

УДК 535.14

М.А. Анисимов¹, А.А. Колесников¹, В.И. Манько²¹ Московский физико-технический институт (государственный университет)
² Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Неравенство Белла в системах с числом частиц $m = 2, 3, 4$

В рамках томографического подхода в работе исследуется зависимость возможного нарушения неравенства Белла от числа частиц для суперпозиции квантовых осцилляторов вида $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |n\rangle_1 |n\rangle_2)$.

Ключевые слова: неравенство Белла, квантовая томограмма, запутанность.

I. Введение

Квантовые состояния делятся на два класса: запутанные и сепарабельные [1]. Запутанные состояния отличаются от сепарабельных, в частности, тем, что могут нарушать неравенство Белла [2]. Существует критерий сепарабельности квантовых состояний [3, 4], являющийся необходимым, но не являющийся достаточным условием сепарабельности. Проблема запутанности квантовых состояний (нахождение критерия и меры запутанности) в окончательном виде не решена до сих пор. Поэтому критерий и свойства запутанных состояний, в частности, связь запутанности с нарушением или выполнением неравенства Белла [2] для различных экспериментально реализуемых квантовых состояний, заслуживают подробного изучения. В рамках томографического подхода в работе исследуется зависимость возможного нарушения неравенства Белла от числа частиц для состояния вида $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |n\rangle_1 |n\rangle_2)$.

II. Запутанные состояния

В квантовой механике состояния подразделяются на запутанные и сепарабельные [1, 5]. В частности, для системы из двух частиц с матрицами плотности $\rho_k^{(1)}$ и $\rho_k^{(2)}$ сепарабельное состояние этих двух частиц описывается матрицей плотности ρ , представимой в виде выпуклой суммы тен-

зорных произведений матриц $\rho_k^{(1)}$ и $\rho_k^{(2)}$:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}, \quad (1)$$

с коэффициентами $p_k \geq 0$, удовлетворяющими условию нормировки

$$\sum_k p_k = 1.$$

Напротив, состояния, не представимые в виде (1), носят названия запутанных. Примерами запутанных состояний являются состояние ЭПР пары: $|\psi\rangle_{EPR} = (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2) / \sqrt{2}$, [6] — и чётные и нечётные когерентные состояния (так называемый кот Шредингера): $|\psi\rangle_{Sc} = N(|\alpha e^{i\varphi}\rangle \pm |-\alpha e^{-i\varphi}\rangle) / \sqrt{2}$. Запутанность является одним из наиболее интересных свойств, принципиально отличающих квантово-механическое состояние от классического.

В настоящей работе рассматривается связь запутанности с возможным нарушением неравенства Белла в рамках томографического подхода [7, 8].

III. Квантовая томография

Помимо стандартных методов описания состояния посредством матрицы плотности и волновой функции в квантовой механике вводятся функция Вигнера $W(q,p)$ [9]:

$$W(q,p) = \int \psi(q + \frac{u}{2}) \psi^*(q - \frac{u}{2}) e^{-ipu} du \quad (2)$$

и симплектическая томограмма $\omega(X, \mu, \nu)$ [7] (для двумодового случая):

$$\omega(X, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int W(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp, \quad (3)$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — параметры симплектического преобразования. Функции (2) и (3) также полностью описывают систему и позволяют восстановить как матрицу плотности, так и волновую функцию. При этом симплектическая томограмма (3) является плотностью вероятности случайной действительной величины X и обладает всеми свойствами классической плотности вероятности, будучи действительной положительной величиной, нормированной на единицу.

