывает «источник». Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных хорошо известна и имеет вид

$$Z(x,t)=\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\gamma t)\right]\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \qquad (21)$$

и приведена, например, в [2]. В данном случае (1-й случай альтернативной классификации), с нашей точки зрения, роль «предельного притягивающего» решения играет константа, тождественно равная нулю. Обычно в таких задачах другие авторы говорят о растущем или убывающем решении. Существует огромный цикл работ В.В. Жикова, В.Н. Денисова и других по построению априорных оценок с целью выявления условий поведения решения. Ссылки на авторов этих работ приведены [8, 12, 15].

В данном примере поведение решения очевидно и определяется знаком коэффициента γ. Как и выше, сделаем тривиальную замену переменных. Получим выражения для собственных чисел

$$\lambda_1=\frac{(2t+4\gamma t^2+x^2)\exp\left(\dfrac{-2\gamma t-x^2}{2t}\right)}{32\pi t^4}.$$

В данном конкретном случае пункта **(c)** окончательное выражение имеет вид

$$\lambda_2=-\frac{(2t+4\gamma t^2+x^2)^2\exp\left(\dfrac{-4\gamma t-x^2}{t}\right)}{1024\pi^2 t^4}.$$

Собственные числа $\lambda_3 \leqslant 0$, $\lambda_4 > 0$ вычисляются, имеют вид (14), и окончательные громоздкие формулы мы не приводим. Обсудим полученный результат при $\gamma > 0$. Все собственные числа вещественные вне некоторой области в окрестности точки $t = 0$. Важно, что собственные числа λ_2, λ_3 неположительные и по модулю меньше единицы. След матрицы меняет знак в области определения собственных чисел, которые на самом деле являются функциями. В данном случае, если проводить аналогию с динамическими системами, такая особая точка при фиксированном значении независимых переменных x_0, t_0 является сложной и называется «устойчивый седло-узел». Её параметры (направление собственных векторов) непрерывно меняются в каждый момент времени и точке пространства, но тип точки сохраняется. Решение задачи Коши в случае наличия диссипации «расплывается» и убывает по амплитуде, то есть притягивается к нулю $Z(x,t) \to 0$ для любого значения x при $t \to \infty$.

Если сменить знак $\gamma < 0$, то оказывается, что собственные числа λ_2, λ_3 определены не при всех значениях независимых переменных. Дискриминант $D < 0$ в некоторых областях. Очевидно, что решение (21) в этом случае «отталкивается» от нуля, то есть возрастает, во всех точках x при $t \to \infty$. Для более сложных решений получаем аналогичные результаты.

О периодических решениях.

В этой работе в дополнении к [12] мы провели вычисления для периодических решений. Приведем один характерный пример периодического решения линейного параболического уравнения, рассмотренный в данном пункте $F(Z) = \gamma Z$, $K(Z) = 1$ в (1). Периодическое комплексное решение в данном случае имеет вид

$$Z(x,t) = C_1 \operatorname{Sin}(\omega t + kx) + C_1 \frac{k^2 + \gamma}{\omega} \operatorname{Cos}(\omega t + kx), \quad \gamma = -k^2 \pm i\omega.$$

Вычисление собственных чисел на этом решении дает следующий результат:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_4 = -ik^2 C_1 \exp(-i\omega t - ikx) + C_1^2 k\omega \exp(-2i\omega t - 2ikx).$$

В этом случае знак в области определения меняет реальная часть следа матрицы А.

