

*К.К. Глухарев<sup>1,2</sup>, Н.М. Улюков<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)

## К теории автомобильных потоков

Рассматривается цепочка движущихся друг за другом автомобилей в однорядной полосе. Автомобили представляются точечными частицами, которые взаимодействуют с соседними в соответствии с законом безопасной дистанции. Формулировка закона безопасной дистанции основывается на известных данных наблюдения за автомобильными потоками [1]. Выводятся дифференциально-функциональные уравнения потока частиц. Строится решение уравнений потока частиц. При этом учитываются следующие обстоятельства. 1. Каждая внутренняя частица в цепочке одновременно является как лидером для следующей частицы, так и преследователем предыдущей частицы. 2. Гладкие траектории автомобилей приближённо могут представляться кусочно-линейными неубывающими функциями (запрещено движение «назад»). 3. Алгоритм смены скорости преследователя исходит из критерия подержки безопасной дистанции. Приводятся результаты численного интегрирования уравнений, иллюстрирующие типовые потоковые явления. Формулируются направления сетевого развития теории дискретного потока.

**Ключевые слова:** транспортные потоки, дискретные потоки, закон безопасной дистанции, дифференциально-функциональные уравнения потока, типовые потоковые явления.

Дорожные сети мегаполисов все более насыщаются автомобилями. Следствием этого на магистралях наблюдаются протяженные очереди, а на перекрёстках спонтанно возникают скопления блокирующих друг друга автомобилей. Эти недостаточно изученные к настоящему времени явления все более тормозят потоки автомобилей и тем самым создают все более осязаемые проблемы — социальные, экологические и экономические.

Миграцию очередей в реальном времени на московской дорожной сети можно наблюдать на интернет-сайте «Карты дорожных пробок на Яндекс». Сайт экспонирует карту дорог г. Москва, на которую с интервалом 4–5 минут наносятся изменения в распределении дорожных «пробок».

Рассмотрим отрезок магистрали между перекрёстками. При красном сигнале светофора, установленном на выезде из магистрали в перекрёсток, поток автомобилей тормозится с образованием очереди из останавливающихся автомобилей. С включением зеленого сигнала головной автомобиль начинает движение, а следующий за ним становится головным. Если в некоторый момент времени тело очереди не пусто, то в этот момент к очереди может присоединиться следующий автомобиль, который становится хвостовым. Такую очередь из стоящих автомобилей назовем пробкой. Ее голова и хвост перемещаются по магистрали в направлении, противоположном движению.

Существуют два случая:

— пробка рассеивается за конечное время на достаточно длинном отрезке магистрали, когда интенсивность потока, входящего в тело пробки, меньше интенсивности отделения головных автомобилей;

— длина пробки не убывает с течением времени, когда интенсивность входящего потока больше или равна интенсивности выходящего потока из тела пробки.

Как в первом случае (при определённых отношениях длины отрезка магистрали и длительности красного сигнала), так и всегда во втором случае пробка за конечное время достигает соседнего перекрёстка и может тормозить на нём потоки с других магистралей.

Полное или частичное покрытие площади перекрёстка телами пробок, при котором отсутствует возможность отделения головных автомобилей от тел пробок, назовем затором.

Рассмотренный механизм образования заторов может приводить как к полному или частичному рассеиванию автомобилей на исходящих от перекрёстка магистралях, так и к росту длин пробок на входящих магистралях с захватом заторами соседних перекрёстков.

Отметим двойственную роль пробок на дорожной сети. С одной стороны, образование пробок является необходимым технологическим следствием светофорного регулирования. С другой стороны, первичная пробка индуцирует эффект затора, который в свою очередь приводит к неконтролируемому росту длин вторичных пробок, поражающих дорожную сеть.

Одной из целей построения модели и теории дискретного потока является установление условий, при которых первичная пробка успевает рассеяться в пределах магистрали, не достигнув соседнего перекрёстка. В этом контексте модель однорядного дискретного потока является первичным объектом для исследования.

В общем контексте модель дискретного потока частиц, которая сформулирована ранее в работах [2–4] и развитая в данной работе, ближе всего примыкает к модели В.А. Марченко [5], в которой цепочки частиц укладываются в систему каналов со структурой графа.

Принципиальное отличие моделей состоит в следующем. Модель В.А. Марченко предусматривает упругое взаимодействие соседних частиц. А модель данной работы предусматривает взаимодействие соседних частиц в соответствии с законом безопасной дистанции. Ещё раз подчеркнем, что этот закон основан на известных экспериментальных данных о зависимости дистанции между частицами от их скорости.

Другие представления о моделях потока автомобилей на магистральных отрезках дорог можно получить из работ [6–8]. Их более полный обзор содержится в [9].

Также заметим, что в исследованиях [1], по-видимому, впервые, проблема организации дорожного движения в крупных городах была сформулирована как системная, с попыткой создания сетевой концепции светофорного регулирования потоков автомобилей. Комбинаторный анализ различных схем расщепления потоков на регулируемом перекрёстке представлен в [10].

Данная работа, содержащая вывод ДФ-уравнений и их интегрирование, является первой частью теории дискретного потока. Вторая часть этой теории — динамика очереди — будет представлена в следующих номерах журнала.

### I. Модель дискретного потока

**Схема дискретного потока.** Рассмотрим однопольную полосу для движения автомобилей, с которой свяжем координатную ось  $S$  (рис. 1). Полоса наполнена движущимися друг за другом автомобилями, образующими то, что будем называть дискретным потоком. Относительно этого потока предположим следующее:

- автомобили представляются точечными частицами;
- запрещены въезды и выезды автомобилей через боковые ограничивающие линии;
- скорость каждого автомобиля в произвольный момент времени направлена по координатной оси или равна нулю;
- взаимодействие соседних частиц в потоке подчиняется закону безопасной дистанции.

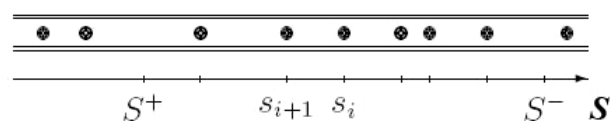


Рис. 1. Однорядный дискретный поток частиц.  $S^+$ ,  $s_i$ ,  $S^- \in S$

Изложим содержание закона безопасной дистанции.