Таким образом, вероятность того, что при измерении компоненты вектора $X = (X_1, X_2)$ принимают положительные или отрицательные значения, определяется редуцированными томограммами $\omega_{\pm\pm}(\mu, \nu)$:

$$\omega_{++}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int_0^\infty dX_1 \int_0^\infty \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) dX_2, \quad (4)$$

$$\omega_{--}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int_{-\infty}^0 dX_1 \int_{-\infty}^0 \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) dX_2, \quad (5)$$

причём индекс + или — для каждой компоненты вектора X соответствует знаку бесконечности в пределах интегрирования. Аналогично, следующие выражения являются вероятностями того, что X_1 и X_2 разного знака:

$$\omega_{+-}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int_0^\infty dX_1 \int_{-\infty}^0 \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) dX_2, \quad (6)$$

$$\omega_{-+}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int_{-\infty}^0 dX_1 \int_0^\infty \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) dX_2. \quad (7)$$

Представленная конструкция вероятностей, определяемая формулами (4) — (7), годится для описания двухчастичной системы. Увеличение числа частиц в системе приводит к увеличению размерности фазового пространства $D = 4$ ($m = 2$) $\rightarrow D = 6$ ($m = 3$) $\rightarrow D = 8$ ($m = 4$), что в свою очередь увеличивает число возможных комбинаций при измерении знака компонент вектора X до 8 ($m = 3$):

$$\omega_{+++}(\mu, \nu) = \int_0^\infty dX_1 \int_0^\infty dX_2 \times \int_0^\infty \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2, X_3, \mu_3, \nu_3) dX_3, \quad \Omega_{m=3} = (\omega_{+++}, \omega_{++-}, \omega_{+-+}, \omega_{-++}, \omega_{---}, \omega_{--+}, \omega_{-+-}, \omega_{- - -}) \quad (8);$$

и до 16 ($m = 4$):

$$\omega_{++++}(\mu, \nu) = \int_0^\infty dX_1 \int_0^\infty dX_2 \int_0^\infty dX_3 \times \int_0^\infty \omega(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2, X_3, \mu_3, \nu_3, X_4, \mu_4, \nu_4) dX_4, \quad \Omega_{m=4} = \begin{pmatrix} \omega_{++++}, \omega_{-++++}, \omega_{+---+}, \omega_{+--+}, \\ \omega_{+++}, \omega_{-++}, \omega_{-+-}, \omega_{- - -} \\ \omega_{+---}, \omega_{-+-}, \omega_{+---}, \omega_{- - -}, \\ \omega_{-+-}, \omega_{- - -}, \omega_{+---}, \omega_{- - -} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Набор комбинаций для трёхчастичных ($\Omega_{m=3}$) и четырёхчастичных ($\Omega_{m=4}$) систем представлен выражениями (8) и (9) соответственно.

Однако неравенство Белла сформулировано для системы с числом частиц $m = 2$, поэтому, чтобы изучать проблему запутанности в системах с большим количеством частиц, необходимо переопределить редуцированные томограммы $\omega_{\pm\pm}$. В данной работе мы предлагаем определять $\omega_{\pm\pm}$ как суперпозицию редуцированных томограмм из наборов (8) и (9). К примеру, предлагается использовать несимметричные комбинации:

$$\omega_{++}(\mu, \nu) = \omega_{+++} + \omega_{++-} + \omega_{-++}, \quad \omega_{+-}(\mu, \nu) = \omega_{-+-} \quad (10)$$

для трёхчастичной системы и

$$\begin{aligned}\omega_{++}(\mu, \nu) &= \omega_{++++} + \omega_{-+++} + \omega_{-++-} + \\ &+ \omega_{+-++} + \omega_{+--+} + \omega_{+--+} + \omega_{----}, \\ \omega_{+-}(\mu, \nu) &= \omega_{-+-} \quad (11)\end{aligned}$$

для четырёхчастичной соответственно. Две другие томограммы (ω_{-+}, ω_{--}) получаются при замене в (10) и (11) индекса + на -.

Представленный томографический подход и сами вероятности (4) — (11) используются при выводе параметра Белла.

