УДК 332.13, 338.48, 656.02

П.П. Бобрик

Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН

Обоснование гравитационной модели транспортных корреспонденций при помощи закона убывающей предельной полезности

В статье исследуется связь между поведенческими реакциями экономического типа и часто возникающими на практике примерами пространственного распределения транспортных корреспонденций.

Ключевые слова: транспорт, гравитационная модель, закон убывающей предельной полезности, полезность поездки.

I. Транспортная активность

Рассмотрим модель, где из некоторой точки отправления v совершается $A = \mathrm{const}$ поездок в единицу времени в некоторое конечное число пунктов u_i, $i = 1, \dots n$. Каждая поездка происходит по маршруту (v,u_i,v) без попутного посещения других пунктов. При этом будем предполагать, что каждая точка u_i посещается равномерно через некоторый период времени T_i.

Если обозначить переменной ν_i долю потока из точки v в точку u_i, то

$$T_i = \frac{1}{A\nu_i}.$$

Величина A является внешним параметром модели, которая определяется не из каких-то вычислений, а исходя исключительно из специфики реальной исследуемой транспортной системы. Она является характеристикой транспортной активности в точке v.

В общем случае движение из точки v полностью описывается последовательностью времен отправлений, времен прибытий с указанием точки прибытия и времен возврата с точку v. Далее в статье будет предполагаться, что время в пути до точки u_i пренебрежимо мало по сравнению с интервалом T_i между поездками. Это позволяет в первом приближении рассматривать лишь такие расписания движения, которые задаются только временами отправления, то есть движение до точки и возврат обратно в модели происходит мгновенно.

Хотя A предполагается постоянной величиной, но из этого, вообще говоря, не следует, что транспортные средства должны выходить из пункта v равномерно через одинаковые промежутки времени с интервалом $T = 1/A$. Например, первая машина вышла через треть периода, а вторая — через две трети. Тогда всего за период выйдет две машины. Т. е. величину A скорее надо понимать как некоторую усредненную по времени интенсивность исходящего потока.

II. Гравитационная модель

Для того чтобы полностью определить динамику рассматриваемой модели, требуется определить множество периодов $\{T_i\}$, $i = 1, \dots n$ посещений каждой точки u_i. Или, что равносильно, частоты ν_i ее посещения. В данной модели предлагается это сделать при помощи широко распространенной как в теории, так и при практических исследованиях гравитационной модели. См., например, [3, 4].

В разных источниках под ней понимаются хотя и похожие, но все-таки порой отличающиеся друг от друга формулы в зависимости от решаемой задачи. Поэтому приведем точные формулировки, которые далее будут использоваться в данной статье.

Обозначим символом n_i численность населения пункта u_i, и пусть время пути из пункта v в пункт u_i равно $t_i = t(v,u_i)$. Присвоим каждому пункту u_i вес по формуле

$$m_i = \frac{n_i}{(t_i)^2},$$

и пусть $M_v = \sum_i m_i$ — сумма всех весов пунктов корреспонденций из точки v.

Будем предполагать (и это и является сутью гравитационной модели), что поездки из пункта v распределяются по остальным пунктам таким образом, чтобы доля ν_i поездок в точку u_i была бы равна

$$\nu_i = \frac{m_i}{M}.$$

Отметим, что в таком виде (есть и другие формулировки [5, 6]) гравитационная модель указывает, как делится исходящий поток по пунктам назначения, но ничего не говорит о том, какой должна быть сама интенсивность A.

Гравитационная модель является эмпирическим наблюдением над реальными потоками. Но ее точность невелика. Порой ошибки, особенно на малодеятельных направлениях, могут достигать сотен процентов.

Но тем не менее пока ничего лучше не существует. При этом модель была апробирована в большом числе исследований, и для большинства из них она оказалась лучшим первым приближением. К тому же ошибки, как правило, ложатся в разные стороны от теоретических формул, то есть в среднем по многим экспериментам гравитационная модель является намного более точной. Поэтому, несмотря на ее значительные погрешности, она де-факто является стандартом.