(d) Рассмотрим уравнение Фитц–Хью–Нагумо–Семенова, возникающее в задачах моделирования цепных реакций и задачах переноса в биологии. Уравнение следует из (1), если положить

$$F(Z) = -Z(1 - Z^2), \quad K(Z) = 1.$$

Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных имеет вид [7]

$$Z(x,t) = \frac{1 - \exp(-x\sqrt{2})}{1 + \exp(-x\sqrt{2}) + \exp\left(-\frac{3t}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (22)$$

В [8, с. 66] методом *нефиксированной конструктивной замены переменных* построено расширенное семейство таких решений, которое исследовано численными методами. Получим выражения для собственных чисел:

$$\lambda_1 = (-3\exp(3t - 3x/\sqrt{2}))/P_0^3,$$
$$\lambda_2 = (-9\exp(6t + 3x\sqrt{2}))/P_0^6.$$

Собственные числа λ_3, λ_4 вычисляются, но имеют вид (14), и мы их формулы не приводим. Функция $\lambda_3 \leqslant 0$ во всей области определения. Здесь введено обозначение

$$P_0 = \exp\left(\frac{3t}{2}\right) - \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \exp\left(\frac{3t}{2} + x\sqrt{2}\right).$$

Все собственные числа вещественные и по модулю меньше единицы. Легко видеть, что собственные числа λ_1, λ_2, λ_3 отрицательные. Собственное число λ_4 положительное. В данном случае особая точка — также «устойчивый седло-узел». Численное исследование большого количества представителей семейства решений задачи Коши с различными начальными условиями, заданными в полосе $Z \in [-1, 1]$, показывает, что все они при эволюции стремятся к «предельному притягивающему» решению [12]. След матрицы меняет знак.

(e) Приведем пример еще одного решения из теории горения, связанного с уравнением, которое найдено в [8, 11, 12] методом нефиксированной конструктивной замены переменных. Полезно сравнить результаты этого пункта с анализом (19). В примере 1 положим (17), формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями имеет вид (18). В данном случае эта функция не является решением типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными. Исследования показывают, что функция (18) стремится к «предельному притягивающему» решению. Сделаем тривиальную замену переменных, как и выше. Все собственные числа вычисляются: λ_1 — положительная функция, λ_2, λ_3 — отрицательные функции, λ_4 меняет знак. След матрицы — вещественная функция и меняет знак. Подводя итог примерам, можно сформулировать утверждение о необходимых условиях эволюции решения уравнения с частными производными к «предельному притягивающему» решению.

Утверждение 1. Пусть вычислены собственные числа матрицы СФЛАУ, эквивалентной уравнению (1) в теореме 2. Пусть $\Omega(x,t)$ — известное или неизвестное решение квазилинейного параболического уравнения (1), которое является «предельным притягивающим» решением, оно может быть и тождественным нулем. Пусть сделана замена переменных (2) и установлены дифференциальные связи (4), где в окончательных формулах теоремы 2 эта замена принимает конкретный тривиальный вид:

$$x = x(\xi, \delta) = \xi, \quad t = t(\xi, \delta) = \delta,$$
$$Z(x, t)|_{\substack{x=\xi,\\ t=\delta}} = U(\xi, \delta).$$

Тогда если с необходимостью дискриминант $D \geqslant 0$ и собственные числа матрицы A $\lambda_2 \leqslant 0$, $\lambda_3 \leqslant 0$ в некоторой области $\omega_1(x,t)$, а вещественная часть следа матрицы $\operatorname{Tr} A$ меняет знак в области определения, то выполнен в некотором смысле, конкретном для каждой задачи, предел $Z(x,t) \to \Omega(x,t)$ для любого значения x в некоторой области $\omega_1(x,t)$ при $t \to \infty$, то есть стремится в некотором смысле к «предельному притягивающему» решению. □

Замечание 3. Мы разделяем два вопроса.
А. Каковы необходимые условия существования «предельного притягивающего» решения?
Б. Как осуществляется предельный переход к «предельному притягивающему» решению?