Предварительно заметим, что начало исследований механизмов взаимодействия автомобилей в потоке относится к 30-м годам прошлого века (см. [1]). В этот период было экспериментально установлено, что максимальная интенсивность потока автомобилей в однопольной полосе составляет величину 2000 авт/ч, которая достигается на скоростях 40–50 км/ч. Ясно, что величина 2000 авт/ч определяет пропускную способность однопольной полосы.

**Закон безопасной дистанции.** В рассматриваемом потоке частиц обозначим через  $s_i(t)$  координату  $i$ -й частицы (автомобиля) в момент времени  $t$ ,  $s_i(t) \in S$ ,  $t \in R$ ,  $i \in N$ . Дистанцию между соседними частицами с номерами  $i$  и  $i+1$  обозначим через  $\Delta_{i+1}(t) = s_i(t) - s_{i+1}(t)$ ,  $i \in N$  и свяжем её со скоростями частиц. С этой целью рассмотрим стационарный однородный поток, в котором

- равны и постоянны скорости всех частиц:  $\dot{s}_i(t) = \dot{s}_{i+1}(t) = v = \text{const}$ ,  $t \in R$ ,  $i \in N$ ;
- равны и постоянны дистанции между соседними частицами:  $\Delta_i(t) = \Delta = \text{const}$ ,  $t \in R$ ,  $i \geq 2$ .

В плоскости  $R \times S$  такому потоку соответствует семейство параллельных прямых с равными дистанциями (рис. 2). Очевидны формулы

$$v = \frac{\Delta}{\Delta t}, \quad q = v\mu,$$

где  $\mu = \frac{1}{\Delta}$ ,  $q = \frac{1}{\Delta t}$ ; здесь  $\Delta$  — дистанция между соседними частицами,  $\Delta t$  — интервал времени, в течение которого частица проходит дистанцию  $\Delta$  со скоростью  $v$ ,  $\mu$  — плотность частиц,  $q$  — интенсивность движения частиц.

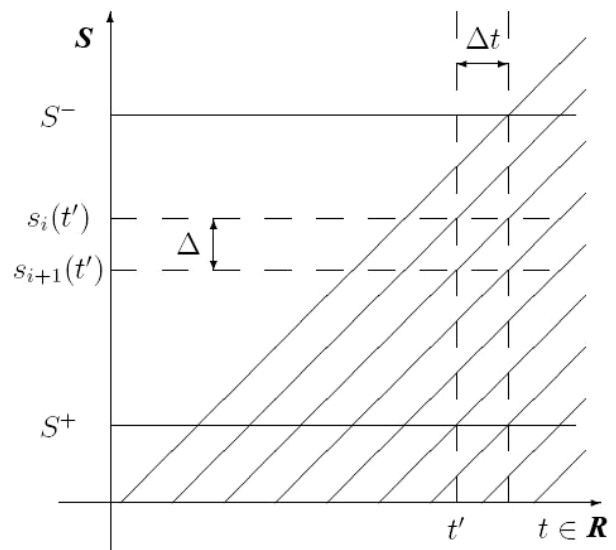


Рис. 2. Графики движения частиц, образующих однородный стационарный дискретный поток

Дистанция  $\Delta$  при прочих равных условиях является функцией скорости  $v$ . Эта зависимость в основном определяется двумя факторами — длиной тормозного пути и запаздыванием реакции водителя при изменении скорости впереди движущегося автомобиля.

На рис. 3 представлены графики описанных выше следующих функций:  $\varphi(v)$ ,  $\mu(v)$ ,  $\Delta t(v)$  и  $q(v)$ .

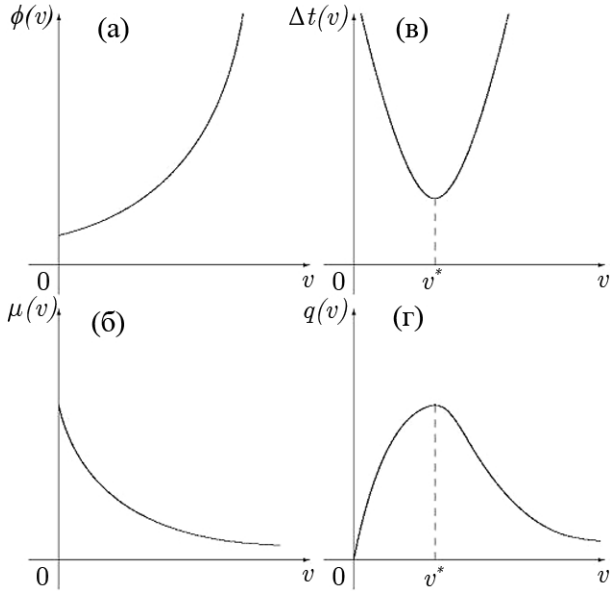


Рис. 3. Графики функций: а — функция безопасной дистанции  $\varphi(v)$ , б — плотность потока  $\mu(v)$ , в — функция временного интервала  $\Delta t(v)$  и г — интенсивность потока  $q(v)$

В каждой паре соседних частиц из однорядной полосы выделяем лидера и преследователя, относительно которых считаем, что

— преследователь в каждый момент времени имеет возможность сохранять свою скорость либо переключаться на скорость лидера, то есть:  $\dot{s}_{i+1}(t) \in V_{i+1}(t)$ ,  $V_{i+1}(t) = \{\dot{s}_{i+1}(t_-), \dot{s}_i(t)\}$ ,  $i \in N$ , где  $\dot{s}_i$  — скорость лидера с номером  $i$ ,  $\dot{s}_{i+1}$  — скорость преследователя;

— преследователь, имея выбор из двух скоростей, стремится поддерживать безопасную дистанцию, следуя правилам:

(а) если  $\Delta_{i+1}(t) > \varphi(\dot{s}_i(t))$ , то преследователь стремится сократить дистанцию  $\Delta_{i+1}$ , выбирая максимальную скорость  $\dot{s}_{i+1}(t) = \max V_{i+1}(t)$ ,