IV. Неравенство Белла

Эйнштейн, Подольский и Розен ещё в 1935 году обратили внимание на существование квантовых корреляций между двумя удалёнными частицами. Позже Белл из общих соображений сформулировал неравенство Белла [2], которое можно использовать для детектирования запутанных состояний. При этом нарушение неравенства Белла указывает в пользу наличия в составной системе чисто квантовых корреляций.

Существует большое количество возможных форм неравенства Белла. Такое разнообразие в основном связано с различными видами оптических экспериментов по проверке его выполнения или нарушения. В данной работе рассматривается неравенство Белла в форме CHSH (Clauser–Horne–Shimony–Holt) [10]. Для удобства далее приводится анализ только для состояния двух частиц. Определим функцию корреляции, используя (4) — (7):

$$\begin{aligned}E(\mu, \nu) &= \omega_{++}(\mu, \nu) - \omega_{+-}(\mu, \nu) - \\ &- \omega_{-+}(\mu, \nu) + \omega_{--}(\mu, \nu).\end{aligned}$$

В случае системы из двух частиц со спинами $\frac{1}{2}$ функция $E(\mu, \nu)$ определяет корреляцию проекций спинов этих частиц на различные направления. Таким образом, для четырёх возможных направлений: (μ_1, ν_1) , (μ_2, ν_2) , (μ'_1, ν'_1) , (μ'_2, ν'_2) неравенство Белла в CHSH форме имеет вид

$$\begin{aligned}B \equiv & |E(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) + E(\mu_1, \nu_1, \mu'_2, \nu'_2) + \\ & + E(\mu'_1, \nu'_1, \mu_2, \nu_2) - E(\mu'_1, \nu'_1, \mu'_2, \nu'_2)| \leq 2. \quad (12)\end{aligned}$$

Заметим, что нарушение неравенства (12) с необходимостью свидетельствует о запутанности исследуемого состояния, в то время как при его выполнении нельзя сделать вывод о сепарабельности состояния.

Рассмотрим возможное нарушение неравенства Белла на примере суперпозиции квантовых осцилляторов вида $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |n\rangle_1 |n\rangle_2)$.

V. Результаты

Для состояния

$$|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |n\rangle_1 |n\rangle_2)$$

функция Вигнера задается выражением

$$\begin{aligned}W(q, p) &= \frac{e^{-q_1^2 - q_2^2 - p_1^2 - p_2^2}}{2\pi^2} \times \\ &\times \left(1 + \frac{2^n}{n!} (q_1 - ip_1)^n (q_2 - ip_2)^n + \right. \\ &+ \frac{2^n}{n!} (q_1 + ip_1)^n (q_2 + ip_2)^n + \\ &\left. + L_n(2q_1^2 + 2p_1^2) L_n(2q_2^2 + 2p_2^2) \right),\end{aligned}$$

где $L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^n)$ — полином Лагерра. Выполнив последовательно анализ (3) — (7), получим следующий набор редуцированных томограмм:

$$\begin{aligned}\omega_{++,-}(\mu, \nu) &= \\ &= \frac{1}{4} + \frac{H_{n-1}^2(0)}{2^{n+1}\pi n!} ((\mu_1 + i\nu_1)^n (\mu_2 + i\nu_2)^n + \\ &+ (\mu_1 - i\nu_1)^n (\mu_2 - i\nu_2)^n), \\ \omega_{+,-,+}(\mu, \nu) &= \\ &= \frac{1}{4} - \frac{H_{n-1}^2(0)}{2^{n+1}\pi n!} ((\mu_1 + i\nu_1)^n (\mu_2 + i\nu_2)^n + \\ &+ (\mu_1 - i\nu_1)^n (\mu_2 - i\nu_2)^n),\end{aligned}$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ — полином Эрмита. Параметр Белла для состояния $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |n\rangle_1 |n\rangle_2)$ представлен на рис. 1. Максимальное значение B_{\max} для соответствующих параметров не превосходит 2. Таким образом, в рамках выполненного анализа для указанного состояния нарушение неравенства Белла не зарегистрировано.

