УДК 532.517.4

О.А. Пыркова, А.А. Онуфриев, А.Т. Онуфриев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Поведение скорости в однородном изотропном турбулентном потоке на начальном этапе*

Рассматривается поведение скорости в однородном изотропном турбулентном потоке на начальном этапе в модели потока с учетом явления перемежаемости (чередования в потоке турбулентного и вязкого режимов). Для каждого из режимов существуют инварианты Лойцянского и автомодельности: колмогоровская для турбулентного режима и по Миллионщикову для вязкого. Характер вырождения скорости в первые моменты времени качественно совпадает с экспериментальными данными.

Ключевые слова: однородная изотропная турбулентность, перемежаемость, вырождение скорости.

I. Введение

Неустойчивые движения вязкой жидкости, широко распространенные в природе (движения воздуха в атмосфере, течения воды в океанах, морях, реках, каналах) и технических устройствах (течения в водопроводных трубах, в газопроводах, турбинах, насосах и компрессорах, в соплах ракетных и реактивных двигателей), при которых малые вначале возмущения растут, существенно изменяя характер начального движения, приводя его к хаотическим изменениям по времени и координатам, при которых могут быть выделены статистически точные их осредненные значения [1], называют турбулентными. Имеет место представление о непрерывном потоке энергии из крупномасштабных турбулентных областей в мелкомасштабные, где вязкие напряжения приводят к диссипации кинетической энергии этих движений в тепло. Без наличия внешних источников энергии турбулентные движения вырождаются. Действие вязкости кроме того приводит к тому, что турбулентность становится более однородной и менее зависит от направления.

Одним из первых экспериментов было измерение вырождения кинетической энергии турбулентности [2]. Оказалось, что на некотором промежутке расстояний x от решетки энергия рассеивается как

$$u^{-2} \sim (x - x_0)\,, \qquad (1)$$

u — среднеквадратичное значение компоненты пульсационной составляющей скорости (параллельной среднему течению), x_0 — постоянная. Начальным периодом вырождения назван период времени, для которого справедлив закон вырождения (1), т.е. кинетическая энергия (в единице объема жидкости) обратно пропорциональна времени, отсчитываемому от (условного) момента, в котором энергия была бы бесконечно большой. На больших расстояниях рассеяние энергии становится более быстрым, чем это следует из формулы (1).

Полученные при ряде предположений зависимости для начального периода вырождения скорости приводили в своих работах Хинце [1], Седов [3].

В настоящей работе принимается модель потока как смеси двух режимов [4, 5]: турбулентного (τ), взятого с весом, равным значению коэффициента перемежаемости $\gamma = \frac{\rho_\tau}{\rho}$, и вязкого ($\nu$), взятого с весом $(1-\gamma)$. При этом для одноточечной P_1 и двухточечной P_2 плотностей вероятностей принимается:

$$P_1 = \gamma\,(P_1)_\tau + (1-\gamma)\,(P_1)_\nu$$
$$\text{и} \quad P_2 = \gamma\,(P_2)_\tau + (1-\gamma)\,(P_2)_\nu\,.$$

Тогда

$$u^2 = \gamma u_\tau^2 + (1-\gamma)\,u_\nu^2. \qquad (2)$$

При изучении динамики изотропной турбулентности используется уравнение Кармана–Ховарта [1, 2, 6], связывающее величины продольных корреляционных моментов второго $B_{LL} = u^2 f$ ($f(r,t)$ — продольный коэффициент корреляции второго порядка) и третьего порядков $B_{LL,L} = u^3 k$, ($k(r,t)$ — продольный коэффициент корреляции третьего порядка), в качестве исходного соотношения:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\left(B_{LL,L} + 2\nu\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\right)\right), \qquad (3)$$

здесь ν — коэффициент динамической вязкости, r — расстояние между точками.

Следует отметить, что уравнение (3) незамкнуто, поскольку представляет собой одно соотношение, связывающее две неизвестные функции.