(б) если  $\Delta_{i+1}(t) < \varphi(\dot{s}_i(t))$ , то преследователь стремится увеличить дистанцию  $\Delta_{i+1}$ , выбирая минимальную скорость  $\dot{s}_{i+1}(t) = \min V_{i+1}(t)$ ,

(в) если выполняется равенство  $\Delta_{i+1}(t) = \varphi(\dot{s}_i(t))$ , то преследователь для поддержания безопасной дистанции должен двигаться со скоростью лидера, то есть  $\dot{s}_i(t) = \dot{s}_{i+1}(t)$ ;

— действия каждого лидера не зависят от действий преследователя;

— движение лидера с номером  $i = 1$  считается заданным, например, указателями скорости, размещенными по длине полосы; в этом случае движению лидера с номером  $i = 1$  может быть сопоставлено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с кусочно-постоянной правой частью. При этом скачки сопоставляются точкам полосы, где установлены указатели скорости.

**Дифференциально-функциональные уравнения (ДФ-уравнения) однорядного**

**дискретного потока.** Учитывая изложенное, уравнения дискретного потока с безопасной дистанцией представимы в следующем виде:

$$\dot{s}_1 = f(s_1), \quad s_1 \in S, \quad (1)$$

$$\dot{s}_{i+1}(t) = \begin{cases} \max V_{i+1}(t), & \Delta_{i+1}(t) > \varphi(\dot{s}_i(t)), \\ \dot{s}_i(t), & \Delta_{i+1}(t) = \varphi(\dot{s}_i(t)), \\ \min V_{i+1}(t), & \Delta_{i+1}(t) < \varphi(\dot{s}_i(t)). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $f(s_1)$  — кусочно-постоянная функция со скачками в точках полосы, где установлены указатели скорости;  $V_{i+1}(t) = \{\dot{s}_{i+1}(t_-), \dot{s}_i(t)\}$ ;  $\Delta_{i+1}(t) = s_i(t) - s_{i+1}(t)$ ,  $t \in R$ ,  $i \in N$ ;  $\varphi(\dot{s}_i(t))$  — заданная неубывающая функция от скорости лидера — представление закона безопасной дистанции;  $s_i(t)$  — координата  $i$ -й частицы в однорядной полосе,  $\dot{s}_i(t)$  — её скорость,  $s_i(t) \in S$ ,  $t \in R$ ,  $i \in N$ .

**Краевые условия.** К уравнениям дискретного потока (1), (2) следует присоединить начальные и граничные условия. Запишем общее представление этих условий.

Начальные условия для уравнений (2) в начальный момент времени задаются распределением частиц в полосе, а также начальным распределением их скоростей; то есть в момент времени  $t = t_0$  задаются следующие два множества:

$$\begin{cases} \{s_i(t_0)\}, & s_i(t_0) > s_{i+1}(t_0) \in [S^+, S^-], \\ \{\dot{s}_i(t_{0-})\}, & \dot{s}_i(t_{0-}) \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $i \in \overline{2, I_0}$  и  $I_0$  — число частиц в отрезке полосы  $[S^+, S^-]$  в момент времени  $t_0$ ,  $I_0 \in N$ ,  $I_0 < +\infty$ , а  $S^+$ ,  $S^-$  — граничные точки этого отрезка.

Для интегрирования уравнения (1), как для обыкновенного дифференциального уравнения, в начальный момент времени  $t = t_0$  достаточно задать положение первой частицы в полосе  $s_1(t_0) \in [S^+, S^-]$ .

Граничное условие в сечении  $S^+$  задается моментами времени проезда с ненулевой скоростью сечения  $S^+$   $i$ -ми частицами,  $i = \overline{1, I^+}$ ; то есть считаются заданными следующие множества:

$$\begin{cases} \{t_i^+\}, t_i^+ < t_{i+1}^+, \\ \{\dot{s}_i(t_{i-}^+)\}, \dot{s}_i(t_{i-}^+) > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что при этом следует считать

$$s_i(t_i^+) = S^+, \quad i = \overline{1, I^+}, \quad I^+ < +\infty.$$

Здесь  $I^+$  — общее число частиц, вошедших в отрезок полосы  $[S^+, S^-]$  за время  $[t_0, +\infty)$ . Отметим, что множества из (4) считаются конечными.

Граничное условие в сечении  $S^-$  задается аналогично граничному условию в сечении  $S^+$  следующими множествами:

$$\begin{cases} \{t_i^-\}, t_i^- < t_{i+1}^-, \\ \{\dot{s}_i(t_{i-}^-)\}, \dot{s}_i(t_{i-}^-) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

при условии

$$s_i(t_i^-) = S^-, \quad i = \overline{1, I^-}, \quad I^- < +\infty.$$

Здесь  $I^-$  — общее число частиц, вышедших из отрезка полосы  $[S^+, S^-]$  за время  $[t_0, +\infty)$ . Также отмечаем, что множества (5) считаются конечными. Особенности других представлений краевых условий (5) излагаются далее.

## II. Интегрирование уравнений потока частиц

**Программное движение лидера.** Пусть в соответствии с п. I движению лидера сопоставлено обыкновенное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянной и неотрицательной правой частью следующего вида:

$$\dot{s} = f(s), s \in [S^+, S^-] \subset S,$$

$$f(s) = v_n, s \in [S^{(n-1)}, S^{(n)}] \subset [S^+, S^-],$$

$$n = \overline{1, \bar{n} + 1},$$

где  $\bar{n}$  — число скачков в интервале  $[S^+, S^-]$ ,  $\bar{n} < +\infty$ ,  $S^{(n)}$  — координаты точек скачков скорости,  $v_n$  — значение скорости лидера ( $i = 1$ ) на интервале  $[S^{(n-1)}, S^{(n)}]$ . При этом  $S^{(0)} = S^+$  и  $S^{(\bar{n}+1)} = S^-, S^+, S^- < +\infty$ .