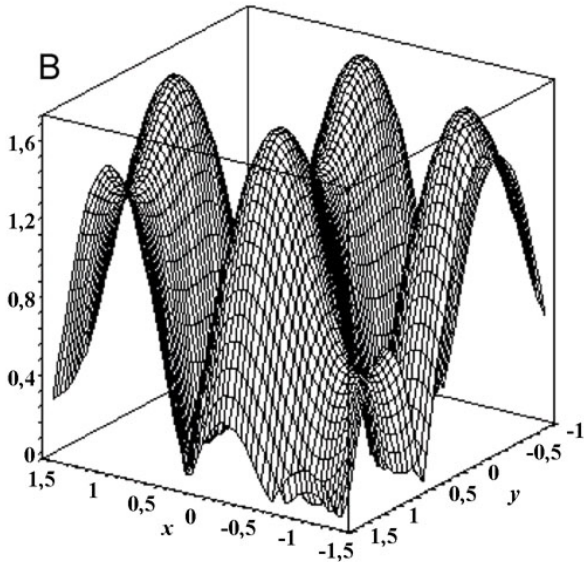


Рис. 1. Параметр Белла $B(x,y)$ для двухчастичной суперпозиции $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |n\rangle_1|n\rangle_2)$ ($\mu_1 = \cos(x)$, $\nu_1 = \sin(x)$, $\mu_2 = \cos(2x)$, $\nu_2 = \sin(2x)$, $\mu'_1 = \cos(y)$, $\nu'_1 = \sin(y)$, $\mu'_2 = \cos(2y)$, $\nu'_2 = \sin(2y)$, $n = 1$)

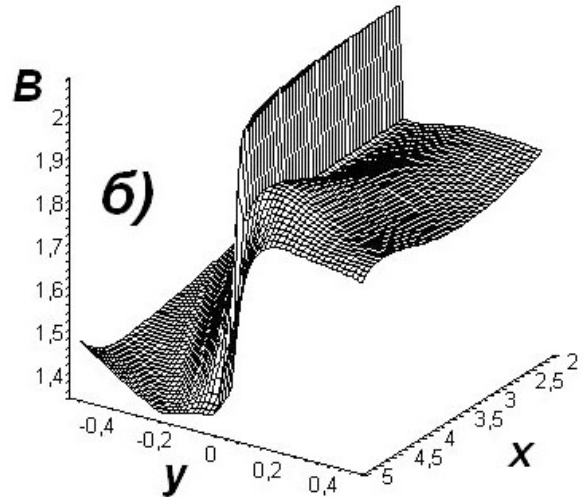
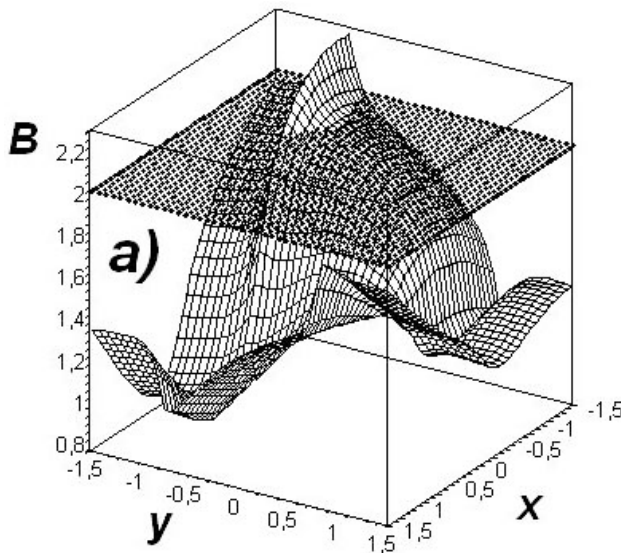