В случае однородной изотропной турбулентности непосредственно из уравнения (3), умножая его на r^4 и интегрируя по r от 0 до ∞, получается

*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

соотношение [1, 2, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(t)\int\limits_0^\infty r^4 f(r,t)\,dr\right) - \left(u^3(t)\,r^4\mathbf{k}(r,t)\right)\Big|_0^\infty = 2\nu u^2(t)\left(r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Big|_0^\infty.$$

Принято считать, что все корреляции скорости при однородной турбулентности на больших расстояниях между двумя точками убывают по экспоненциальному закону, т. е. f стремится к нулю при $r\to\infty$ быстрее, чем r^{-5}, и $\lim\limits_{r\to\infty}\left(r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0$. Что же касается $r^4\mathbf{k}(r,t)$, то его полагают тоже обычно стремящимся к нулю, когда r неограниченно возрастает. Отсюда Лойцянским [7] был получен вывод о том, что величина $u^2(t)\int\limits_0^\infty r^4 f(r,t)\,dr = \mathrm{Loi} = \mathrm{const}$. Обычно этот интеграл называют *инвариантом Лойцянского*. Принимается [1], что $(\mathrm{Loi})_\tau \sim u_\tau^2\Lambda^5$ и $(\mathrm{Loi})_\nu \sim u_\nu^2\lambda^5$, где Λ — продольный интегральный корреляционный масштаб (чисто турбулентный режим), λ — тейлоровский микромасштаб (вязкий режим).

Ради справедливости следует учесть замечание Хинце [1] со ссылкой на работы Бэтчелора и Праудмена, что в однородном неизотропном потоке $\lim\limits_{r\to\infty}\left(r^4\mathbf{k}(r,t)\right)\neq 0$, т. е. в общем случае $\mathrm{Loi} = \mathrm{Loi}(t)$ и не является инвариантом.

В рамках модели, использующейся в настоящей работе, принято гипотетическое соотношение

$$\mathrm{Loi}(t) = \gamma(\mathrm{Loi})_\tau + (1-\gamma)\,(\mathrm{Loi})_\nu.$$

II. Автомодельное решение в чисто турбулентном режиме

При очень больших значениях числа Рейнольдса Re «интервал энергии» и «интервал диссипации» далеко отстоят друг от друга.

В отсутствие вязкости $\nu = 0$, уравнение Кармана–Ховарта (3) принимает вид

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 B_{LL,L}\right). \qquad (4)$$

Для замыкания уравнения (4) используется градиентная гипотеза Ю.М. Лыткина и Г.Г. Черных [8] для режима колмогоровской турбулентности в инерционном интервале, выражающая момент третьего порядка $B_{LL,L}$ через момент второго порядка B_{LL}:

$$B_{LL,L} = 2K_\tau\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \qquad (5)$$

где K_τ — коэффициент турбулентной вязкости. Это позволяет получить автомодельное решение для режима чисто турбулентного движения.

Величина K_τ определяется модельным выражением [9], принятым в виде аппроксимации на основе развиваемой полуэмпирической модели переноса в соответствии с рядом предельных соотношений: перехода к одноточечному описанию ($\frac{r}{\Lambda} = \infty$), инерционного интервала и предельного перехода при $\frac{r}{\Lambda}\to 0$, где оно совпадает с выражением по Ю.М. Лыткину, Г.Г. Черных [8, 10]:

$$2K_\tau^+ = \frac{D_{LL}\tau_2^T}{\nu 3a_1},$$

здесь $D_{LL} = 2u_\tau^2(1-f_\tau) = C(\varepsilon r)^{2/3}$ — продольная структурная функция, $f_\tau(r,t)$ — продольный коэффициент корреляции второго порядка, ε — скорость диссипации, $\tau_2^T = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{D_{ll}}{6}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{\psi_1^2}{r^2}}}$ — время релаксации при двухточечном описании, $D_{ll} = D_{LL} + 2D_{NN}$, N — нормаль к $\vec{r}$, C, α, a_1, ψ_1 — постоянные. В работе [6] на основе многих экспериментальных данных предложено значение $C = 1.9$.