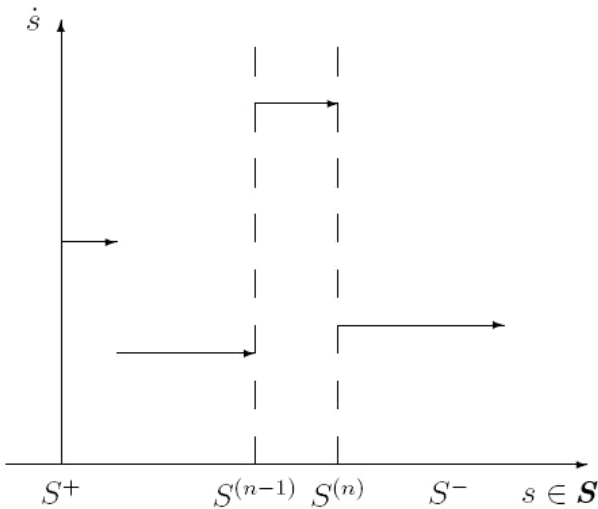


Рис. 4. Скоростная программа движения лидера в  $i$ -порядковой полосе

Обозначим через  $s(t)$  решение уравнения на интервале  $[t', t'']$ ,  $t'' < +\infty$  при начальных данных

$$s_1(t') = S^+.$$

Считая функцию  $f(s)$  непрерывной справа, решение  $s_1(t)$  строим в классе кусочно-линейных неубывающих функций. Решение представимо следующим интегралом:

$$s_1(t) = \begin{cases} S^+ + v_1(t - t'), & t \in [t', \eta_1), \\ S^+ + \sum_{m=1}^{n(t)} v_m \Delta \eta_m + v_{n(t)}(t - \eta_{n(t)}), & t \in [\eta_1, t''], \end{cases}$$

$$\eta_n = \eta_{n-1} + \Delta \eta_n,$$

$$t'' = \eta_{\bar{n}} = t' + \sum_{m=1}^{\bar{n}+1} \Delta \eta_m, \quad (6)$$

$$n(t) = \max\{n : \eta_n \leq t\},$$

где  $\bar{n}$  — число скачков функции  $f(s)$  на интервале  $[S^+, S^-]$ ,  $s \in [S^+, S^-]$ .

График функции  $f(s)$  представлен на рис. 4. Подчеркнем, что здесь все  $v_n \geq 0$ .

Заметим, что если формально снять ограничение, связанное с неотрицательностью функции  $f(s)$ ,  $s \in [S^+, S^-]$ , то возникают определённые проблемы с определением решения в точках типа  $s^*$  (рис. 5), то есть в точках смены знака скорости частицы.

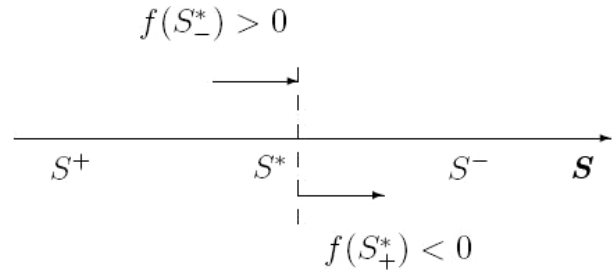


Рис. 5. Точка  $s^*$  скачка скорости лидера со сменой знака, приводящая к «скользящему режиму»

Такая ситуация может возникать в случаях, когда частицам разрешен «задний ход».

### Определение решения ДФ-уравнения.

Решение ДФ-уравнений (2) будем строить в классе кусочно-линейных неубывающих функций. Тогда под решением ДФ-уравнения (2) для каждого преследователя с номером  $i + 1$  будем понимать функцию — интегральную ломаную,  $s_{i+1}: \mathbb{R} \rightarrow S$ ,  $i \in \mathbb{N}$  из указанного класса, которая для любого  $t \in [t', t'']$ ,  $t'' < +\infty$  удовлетворяет уравнению (2), где  $[t', t'']$  — интервал определения решения для соответствующего лидера с номером  $i$ , а величина  $t''$  даётся представлением (6).

Напомним, что при  $i = 1$  движение лидера задается обыкновенным дифференциальным уравнением с кусочно-постоянной правой частью, и поэтому может быть проинтегрировано независимо от всех других уравнений из (2) ( $i \geq 2$ ).

Пусть для пары лидер–преследователь известен алгоритм построения решения для преследователя при известной интегральной ломаной лидера. Очевидно, что в этом случае решения всех уравнений из (2) могут быть построены индуктивно. Построим общий шаг индукции.

**Вычисление точек скачков скорости преследователя.** Обозначим через  $\{t_n\}^{i+1}$  множество моментов времени на действительной оси  $\mathbb{R}$ , где потенциально возможны скачки скорости преследователя с номером  $i + 1$ ,  $\{t_n\}^{i+1} \subset [t', t'']$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . С каждой точкой  $t_n \in \{t_n\}^{i+1}$  могут быть связаны следующие типы событий:

- (а) событие типа «смена скорости лидера»;
- (б) событие типа «достижение безопасной дистанции»;
- (в) событие типа «нарушение безопасной дистанции».

В силу (1) и (2) легко устанавливаются следующие свойства:

если соседние точки скачков скорости преследователя обозначить через  $t_{n-1}$  и  $t_n$  ( $t_{n-1} < t_n$ ), то на интервале  $[t_{n-1}, t_n)$  график интегральной ломаной преследователя есть отрезок прямой;

каждая точка скачка скорости преследователя имеет место при наступлении либо события типа (а), либо события типа (б), либо при одновременности событий типа (а) и (б);

событие типа (в) наступает только одновременно с событием типа (а).

Заметим, что при наступлении события типа «нарушение безопасной дистанции» скачок скорости преследователя отсутствует, так как безопасная дистанция при смене скорости лидера всегда терпит скачок, а траектория преследователя является непрерывной функцией.

Таким образом, алгоритм вычисления момента времени  $t_n$ , соответствующего скачку скорости преследователя (при известном  $t_{n-1}$ ), основан на сопоставлении моментов времени события типа (а) и события типа (б).