Более того, она сама начала выступать как эмпирическое наблюдение, результат непосредственного опыта. Поэтому те теоретические рассуждения, которые будут противоречить ей, скорее всего надо признать неверными, как не соответствующие объективной реальности. И наоборот, те, которые хорошо согласуются с ней, получают дополнительное подтверждение своей адекватности.

В данной статье гравитационная модель используется для определения интенсивностей потоков к пунктам посещения для рассматриваемой идеальной модели. Но целью статьи является получение тех же формул, исходя из более общих законов человеческого поведения. Например, исходя из экономической целесообразности.

III. Закон убывания предельной полезности

В настоящее время не существует общепризнанного теоретического обоснования гравитационной модели, исходя из каких-либо поведенческих закономерностей. Отчасти такая ситуация сложилась по причине трудности и неоднозначности оценки экономических результатов большинства поездок, которые могут быть совершены, например, в личных целях. Но то, что распределение корреспонденций должно порождаться (по крайней мере, в среднем по всему множеству поездок) более простыми поведенческими стереотипами, прежде всего экономическими — весьма вероятно.

В статье предлагается объяснить распределение транспортных потоков исходя из хорошо известного экономического закона убывающей предельной (marginal) полезности продуктов. Будет строго определено понятие полезности поездки, и в соответствии с ним потоки будут выбираться так, чтобы полезность от совокупности всех поездок за период была бы наибольшей. Другими словами, гравитационная модель будет являться экстремальным решением исходя из некоторого общего принципа.

Напомним, что в соответствии с законом убывания предельной полезности предельная полезность от каждой новой порции продукции или услуг снижается. Самая распространенная популярная интерпретация этого закона заключается в том, что полезность каждого следующего бутерброда меньше предыдущего.

В такой формулировке закон является неким принципом, а не строгим детерминированным соотношением. Требуется строго определить факторы, от которых зависит полезность поездки, а также сам вид функции полезности, чтобы его можно было бы использовать в вычислениях. При этом функция полезности должна подбираться так, чтобы в результате выполнялась бы классическая гравитационная модель транспортных корреспонденций.

IV. Полезность поездки

Качество жизни как набор удовлетворяемых потребностей является во многом гуманитарным понятием, не допускающем однозначного формализованного определения [1, 2]. Оно также является субъективным, то есть различным для разных личностей при одних и тех же внешних условиях. Понимая ограниченность любого подхода к этому определению, предложим собственную трактовку, которая имеет своей целью оценку зависимости качества жизни от пространственного местоположения.

Прежде всего определим, зачем совершаются поездки.

Будем считать, что удовлетворение тех или иных потребностей человека происходит только в результате контактов с другими людьми. При этом чем больший доход имеет человек, с которым контактируют, тем больше услуг и (или) более качественные услуги он может оказать. Поэтому ценность контактов при посещении точки u_i тем больше, чем выше доходы d_i населения на территории, а также чем больше число n_i проживающих или посещающих данную территорию людей.

Отметим, что при таком подходе многие необитаемые территории в виде лесов, парков, полей, дорог и даже озер также будут являться полезными для поездок, если там систематически появляются люди.

Далее. В соответствии с законом убывания предельной полезности, чем чаще посещается то или иное место, тем меньше полезности эта поездка приносит. Другим словами, полезность поездки тем выше, чем реже посещается место u_i или чем больше период его посещения T_i.

Оставляя за скобками вопросы, как была получена требуемая зависимость, будем предполагать в статье, что предельная полезность поездки r_i в точку u_i (то есть полезность только от одной последней поездки, без учета полезности предыдущих поездок) прямо пропорциональна корню квадратному от произведения численности населения, дохода населения и периода посещения:

$$r_i = C\sqrt{n_i d_i T_i}.$$

Здесь C — некоторый коэффициент пропорциональности, постоянный для всех точек посещения u_i, который выбором величин размерностей положим равным единице.