Запись уравнения (4) с учетом (6) в виде

$$\frac{\partial\left(u_\tau^2 f_\tau(\xi_1)\right)}{\partial t} = \frac{1}{\xi_1^4}\cdot\frac{1}{\Lambda^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\xi_1^4 2K_\tau\frac{\partial\left(u_\tau^2 f_\tau(\xi_1)\right)}{\partial\xi_1}\right),$$

где $\xi_1 = \frac{r}{\Lambda}$, при $B = \frac{2}{7}\cdot\frac{5C^{3/2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\Lambda_0}{u_0 t_0}$ дает $B\,d\xi_1 = \sqrt{1-f_\tau}\frac{df_\tau}{f_\tau}$.

Решение последнего уравнения при граничных условиях $f_\tau|_{\xi_1=0} = 1$, $f_\tau|_{\xi_1=\infty} = 0$ имеет вид [8]:

$$B\xi_1 = -2\sqrt{1-f_\tau} + \ln\left(1+\sqrt{1-f_\tau}\right) - \ln\left(1-\sqrt{1-f_\tau}\right).$$

Справедливы следующие асимптотики: $f_\tau = \exp(-B\xi_1)$ при $\xi_1\to\infty$; $1-f_\tau\to\left(\frac{3}{2}B\xi_1\right)^{2/3}$ при $\xi_1\to 0$.

В предположении существования инварианта Лойцянского:

$$(\mathrm{Loi})_\tau \sim u_\tau^2\Lambda^5 = \mathrm{const}, \qquad (6)$$

по Колмогорову: $\frac{u_\tau^2}{u_0^2} = \frac{1}{\frac{t}{t_0}^{10/7}}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/7}$ [6, 11].

III. Автомодельное решение в чисто вязком режиме

В режиме чисто вязкой турбулентности, т. е. предельном случае, когда влияние вязкости становится преобладающим, согласно гипотезе Миллионщикова можно положить $B_{LL,L} = 0$, и уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 2\nu\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\right). \qquad (7)$$

Уравнение (7) замкнуто.

Существует инвариант Лойцянского:

$$(\mathrm{Loi})_\nu \sim u_\nu^2\lambda^5 = \mathrm{const}.$$

Имеют место следующие зависимости: $\frac{u_\nu^2}{u_0^2} = \frac{1}{\frac{t}{t_0}^{5/2}}$, $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{t}{t_0}}$, $\lambda_0 = \sqrt{\frac{5}{\beta}}\sqrt{\nu t}|_{t=t_0}$, где $\beta_0 = \frac{1}{2}$.

Решение уравнения (7) ищется в виде $(B_{LL})_\nu = u_\nu^2 f_\nu(\xi)$, где $\xi = \frac{r}{\lambda}$. При этом уравнение (7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $d\left(\xi^5 f_\nu(\xi)\right) = d\left(\xi^4 \frac{df_\nu(\xi)}{d\xi}\right)$ с граничными условиями $f_\tau|_{\xi=0} = 1$, $f_\tau|_{\xi=\infty} = 0$. Его решение $f_\nu(\xi) = \exp\left(\frac{-\xi^2}{2}\right)$ описывает предельный вязкий режим вырождения.

IV. Коэффициент перемежаемости

Рассматривая взаимодействие между молекулярным и турбулентным обменами в турбулентном пограничном слое [12], Л.Г. Лойцянский, по существу, ввел выражение для коэффициента перемежаемости:

$$\gamma = 1 - \exp(-c_1 R), \tag{8}$$

где c_1 — постоянная, параметр $R = K_\tau^+ = \frac{K_\tau}{\nu}$.