Далее для вычисления точки  $t_n \in \{t_n\}^{i+1}$  при известной точке  $t_{n-1} \in \{t_n\}^{i+1}$  вводим в рассмотрение следующие множества:

$$T_\eta^{i+1}(t_{n-1}) = \{\eta : \eta > t_{n-1}, \quad \eta \in \{\eta\}^i \cup \{t''\}\} \neq \emptyset,$$

$$T_\varphi^{i+1}(t_{n-1}) = \{t : \Delta_{i+1}(t) = \varphi(\dot{s}_i(t_{n-1}))\},$$

$$t \in [t_{n-1}, \min T_\eta^{i+1}(t_{n-1})) \cup \{t''\} \neq \emptyset,$$

$$t_{n-1} \in \{t_n\}^{i+1} \subset [t', t''], \quad i \in N,$$

где  $\{t''\}$  — одноэлементное множество;  $\{\eta\}^i$  — множество точек скачков скорости лидера с номером  $i$ ,  $\{\eta\}^i \subset [t', t'']$ ; а множество

$$\{t : \Delta_{i+1}(t) = \varphi(\dot{s}_i(t_{n-1})), \dots$$

$$t \in [t_{n-1}, \min T_\eta^{i+1}(t_{n-1}))\}$$

выделяет интервал нулей уравнения

$$\Delta_{i+1}(t) = \varphi(\dot{s}_i(t_{n-1})),$$

$$t \in [t_{n-1}, \min T_\eta^{i+1}(t_{n-1})).$$

Заметим, что введённые множества  $T_\eta$  и  $T_\varphi$  не являются пустыми. Также заметим, что операция вычисления  $\min T_\eta^{i+1}(t_{n-1})$  выделяет либо точку  $t''$ , либо следующую за точкой  $t_{n-1}$  справа точку скачка скорости лидера с номером  $i$ . Операция  $\min T_\varphi^{i+1}(t_{n-1})$  выделяет либо точку  $t''$ , либо точку, соответствующую событию типа «достижение безопасной дистанции», которая является ближайшей справа к точке  $t_{n-1}$  или совпадает с  $t_{n-1}$ .

Пусть вычислена точка  $t_{n-1} \in \{t_n\}^{i+1}$ ,  $i \in N$ . Тогда, учитывая выделенные свойства для событий типа (а), (б) и (в), замечания о вычислении  $\min T_\eta$  и  $\min T_\varphi$ , а также, учитывая, что на любом интервале  $[t_{n-1}, t_n) \subset [t', t'']$  интегральная ломаная есть отрезок прямой, для вычисления следующей точки  $t_n$  потенциального скачка скорости

преследователя с номером  $i + 1$  получаем рекуррентную формулу

$$t_n = \begin{cases} \min\{\min T_\eta^{i+1}(t_{n-1}), \min T_\varphi^{i+1}(t_{n-1})\}, \\ \quad \Delta_{i+1}(t_{n-1}) \neq \varphi(\dot{s}_i(t_{n-1})), \\ \min T_\eta^{i+1}(t_{n-1}), \\ \quad \Delta_{i+1}(t_{n-1}) = \varphi(\dot{s}_i(t_{n-1})). \end{cases} \quad (7)$$

При  $n = 1$  считается, что  $t_0 = t'$ .

#### Алгоритм преследования лидера.

Считаем, что на отрезке  $[t', t'']$ ,  $t'' < +\infty$  построена интегральная ломаная для  $i$ -й частицы. Тогда алгоритм построения интегральной ломаной для преследователя с номером  $i + 1$  на отрезке  $[t', t'']$  представим в следующем виде:

строится множество  $V_{i+1}(t') = \{\dot{s}_{i+1}(t'_-), \dot{s}_i(t')\}$ ;

в силу (2) однозначно вычисляется скорость преследователя  $\dot{s}_{i+1}(t')$ ;

строится первый отрезок ломаной с конечной точкой  $s_{i+1}(t_1) = s_{i+1}(t') + \dot{s}_{i+1}(t')(t_1 - t')$ , где

$$t_1 = \begin{cases} \min\{\min T_\eta^{i+1}(t'), \min T_\varphi^{i+1}(t')\}, \\ \quad \Delta_{i+1}(t') \neq \varphi(\dot{s}_i(t')), \\ \min T_\eta^{i+1}(t'), \\ \quad \Delta_{i+1}(t') = \varphi(\dot{s}_i(t')); \end{cases}$$

далее считается, что построен отрезок ломаной с номером  $n - 1$ ; тогда, учитывая, что множество  $V_{i+1}(t_{n-1}) = \{\dot{s}_{i+1}(t_{n-1}-), \dot{s}_i(t_{n-1})\}$ , а скорость  $\dot{s}_{i+1}(t_{n-1})$  вычисляется в силу (2), конечная точка  $n$ -го отрезка ломаной вычисляется по формуле  $s_{i+1}(t_n) = s_{i+1}(t_{n-1}) + \dot{s}_{i+1}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$ , а  $t_n$  определяется выражением (7). Процесс построения ломаной заканчивается, если при некотором  $n' < \infty$

$$\min\{\min T_\eta^{i+1}(t_{n'}), \min T_\varphi^{i+1}(t_{n'})\} = t''.$$

Ясно, что в силу непрерывности ( $s_i(t'') = s_i(t''_-)$ ) имеем

$$s_{i+1}(t'') = s_{i+1}(t_{n'}) + \dot{s}_{i+1}(t_{n'})(t'' - t_{n'}),$$

а точка с координатами  $(t'', s_{i+1}(t''))$  — крайняя справа точка построенной ломаной на плоскости  $R \times S$ , может быть начальной для продолжения решения при  $t \geq t''$ .

В результате искомая ломаная определяется интегралом

$$s_{i+1}(t) = \begin{cases} s_{i+1}(t') + \dot{s}_{i+1}(t')(t - t'), t \in [t', t_1), \\ s_{i+1}(t') + \sum_{m=1}^{n(t)} \dot{s}_{i+1}(t_{m-1})(t_m - t_{m-1}) + \\ + \dot{s}_{i+1}(t_{n(t)})(t - t_{n(t)}), t \in [t_1, t''), \end{cases}$$

$t_n, t \in [t_1, t'')$ ,  $n, m = \overline{1, M^{i+1}}$ ,  $M^{i+1} = |\{t_n\}^{i+1}| < \infty$ , где  $n(t) = \max\{n : t_n \leq t\}$ ,  $t_n \in \{t_n\}^{i+1}$ , а моменты времени  $t_n$  потенциальных скачков скорости преследователя определяются формулой (7). То, что построенная функция  $s_{i+1}(t)$  для каждого  $t \in [t', t'')$  удовлетворяет системе (2), проверяется её подстановкой в систему (2).