Рис. 2. Параметр Белла $B(x,y)$ для систем (а) $|\Psi\rangle_{m=3}$ ($\mu_1 = \cos(x)$, $\nu_1 = \sin(x)$, $\mu_2 = \exp(2y)$, $\nu_2 = \exp(-y/5)$, $\mu_3 = \exp(3x)$, $\nu_3 = \exp(-x/3)$, $\mu'_1 = \exp(5x)$, $\nu'_1 = 0,2$, $\mu'_2 = \cos(2y)$, $\nu'_2 = \sin(y/5)$); (б) $|\Psi\rangle_{m=4}$ ($\mu_1 = \cos(x)$, $\nu_1 = \sin(xy)$, $\mu_2 = \exp(x^2)$, $\nu_2 = \sin(2y)$, $\mu_3 = \ln|xy|$, $\nu_3 = x^y$, $\mu_4 = x^2$, $\nu_4 = y^2$, $\mu'_1 = \sin(\exp(y^2))$, $\nu'_1 = \exp(x^2y^2)$, $\mu'_2 = 1/x + 1/y$, $\nu'_2 = \sinh(x)$, $n = 1$)

VI. Заключение

Подводя итог выполненного анализа, укажем, что для двухчастичного состояния нарушение неравенства Белла не зарегистрировано. Напротив, для состояний $|\Psi\rangle_{m=3}$ и $|\Psi\rangle_{m=4}$ в рамках представленного способа определения редуцированных томограмм (10), (11) зафиксиро-

вано нарушение неравенства Белла. При этом найденное максимальное нарушение $B_{\max} \sim 2,26$ не превышает критерий Цирельсона $2\sqrt{2}$ [11].

$$|\Psi\rangle_{m=3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|n\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 +$$

$$+ |0\rangle_1|n\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|n\rangle_3)$$

и

$$|\Psi\rangle_{m=4} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1|n\rangle_2|n\rangle_3|n\rangle_4 +$$

$$+ |n\rangle_1|0\rangle_2|n\rangle_3|n\rangle_4 + |n\rangle_1|n\rangle_2|0\rangle_3|n\rangle_4 +$$

$$+ |n\rangle_1|n\rangle_2|n\rangle_3|0\rangle_4)$$

и набором несимметричных комбинаций (10) и (11) параметр Белла представлен на рис. 2а ($m = 3$) и рис. 2б ($m = 4$) соответственно. Обнаружено нарушение неравенства Белла с максимальным значением $B_{\max} \sim 2,26$ ($m = 3$) и $B_{\max} \sim 2,06$ ($m = 4$).

Литература

1. *Schrödinger E.* // Naturwissenschaften. — 1935. — V. 23. — P. 807.

2. *Bell J.S.* On the Einstein Podolski Rosen Paradox // *Physics*. — 1965. — V. 1. — P. 195.

3. *Peres A.* Separability criterion for density matrices // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — V. 77. — P. 1413.

4. *Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R.* Mixed-state entanglement and distillation: is there a «bound» entanglement in nature? // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — V. 80. — P. 5237.

5. *Баргатин И.В., Гришанин Б.А.* [и др.]. Запутанные квантовые состояния атомных систем // *УФН*. — 2001. — Вып. 6. — С. 625.

6. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // *Phys. Rev.* — 1935. — V. 47. — P. 777.

7. *Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // *Phys. Lett. A*. — 1996. — V. 213. — P. 1.

8. *Mancini S., Man'ko V.I., Shchukin E.V., Tombesi P.* A tomographic approach to quantum nonlocality // *J. Opt. B*. — 2003. — V. 5. — P. S333.

9. *Wigner E.* On the quantum correction to the thermodynamic equilibrium // *Phys. Rev.* — 1932. — V. 40. — P. 749.

10. *Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A.* Proposed experiment to test local hidden-variable theories // *Phys. Rev. Lett.* — 1969. — V. 23. — P. 880.

11. *Cirel'son B.S.* Quantum generalizations of Bell inequality // *Lett. Mat. Phys.* — 1980. — V. 4. — P. 93.

Поступила в редакцию 29.12.2008.