Имеем

$$2K_\tau^+ = \frac{(D_{LL})^{1/2}}{\nu 3 a_1 \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}\frac{D_{ll}}{D_{LL}}}} \cdot \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \frac{\psi_1^2\Lambda^2}{r^2}}} =$$

$$= \frac{u_\tau \Lambda}{\nu}\tilde{F}(r) \sim 2F(r)\frac{1}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{5/7}}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/7} = \frac{2F(r)}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{3/7}}.$$

Для развитого турбулентного потока из (7) получаем

$$\gamma = 1 - \left(1 - c_1 K_\tau^+\right) = c_1 K_\tau^+ \approx \frac{c_1 F(r)}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{3/7}}. \tag{9}$$

И так как величина коэффициента перемежаемости γ с ростом времени стремится к нулю [4], то в соответствии с (5) Loi(t) стремится к $(\mathrm{Loi})_\nu$. Это согласуется с выводом Седова [3] о том, что величина интеграла Лойцянского меняется с течением времени и поэтому, вообще говоря, не может рассматриваться в качестве характерной постоянной. И только на заключительном этапе вырождения интеграл Лойцянского становится инвариантом, когда принимает значение, равное $(\mathrm{Loi})_\nu$.

V. Вырождение скорости на начальном этапе

Принято, что $u_\nu = u_\tau = u_0$ в начальный момент времени (при $t = t_0$). Для изучаемой модели зависимость для скорости от времени в самом начале движения (при $\frac{t}{t_0} - 1 \ll 1$) можно рассматривать как следующую из колмогоровской автомодельности при большом значении числа Рейнольдса Re [11]: $\frac{u_0^2}{u^2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{10/7}$. Это соотношение было получено при $\mathrm{Re} = \infty$, или коэффициенте динамической вязкости $\nu = 0$.

Из уравнения изменения энергии $\frac{dK}{dt} = -\varepsilon$, где скорость диссипации энергии $\varepsilon = (2c)\frac{K^{3/2}}{\Lambda}$, $(2c) = 0.412$, и инварианта Лойцянского $u^2\Lambda^5 = u_0^2\Lambda_0^5$, т.е. $K\Lambda^5 = K_0\Lambda_0^5$, получаем $\frac{dK}{dt} = -(2c)\frac{K^{3/2}}{\Lambda} = -(2c)\frac{K^{3/2}}{\Lambda_0}\left(\frac{K_0}{K}\right)^{1/5}$. Откуда $\frac{dK}{dt} = -(2c)\frac{K^{17/10}}{\Lambda_0 K_0^{1/5}}$, или $\frac{dK}{K^{17/10}} = -(2c)\frac{dt}{\Lambda_0 K_0^{1/5}}$. Интегрируя последнее обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными, получаем $\frac{10}{7}\frac{1}{K^{7/10}} = (2c)\frac{t}{\Lambda_0 K_0^{1/5}}$. Исходя из того, что в начальный момент $\frac{1}{K_0^{7/10}} = 0.7(2c)\frac{t_0}{\Lambda_0 K_0^{1/5}}$, можно записать $\frac{1}{K_0^{7/10}} - \frac{1}{K^{7/10}} = 0.7(2c)\frac{t_0 - t}{\Lambda_0 K_0^{1/5}}$. Отсюда легко получить, что $1 - \frac{K_0^{7/10}}{K^{7/10}} = -0.7(2c)\frac{t - t_0}{\Lambda_0}K_0^{1/2}$, или $\frac{K_0^{7/10}}{K^{7/10}} = 1 + 0.7(2c)\frac{t - t_0}{\Lambda_0}K_0^{1/2}$. А так как турбулентная энергия $K = \frac{3}{2}u^2$ [6], то из вышеизложенного следует:

$$\frac{u_0^2}{u^2} = \left[1 + (2c)\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{u_0 t_0}{\Lambda_0}\cdot\frac{7}{10}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)\right]^{10/7}. \tag{10}$$

Из сопоставления при $\mathrm{Re} = \infty$ решений по спектру Кармана и Лыткина–Черных $\frac{\Lambda_0}{u_0 t_0} = 0.351$ [8]. Тогда из (8) следует

$$\frac{u_0^2}{u^2} \cong \left[1 + \left(\frac{t}{t_0} - 1\right)\right]^{10/7} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{10/7},$$

что совпадает с соотношением Колмогорова.