Чем выше предельная полезность r_i в точке, тем более желательна поездка к ней и тем более продуктивной будет сама поездка. Специально отметим, что предельная полезность поездки r_i при таком подходе не является величиной с денежной размерностью, а это, скорее, некоторый интегральный усредненный показатель.

Поскольку предельная полезность посещения каждого пункта растет со временем, то рано или поздно наступит такой момент, когда посещение данного пункта станет самым выгодным вариантом. Это значит, что, выбирая в качестве поведенческой реакции критерий максимальной полезности поездки, все пункты будут посещаться.

И наконец, отметим, что при таком определении полезности закон уменьшающейся предельной полезности выполняется также и для параметров численности населения n_i, и дохода населения d_i.

Далее от благ, которые позволяет получить поездка, перейдем к рассмотрению затрат, которые требуется для этого понести.

V. Выбор поездок

Отличительной особенностью данного подхода является тот факт, что для повышения уровня жизни недостаточно увеличивать предложение тех или иных товаров или (и) услуг. Надо еще обеспечить подъезд до мест их доступности.

Ранее были сделаны предположения, что полезность от поездки пропорциональна трем факторам: численности населения n_i, доходу населения d_i и периоду посещения T_i. Однако чтобы получить эту полезность, следует доехать до пункта назначения, что требует затратить некоторое время $t_i = t(v,u_i)$.

Рассматривая при таком подходе поездку как обычное экономическое действие, мы получаем, что удельная на единицу времени поездки предельная полезность e_i этой операции должна быть равна отношению выгоды от поездки к затратам на ее приобретение:

$$e_i = \frac{r_i}{t_i} = \frac{\sqrt{n_i d_i T_i}}{t_i}.$$

Далее величину e_i будем называть просто удельной полезностью.

В соответствии с экономическим правилом максимизации полезности всего множества поездок они должны совершаться с такими периодами T_i, что удельная полезность от посещения каждого пункта была бы равной:

$$e_i = K = \text{const}\,,\ i = 1,\ \ldots,\ N.$$

Тем самым показатель $K = K(v)$ является характеристикой пункта v. Главными отличиями этого показателя от других, известных в литературе показателей транспортной доступности, являются учет фактора доходов населения, а также зависимость от периода посещения. Это позволяет объяснить ряд наблюдаемых на практике явлений. Например, замыкание значительной доли транспортных коммуникаций в богатых областях.

Покажем, что подобные предположения приводят к гравитационной модели корреспонденций.

VI. Обоснование гравитационной модели

Делая необходимые преобразования в выражении для удельной полезности e_i, получаем следующую формулу для периода посещения:

$$\sqrt{n_i d_i T_i} = K t_i$$

и

$$T_i = \frac{(K t_i)^2}{n_i d_i}.$$

Поскольку период посещения обратно пропорционален доли поездок до пункта u_i из пункта v, то

$$A\nu_i = \frac{n_i d_i}{(K t_i)^2}.$$

Или, по-другому, доля поездок до пункта u_i с точностью до постоянного множителя обратно пропорциональна квадрату времени поездки t_i и прямо пропорциональна общему доходу пункта:

$$\nu_i = \frac{1}{AK^2}\frac{n_i d_i}{t_i^2} = \frac{1}{AK^2}\frac{n_i d_i}{t_i^2}.$$

Если мы положим $d_i \equiv D$ для всех пунктов одинаковым, что означает, что все люди равны по своей коммуникационной полезности (в гравитационной модели люди вообще не различаются по доходам), то доли поездок получаются такими же, как если бы они рассчитывались в соответствии с гравитационной моделью:

$$\nu_i = \frac{D}{AK^2}\frac{n_i}{t_i^2} = \frac{1}{M}\frac{n_i}{t_i^2},$$

где $M = \frac{AK^2}{D}$ — константа, равная сумме всех весов точек корреспонденций в гравитационной модели.