Некоторые свойства частиц в потоке.

1. Пусть траектории  $i$ -го лидера сопоставлена функция  $s_i(t)$  — кусочно-линейная неубывающая функция с конечным числом отрезков прямых, удовлетворяющая (2) для всех  $t \in [t', t'']$ ,  $t'' < \infty$ . Тогда движение преследователя  $s_{i+1}(t)$  с номером  $i + 1$  с начальным положением  $s_{i+1}(t') < s_i(t')$  и скоростью  $\dot{s}_{i+1}(t'_-) \geq 0$  однозначно продолжаемо в силу (2) на отрезок  $t \in [t', t'']$ ,  $t'' < \infty$  в классе неубывающих ломаных с конечным числом отрезков прямых.

2. Переключение скорости преследователя может происходить в моменты времени переключения скорости лидера, а также в моменты времени достижения преследователем безопасной дистанции.

3. На каждом интервале постоянства скорости лидера может быть не более одной точки смены скорости преследователя.

4. Пусть при  $t = t'$

$$\Delta_{i+1}(t') = s_i(t') - s_{i+1}(t') > 0,$$

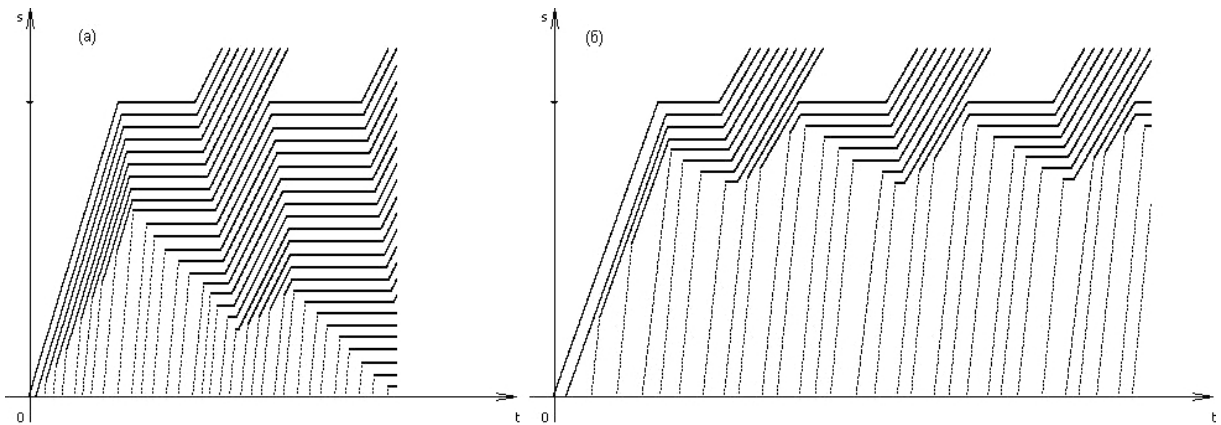


Рис. 6. Результаты численного моделирования очереди частиц: а — случай роста и б — случай стабилизации длины очереди

В плоскости  $R \times S$  на рис. 6 рассмотрим последовательность  $t$ -сечений. Такое рассмотрение легко обнаруживает ранее рассмотренные свойства пробки.

Поток с достаточно большим скоплением частиц становится прерывистым (стоп-старт движение). В таком потоке периодически образуется очередь частиц. На рис. 7 представлен поток в режиме стоп — старт.

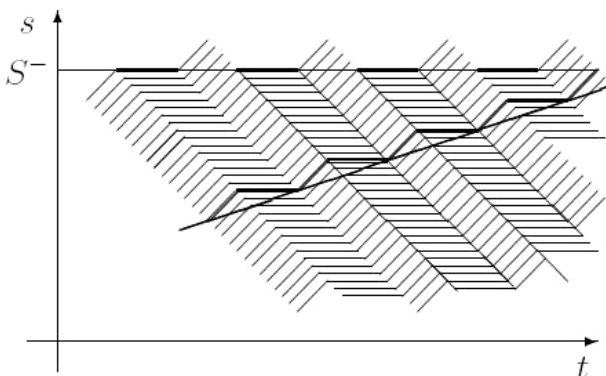


Рис. 7. Поток в режиме стоп-старт

тогда для  $t \in [t', t'']$

$$\Delta_{i+1}(t) > 0.$$

5. Пусть движение частиц в однорядной полосе подчиняется уравнениям (1), (2). Тогда для конечного отрезка однорядной полосы в цепочке двигающихся друг за другом частиц для каждой их пары сохраняется порядок их следования. Таким образом, множество частиц в отрезке однорядной полосы есть параметризованное множество с отношением строгого порядка (транзитивность и антисимметричность), где параметр — текущее время  $t \in [t', t'']$ ,  $t'' < \infty$ .

**Примеры численного моделирования.** На рис. 6 (а) и (б) приведены примеры численного моделирования дискретного потока, представленного ДФ-уравнениями (1) и (2).

### III. Замечания о других моделях дискретного потока

**О дискретном потоке с импульсным управлением.** Исходим из теоремы об изменении количества движения:

$$m\dot{x}(t) = m\dot{x}(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t F d\xi,$$

где  $m$  — масса частицы,  $\dot{x}$  — её скорость,  $F$  — активная сила, действующая на частицу,  $\int_{t-\Delta t}^t F d\xi$  — импульс силы на интервале  $[t - \Delta t, t]$ ,  $\Delta t > 0$ .