Для других значений чисел Рейнольдса в силу зависимости $\mathrm{Re}_0 = \mathrm{Re}_\lambda|_{t=t_0} = \frac{u_0\lambda_0}{\nu} = \frac{u_0\lambda_0^2}{\nu\lambda_0}$, учитывая, что $\lambda_0 = \sqrt{10}\sqrt{\nu t}$, получим $\mathrm{Re}_0 = \frac{u_0 10\nu t_0}{\nu\lambda_0} = \frac{u_0 t_0}{\Lambda_0}\frac{10\Lambda_0}{\lambda_0}$. Откуда $\frac{\Lambda_0}{u_0 t_0} = \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left(10\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}\right)$. Величина $\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\Lambda}{\lambda}(\mathrm{Re}_\lambda)$ определяется по интерполяционной зависимости обобщенной модели Кармана для спектра [13]. В начальный момент времени $\frac{\Lambda_0}{\lambda_0} = 1.23 + 0.0351\sqrt{\mathrm{Re}_0}\left(\sqrt{\mathrm{Re}_0} - 1\right)$. Для согласования значений постоянных и используемых аппроксимаций в выражении $\frac{\Lambda}{\lambda}$ принято значение постоянной 0.0351 вместо 0.040 у Дрисколла и Кеннеди. Таким образом,

$$\frac{u_0 t_0}{\Lambda_0} = \left(\frac{12.3}{\mathrm{Re}_0} + 0.351 - \frac{0.351}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right)^{-1}. \tag{11}$$

При $\frac{t}{t_0} - 1 \ll 1$, раскладывая выражение в правой части (8) в ряд по степеням $\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)$ и учитывая (11), получаем

$$\frac{u_0^2}{u^2} = 1 + A\left(\frac{t}{t_0} - 1\right), \qquad (12)$$

где $A = (2c)\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mathrm{Re}_0}{12.3 + 0.351\,\mathrm{Re}_0 - 0.351\sqrt{\mathrm{Re}_0}}$.

И при $\frac{\Lambda_0}{u_0 t_0} = 0.502$ (что отвечает $\mathrm{Re}_0 \approx 63$, соответственно $A \cong 1$) из (12) получаем приближенное равенство $\frac{u_0^2}{u^2} \approx 1 + \left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = \frac{t}{t_0}$. При иных значениях числа Рейнольдса это соотношение — приближенное. Мерой неточности может служить продолжительность начального периода.

Как показывают расчеты (рис. 1), значение величины $(2c)\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{u_0 t_0}{\Lambda_0} \cdot \frac{7}{10}$, равной $0.7A$, при числах Рейнольдса, превышающих 800, становится близко к единице. Тем не менее, на временах, соответствующих $\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) \in (0; 0.5)$, с точностью до 4% зависимость отношения $\frac{u_0^2}{u^2}$ от $\frac{t}{t_0}$ продолжает оставаться линейной (рис. 2). Это согласуется с предположением Бэтчелора об универсальности закона убывания энергии на начальном этапе вырождения однородной изотропной турбулентности.