Другими словами, гравитационная модель является частным случаем предложенной в данной работе поведенческой модели распределения потоков.

VII. Пример

Рассмотрим простейшую транспортную систему, состоящую их трех точек, как показано на рис. 1. Левый пункт будем считать первым, правый — третьим.

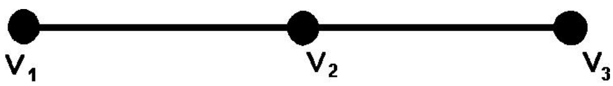

Рис. 1. Простейшая транспортная сеть из трех узлов

Будем предполагать, что времена движения в смежную вершину равны единице, численности населенных пунктов равны единице, доходы населения также во всех узлах равны единице. Исходящий поток из всех вершин равен единице.

1. Рассчитаем вначале потоки из среднего узла.

Веса обоих вершин корреспонденций равны

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{1} = 1,\ M = 2.$$

Соответственно равны доли поездок в левый и правый узел:

$$\nu_1 = \nu_3 = 0{,}5.$$

Это означает, что в первый период времени одна машина идет в левый пункт, а во второй период — в правый. Далее поездки повторяются.

В этом случае периоды посещений также равны между собой и равны 2:

$$T_1 = T_3 = \frac{1}{\nu_i} = 2.$$

Удельные полезности поездок снова равны в обоих случаях

$$e_1 = e_3 = \frac{\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142.$$

Таким образом, коэффициент K для центральной точки приблизительно равен 1,41.

2. Рассмотрим теперь потоки из левого узла. Для правого узла ввиду симметрии системы формулы будут аналогичны.

Веса узлов равны соответственно

$$m_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad m_3 = \frac{1}{2^2} = 0{,}25,$$

$$M = m_1 + m_3 = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Доли потоков равны

$$\nu_2 = \frac{4}{5}, \quad \nu_3 = \frac{1}{5}.$$

Периоды посещения

$$T_2 = \frac{5}{4}, \quad T_3 = 5.$$

Таким образом, второй узел будет посещаться в четыре раза чаще третьего, хотя времена подъезда отличаются всего в два раза.

Полезности поездок будут равны

$$e_2 = \frac{\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 1{,}25}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx \frac{2{,}236}{2} = 1{,}118,$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx \frac{2{,}236}{2} = 1{,}118.$$

Таким образом, коэффициент окружения для граничных точек сети равен приблизительно 1,118.

Сравнивая коэффициенты окружения между собой можно сделать вывод, что при одних и тех же предположениях только за счет своего местоположения общественная эффективность транспортного сообщения в центре будет на 0,296, то есть почти на треть выше, чем на окраинах.

Это позволяет с качественной точки зрения объяснить, почему жилье в центре городов, как правило, дороже, чем на периферии.

Отметим, что для количественного предсказания должного разброса цен на различные объекты, например на недвижимость, надо дополнительно учитывать другие факторы, в том числе и не транспортного характера.

VIII. Выводы

В предложенной работе изучались поведенческие реакции выбора направлений поездок, основанных на экономическом законе убывания предельной полезности. Показано, что один из частных случаев функционирования подобных систем приводит к широко распространенной на практике гравитационной модели корреспонденций.

Литература

1. *Байсеркеев О.Н., Бугроменко В.Н.* Региональная пространственно-временная среда. — Алмааты: Рауан. — 1993. — 243 с.

2. *Тархов С.А.* Эволюционная морфология транспортных сетей. — Смоленск: Универсум, 2005. — 384 с.

3. *Бобрик П.П.* О преимуществе треугольной топологии сети над квадратной // Транспорт: наука, техника, управление. — 2005. — № 3. — С. 32–34.

4. *Agassiant A. A, Strelnikov A.I.* Rational Development of urban transportation systems, with due consideration given to environmental protection. — M., 1989. — 97 p.

5. *Стенбринк П.А.* Оптимизация транспортных сетей. — М.: Транспорт,1981.

6. *Вильсон А.* Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 15.10.2010.