Пусть равномерно по  $t$  существует предел:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \dot{x}(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t F d\xi \right) =$$

$$= \begin{cases} \max V(t), & \Delta(t) > \varphi(\dot{s}^*(t)), \\ \dot{s}(t), & \Delta(t) = \varphi(\dot{s}^*(t)), \\ \min V(t), & \Delta(t) < \varphi(\dot{s}^*(t)), \end{cases}$$

$$V(t) = \{\dot{s}(t_-), \dot{s}^*(t)\},$$

$$\Delta(t) = s^*(t) - s(t),$$

где  $\dot{s}^*$  — скорость лидера,  $\dot{s}$  — скорость преследователя,  $s^*$  и  $s$  — положения частиц в полосе, а значение предела является правой частью уравнения (2).

В таком представлении наша модель дискретного потока частиц является системой конечного числа материальных точек в канале без трения с импульсным управлением, которые поддерживают безопасную дистанцию между лидером и преследователем.

В случаях ограниченности активных сил,  $F \in [F_-, \bar{F}]$ , где  $F_-$  и  $\bar{F}$  конечны и характеризуются ресурсом двигателя автомобиля и сцеплением колес и дороги, траектории частиц как материальных точек должны иметь непрерывные первые и ограниченные вторые производные.

При таком представлении вопрос построения уравнений для «гладких» потоков может быть сведен к задаче о сплайновом сглаживании ранее построенных ломаных ([11], с. 168). Особенностью этой задачи (как математической) является следующее. Заданное поле ломанных, образующих дискретный поток, приближается (в некоторой метрике) на классе сплайнов, в котором:

— сглаживающие сплайны должны иметь неотрицательную и непрерывную первую производную;

— вторые производные — ускорения материальных точек в гладком потоке, должны удовлетворять неравенствам

$$F \leq m\ddot{s}(t) \leq \bar{F}.$$

Заметим, что вычислительная сложность задачи связана как с выбором сетки узлов, так и с возможностью построения решения на сплайнах второго порядка.

Далее построенные сглаживающие сплайны рассматриваем в качестве заданных движений материальных точек в потоке. В результате вопрос построения соответствующих управляющих сил может быть сведен к решению так называемой первой (основной) задаче динамики — по заданному движению определить силы его вызывающие ([12], с. 321). Обзор таких задач, трактуемых как построение программных движений, содержится в [14].

Другая трактовка вопроса о преследовании лидера на безопасной дистанции может быть связана с задачей о наложении сервосвязи, введённой А. Бегеным ([13], с. 344). Реализация такой связи (иначе — обратной связи) предусматривает наличие измерителей, силовых приводов и автоматических регуляторов. Обзор алгоритмов стабилиза-

ции обратных связей, в частности, использующие скользящие режимы, содержится в работе [15].

Таким образом, с одной стороны, обсуждаемая модель потока на классе кусочно-линейных траекторий является приближением (в указанных смыслах) к потокам механических частиц. С другой стороны, использование на автомобилях форсированных двигателей допускает режимы с быстрым изменением скорости. Кроме того, построение программируемых потоков даёт перспективу перехода на автоматическое вождение автомобилей.

**О связи дискретного потока с моделью конечного автомата.** Вводим следующие равномерные сетки:

— на координатной оси  $S$  строим сетку с шагом  $\delta$ ,  $\delta = \text{const} > 0$ ;

— на оси времени  $R$  строим сетку с шагом  $\Delta t$ ;

— вводим конечное множество  $\{v^m\}$ ,  $v^m = m\Delta v$ ,  $\Delta v = \text{const} > 0$ ,  $m = \overline{0, M}$ ,  $M < \infty$ .

Устанавливаем между шагами сеток следующую связь:  $\Delta t \Delta v = \delta$ . Кроме того, функцию  $\varphi(\dot{s}_i)$  заменяем на её дискретное приближение

$$\left[ \frac{\varphi(\dot{s}_i)}{\delta} \right] \delta.$$

В этом случае предположим, что начальные положения каждой  $i$ -й частицы  $s_i(t_0)$ ,  $i \in N$ , соответствуют узлам  $\delta$ -сетки, то есть  $\left[ \frac{s_i(t_0)}{\delta} \right] = \frac{s_i(t_0)}{\delta}$ ,  $i \in N$ . Кроме того, будем считать, что скачки скорости лидера цепочки ( $i = 1$ ) допускаются только в момент времени  $t_k = k\Delta t$ ,  $k \in N$ ,  $t_0 = 0$ . Также предположим, что скорости лидера цепочки и всех других частиц ( $i \geq 2$ ) в сечении входа в отрезок полосы считаются кратными шагу  $\Delta v$ ; тогда при всех других  $t_k$ ,  $k \in N$ , все частицы в силу уравнений (1) и (2) с дискретным временем  $t_k$  будут располагаться в узлах  $\delta$ -сетки на координатной оси  $S$ .

Пусть  $M$  — число узлов в  $\delta$ -сетке отрезка полосы, а  $m$  — число двоичных разрядов, требуемых для записи числа  $M$ . Пусть также имеет место равенство  $\log_2 M = m$ . Тогда число возможных представлений цепочки частиц в конечной полосе с числом узлов  $M$  равно числу  $2^{2^m}$ . Это утверждение следует из факта: множество булевских функций с  $m$  переменными равнозначно множеству различных цепочек частиц на сетке с  $M$  узлами, если только  $m$  и  $M$  связаны равенством  $m = \log_2 M$ .

#### IV. О развитии теории дискретного потока

**Алгоритм построения сети.** Эскизно наметим алгоритм построения дорожной сети из типовых элементов с их топографическим представлением на декартовой плоскости.

Первый тип элементов — отрезки ориентированных однорядных полос (отрезки полос или кратко ОП). ОП допускают искривления в плоскости и малые их деформации при выводе их из

плоскости с целью скрещивания двух и большего числа ОП. Связь отдельных ОП осуществляется через узлы коммутации (кратко — коммутаторы, например, в виде зоны регулируемого перекрёстка двух дорог). В коммутаторах входы одних ОП соединяются с выходами других ОП. Считается, что каждый ОП связан с двумя коммутаторами. Коммутаторы так же, как и ОП, имеют топографическую привязку.