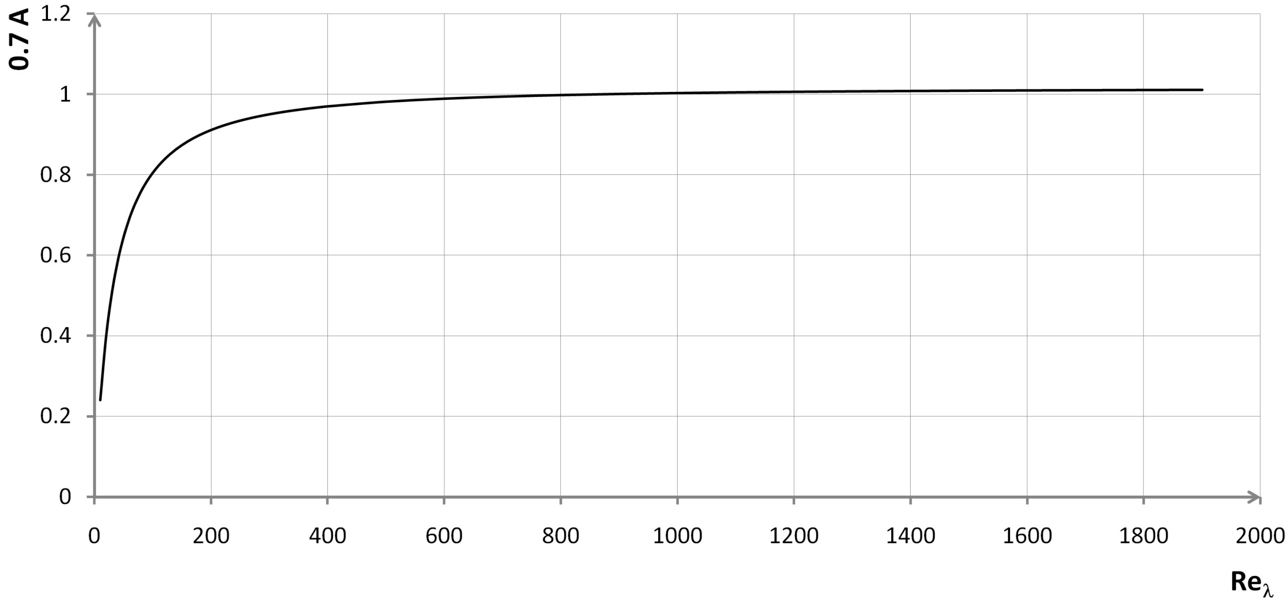

Рис. 1. Зависимость коэффициента $A * 0.7$ от числа Рейнольдса Re_λ

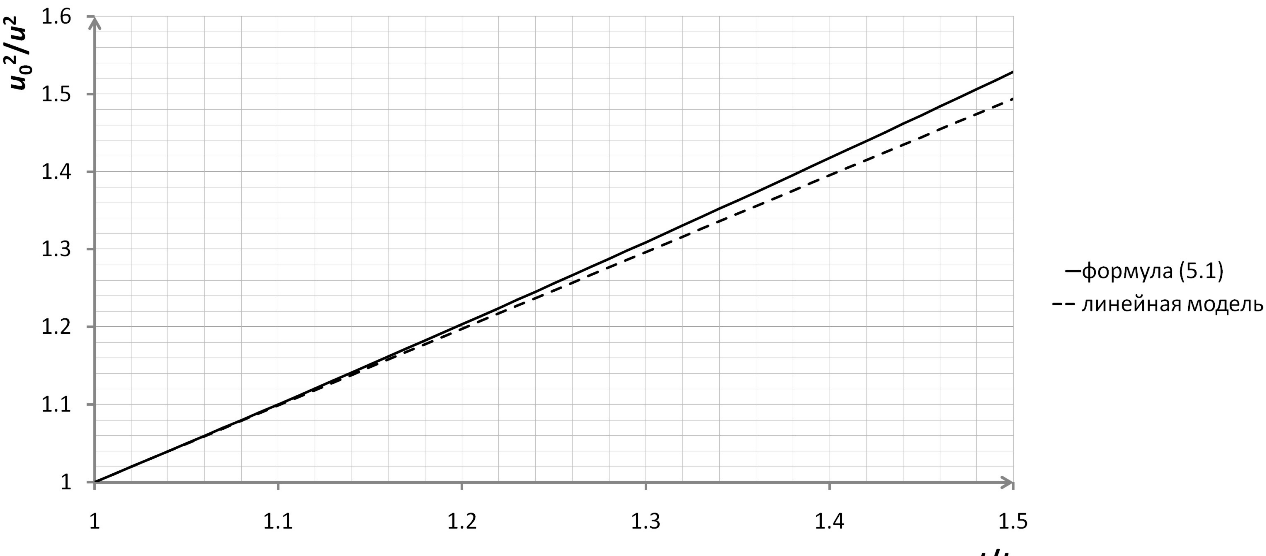

Рис. 2. Вырождение скорости на начальном этапе для $\mathrm{Re}_\lambda = 1000$

VI. Дальнейшее поведение скорости

При малых значениях Re_λ в потоке происходит поочередная смена турбулентного и вязкого режимов. В рамках применимости степенных зависимостей согласно принятой в настоящей работе модели из (2) и (9) получаем

$$\frac{u^2}{u_0^2} = \gamma \cdot \frac{u_T^2}{u_0^2} + (1-\gamma)\cdot\frac{u_\nu^2}{u_0^2}; \quad \gamma = \gamma_0 \frac{1}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{3/7}}.$$