В утверждении мы не пишем норму, так как этот предел, как известно, в каждой конкретной задаче надо понимать по-своему. В каждой задаче есть предположение: в каких условиях на гладкость и рост функции, в каких пространствах это решение существует. На конкретных решениях, при численном вычислении конкретных формул в условиях утверждения 1 такое соотношение выполняется. Именно этот факт и установлен поставленным и описанным в данной работе математическим экспериментом [12]. В статье дается ответ только на первый вопрос. Подобное утверждение можно сформулировать для случая многих независимых переменных при некоторых дополнительных предположениях. Гипотеза сформулирована для не локализованных решений. Расчеты, выполненные на известных локализованных решениях, взятых их работ вышеперечисленных авторов, показывают, что утверждение верно внутри области локализации (см. примеры в параграфе 2.8 в [12]).

Ясно, что теория может быть применима к широкому классу уравнений и систем. Отметим, что существует большой цикл работ А.В. Романова [15], Д.А. Камаева, Mallet–Paret Baek и других авторов, ссылки на которых можно найти в [15], и где изучалась конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных диссипативных параболических уравнений и предельная динамика решений таких уравнений. Методами функционального анализа в этих работах выясняется, каким образом осуществляется предельный переход от начальных данных к аттрактору. Ссылки на эти работы есть также в [8, 16]. А.В. Романов ознакомился с материалом и назвал результаты данной работы «привлекательными и много обещающими».

Другим широко представленным в [17] циклом работ является теория локализации предельных множеств в динамических системах посредством функционалов Ляпунова. В этих работах предложена единая методика исследования устойчивоподобных свойств решений динамических процессов, основанная на теоремах о локализации предельного множества.

Автор выражает благодарность В.П. Маслову, А.С. Братусю, М.В. Карасеву, В.М. Хаметову, Л.К. Мартинсону, В.Г. Данилову, С.Ю. Доброхотову, В.В. Жикову, В.Н. Денисову, А.А. Давыдову, Б.И. Сулейманову, В.Ф. Зайцеву, Е.М. Воробьеву, Р.Г. Новикову, Г.М. Хенкину, А.А. Шананину, А.В. Романову за обсуждения и полезные советы.

Литература

1. *Колмогоров М.В., Петровский И.Г., Пискунов И.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. – 1937. – Т. 1, вып. 6. – С. 1–25.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

3. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.В., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980. – 478 с.

4. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 376 с.

5. *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика. – М.: Изд. Едиториал УРСС, 2004. – 263 с.

6. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983.

7. *Ablowitz M.J., Zeppetella A.* Explicit Solutions of Fisher's equation for a Special Wave Speed // Bulletin of Math. Biology. – 1979. – V. 28. – P. 835–840.

8. *Волосов К.А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами: диссер. д-ра ф.-м.н. – М.: МИЭМ, 2007. – 263 с.

9. *Волосов К.А.* Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме // Доклады РАН. – 2008. – Т. 77, вып. 1. – С. 1–4.

10. *Волосов К.А.* Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11, вып. 2(34). – С. 29–39.

11. *Volosova A.K., Volosov K.A.* Construction solutions of PDE in parametric form // International Journal of Mathematics and Mathematical

Siences. – V. 2009, Article ID. – 319268, 17 p. doi:10.1155/2009/319268.

12. *Волосов К.А., Вдовина Е.К., Волосова А.К.* Новые точные решения уравнений с частными производными параболического вида. – М.: МИИТ, 2010. – 132.

13. *Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998.

14. *Волосов К.А., Синицын С.О., Волосова А.К., Вдовина Е.К.* Стохастическая система полумаятников под воздействием периодического и белого шума и альтернативная классификация решений уравнений с частными производными // Третья международная конференция по нелинейной динамике. Харьковский политехнический институт, при поддержке Института механики национальной Академии наук Украины. – Харьков: ХПИ. – 21–24 сентября 2010.

15. *Романов А.В.* Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений // Матем. сб. – 2000. – Т. 191, вып. 3. – С. 99–112.

16. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А.* [*и др.*] Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / под редакцией А.В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. http://zoneos.com/traffic/

17. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными парамерами. – М.: КомКнига, 2007. – 316 с.

Поступила в редакцию 08.12.2010