Построенную односвязную область, состоящую из коммутаторов и магистральных отрезков (параллельных и одинаково ориентированных ОП), будем называть магистральной сетью. Эта сеть отделяет друг от друга области, называемые  $P$ -зонами. Считается, что в  $P$ -зонах допускаются остановки, стоянки и парковки транспортных средств. Также считается, что в  $P$ -зонах может существовать собственное внутреннее дорожное устройство.  $P$ -зоны формально следует считать открытыми множествами; тогда область, занятая магистральной сетью, будет замкнутой. Заметим, что к  $P$ -зонам относится внешняя относительно сети часть плоскости. В магистральную сеть дополнительно врезаются коммутаторы, связывающие её с  $P$ -зонами, и, таким образом, решается вопрос связи между собой всех  $P$ -зон.

Построение сети может быть завершено прокладкой допустимых маршрутов между  $P$ -зонами. Маршруты на карте сети выделяются маршрутными нитками, которые можно рассматривать как допустимые траектории движения транспортных единиц.

Отметим принципиальную особенность коммутатора. Его коммутационная зона покрыта «паутиной» ниток — траекторий, соединяющих входящие и выходящие ОП, примыкающие к коммутатору. Поэтому тактовое действие светофорного регулятора может быть представлено следующим образом: попеременное открытие и закрытие движения по отдельным группам траекторий, при котором в каждый момент времени исключаются точки пересечения ниток.

**Маршрутизация как алгоритмическая проблема.** Построенную сеть со светофорным регулированием наполним подвижной дискретной средой — потоками частиц, которые локально подчиняются закону безопасной дистанции. В результате получаем новый объект. Этот объект, с одной стороны, является топографическим представлением дорожной сети, которое напоминает ориентированный граф. С другой стороны, дискретная среда частиц, помещённая в сеть, создаёт совокупный поток, действие которого должно подчиняться следующим целевым установкам:

— каждая частица должна реализовывать свою, установленную ею самой, последовательность прохождения  $P$ -зон;

— управление совокупным потоком этих частиц должно устойчиво блокировать образования заторов.

Дискретная среда может содержать порядка  $10^7$  частиц, поэтому вопрос выбора маршрутов для каждой частицы является весьма трудоёмкой задачей. В этом контексте проблему маршрутизации следует рассматривать как алгоритмическую, например, как задачу о существовании некоторого единого правила прокладки маршрутных ниток между любыми парами  $P$ -зон.

Тезисно выделим ряд базовых вопросов в теоретических исследованиях нового объекта.

— Аксиоматика сети, связанной с её топографическим и теоретико-графовым представлением, а также алгоритмов сетевой сборки.

— Способ варьирования сети; в том числе деформации сети, например, преобразование поперечно-продольной схемы в радиально-кольцевую; преобразование сети при включениях и удалении сетевых элементов; топологические характеристики и критерии сравнения сетей с оценкой сложности их маршрутно-ниточного покрытия.

— Теория коммутатора, включающая модели прохождения и преобразования частиц в коммутаторах потоков; модель светофорного регулирования в коммутаторе; механизмы формирования заторов в площади коммутатора.

— Краевые условия на границах ОП и коммутаторов; общие уравнения дискретных потоков, условия существования сетевых напряжённых потоков.

— Полнота данных в задаче управления потоками частиц; принципы и оценки возможных ресурсов управления.

В заключение подчеркнем, что новый объект — сеть с вложенными в неё дискретными потоками частиц — может быть полезен при разработке других общесетевых тематик, в том числе при проектировании вычислительных наноструктур.

## Литература

1. *Иносе Х., Хамада Т.* Управление дорожным движением. — М.: Транспорт, 1983. — 248 с.
2. *Глухарев К.К.* К теории управления потоками автомобилей на дорожной сети // Тезисы докладов VII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — М., 2002. — С. 53.
3. *Улюков Н.М.* Численное моделирование потока автомобилей в однорядной полосе // Труды XLVIII научной конференции МФТИ, Ч. III. — М.: МФТИ, 2005. — С. 56–58.
4. *Глухарев К.К., Улюков Н.М.* Светофорное регулирование однородного дискретного потока // Труды научной конференции МФТИ, факультет Аэрофизики и космических исследований. — М.: МФТИ, 2006. — С. 98–100.
5. *Марченко В.А.* Прямые и обратные задачи многоканального рассеивания: доклад на семинаре МИАНа. — 26 мая 2006. — [www.mi.ras.ru](http://www.mi.ras.ru).



6. Lee H.K., Lee H.-W., Kim D. Macroscopic traffic models from microscopic car-following models // Phys. Rev. E64. 2001.
7. Lubashevsky I.A., Mahnke R. Order parameter model to unstable multilane traffic flow. — arxiv.org, November 13, 2000. — V. 2. — <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9910268>.
8. Ковшов Н.В. Математические модели многополосного дорожного движения // Труды XLVII научной конференции МФТИ, Ч. III. — М.: МФТИ, 2004. — С. 197.
9. Семенов В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. [http://www.keldysh.ru/papers/2004/prep34/prep2004\\_34.html](http://www.keldysh.ru/papers/2004/prep34/prep2004_34.html).
10. Яблонский С.В. [и др.]. Устройство для исследования алгоритмов регулирования уличного движения // ДАН СССР. — 1960. — Т. 132, № 1.
11. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976, 248 с.
12. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. I. — М.: Наука, 1972. — 456 с.
13. Аппель П. Теоретическая механика. Т. II. — М.: Изд. Физико-математической литературы, 1960. — 487 с.
14. Галиуллин А.С. [и др.]. Построение систем программного движения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.
15. Теория систем с переменной структурой / под ред. С.В. Емельянова. — М.: Наука, 1970. — 592 с.
16. Глухарев К.К., Улюков Н.М. Об одной модели однорядного потока автомобилей. Вывод уравнений и их интегрирование // Проблемы машиноведения и надежности машин (машиноведение). — М., 2008. — № 4.
17. Глухарев К.К., Улюков Н.М. Об одной модели однорядного потока автомобилей. Динамика очереди // Проблемы машиноведения и надежности машин (машиноведение). — М., 2009. — № 1.
18. Глухарев К.К., Улюков Н.М. Введение в теорию автомобильных потоков. Динамика однорядного движения: учеб.-метод. пособие. — М.: МФТИ, 2008. — 44 с.

Поступила в редакцию 24.03.2009.