Для чисто турбулентного режима, как отмечалось ранее, справедливо $\frac{u_T^2}{u_0^2} = \frac{1}{(t/t_0)^{10/7}}$. В течение длительного промежутка времени $\frac{u^2}{u_0^2} \approx \approx \gamma_0 \frac{1}{(t/t_0)^{3/7}} \cdot \frac{1}{(t/t_0)^{10/7}} \approx \frac{1}{(t/t_0)^{13/7}}$, т.е. затухание скорости пропорционально $\frac{1}{(t/t_0)^2}$ — зависимости, указанной в работе [14]. С ростом времени степенные зависимости становятся непригодны, что видно по зависимости от времени t для отношения $\frac{\Lambda}{\lambda}$: $\frac{\Lambda}{\lambda} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1.23$ [1]. Используя инварианты Лойцянского, получаем $\frac{u_T^2}{u_0^2} = \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)^5 = = \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)^5 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^5 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^5 \sim \frac{u_\nu^2}{u_0^2} = \frac{1}{(t/t_0)^{5/2}}$ при $\frac{t}{t_0} \to \to \infty$.

Кроме того, из-за убывания со временем коэффициента перемежаемости (9) величина $\gamma \cdot \frac{u_T^2}{u_0^2}$ с некоторого момента времени становится меньше величины $\frac{u_\nu^2}{u_0^2} = \frac{1}{(t/t_0)^{5/2}}$, т.е турбулентный режим затухает быстрее вязкого.

VII. Заключение

Предложенная в настоящей работе модель турбулентного потока с перемежаемостью качественно правильно описывает вырождение скорости потока в первые моменты времени на начальном этапе. Тем не менее стоит отметить, что рассматриваемая модель дает лишь общий характер универсальной зависимости в ограниченном интервале времени и груба для описания поведения потока вблизи самой решетки.

Литература

1. *Хинце И.О.* Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.

2. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. – М.: ИЛ, 1955. – 137 с.

3. *Седов Л.И.* Методы подобия размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4. *Онуфриев А.Т., Пыркова О.А.* Задача о затухании слабой турбулентности с учетом явления перемежаемости // Проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2009. – С. 126–134.

5. *Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т., Пыркова О.А.* Задача о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явления перемежаемости // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2009. – С. 124–135.

6. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1967.

7. *Лойцянский Л.Г.* Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока // Труды ЦАГИ. – 1939. – Вып. 440. – С. 3–23.

8. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Об одном способе замыкания уравнения Кармана–Ховарта // Динамика сплошной среды: сб. ст. / СО АН, ин-т Гидродинамики. – Новосибирск, 1976. – Вып. 27. – С. 124–130.

9. *Онуфриев А.Т.* Описание турбулентного переноса. Неравновесные модели: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1995. – 170 с.

10. *Коробицина К.Л., Черных Г.Г.* О численном моделировании заключительного периода вырождения однородной изотропной турбулентности // Моделирование в механике / СО АН. – Новосибирск, 1992. – Т. 6(23), № 3. – С. 77–86.

11. *Колмогоров А.Н.* К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // Доклады АН СССР, 1941. – Т. 31, № 6. – С. 538–541.

12. *Лойцянский Л.Г.* Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обменов в турбулентном движении // Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М.-Л.: АН, 1962. – С. 143–166.

13. *Driscol, Kennedy.* Model for the turbulent energy spectrum // Phys. Fl. – 1983. – V. 2, N 5. – P. 1228.

14. *Ling C., Huang T.T.* Decay of Weak Turbulence // Phys. Fluids. – 1970 – V. 13, N 12. – P. 2912–2920.

Поступила в редакцию 13.01.2011