

УДК 532.525

З. М. Маликов¹, А. Л. Стасенко^{2,3}¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз²Московский физико-технический институт (государственный университет)³Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

Асимптотика затопленной струи и процессы переноса в ней

Найдено решение стационарных уравнений Навье–Стокса для осесимметричной струи несжимаемой жидкости, истекающей в затопленное пространство, с точностью до третьего порядка по обратным степеням расстояния от точечного источника. Возникающий при этом парадокс нулевого расхода при конечном значении импульса преодолевается введением конечной пространственно-угловой области турбулентного течения для «сильной» струи. Исследованы пространственная эволюция циркуляции вязкой закрученной струи, а также диффузия примеси и распространение тепла.

Ключевые слова: ламинарный, вязкий, закрученный, турбулентный поток, перенос тепла и примеси.

1. Введение

Затопленная (в том числе закрученная) струя несжимаемой жидкости благодаря малому числу определяющих параметров является, с одной стороны, классическим объектом теоретического исследования автомодельных асимптотических решений [1–5]. С другой стороны, она представляет интерес для проведения теоретических исследований и модельных экспериментов, будучи «исходным фоном», на котором происходят различные физические явления [например, 6]. Практические применения многочисленны — форсунки двигателей, струйно-вихревые следы летательных аппаратов, нанесение покрытий, тестирование программ численного исследования сложных газодинамических потоков [например, 7–9]. Струйные потоки в затопленном пространстве изучены многими исследователями, но, поскольку подобные течения используются во многих отраслях техники и технологии, значимость их исследования не утратила силу и по сей день.

Динамика свободной струи, истекающей в затопленное пространство, математически строго впервые рассмотрена в работе [1], где найдены параметры потока в первом приближении. Следующее приближение получено в [2]. В настоящей статье исследована газодинамика струи в третьем приближении, а также рассмотрен перенос тепла и взвешенных частиц. Кроме того, исследована турбулентная струя и проведено сравнение полученных аналитических результатов с классическими работами.

2. Динамика свободной струи в затопленном пространстве

Следуя работам [1], используем сферическую систему координат r, θ, ψ . Решение системы уравнений Навье–Стокса ищем в виде разложения по отрицательным степеням радиуса r . Первые два приближения для компонент скорости и давления имеют вид

$$V_R = \frac{1}{r}F(\theta) + \frac{1}{r^2}F_0(\theta), \quad V_\theta = \frac{1}{r}f(\theta), \quad p = \frac{1}{r^2}\pi(\theta) + \frac{1}{r^3}\pi_0(\theta), \quad (1)$$

где

$$f(\theta) = -\frac{2\nu \sin \theta}{A - \cos \theta},$$

$$F(\theta) = 2\nu \left[\frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right],$$

$$F_0(\theta) = \nu\beta \left[1 - \frac{3(A^2 - 1)}{(A - \cos\theta)^2} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{A(A - \cos\theta)^3} \right],$$

$$\pi(\theta) = 4\rho\nu^2 \frac{A \cos\theta - 1}{(A - \cos\theta)^2},$$

$$\pi_0(\theta) = 2\nu F_0(\theta).$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, A — безразмерная постоянная интегрирования, которая находится из интегрального соотношения для полного потока импульса:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \Pi_{rr} r^2 \cos\theta \sin\theta d\theta.$$

Величина Π_{rr} равна

$$\Pi_{rr} = \frac{4\rho\nu^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)}{(A - \cos\theta)^4} - \frac{A}{A - \cos\theta} \right\}.$$

Интегрируя, получим известное выражение [1]

$$I = 8\pi A\rho\nu^2 \left[\frac{2(3A^2 + 1)}{3(A^2 - 1)} - A \ln \frac{A+1}{A-1} \right].$$

Третье приближение будем искать в виде

$$V_r = \frac{1}{r}F(\theta) + \frac{1}{r^2}F_0(\theta) + \frac{1}{r^3}F_1(\theta),$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}f(\theta) + \frac{1}{r^3}f_1(\theta), \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{r^2}\pi(\theta) + \frac{1}{r^3}\pi_0(\theta) + \frac{1}{r^4}\pi_1(\theta).$$

Уравнения Навье–Стокса в сферических координатах имеют вид

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} =$$

$$= \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin\theta) \right],$$

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \quad (3)$$

$$= \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2\theta} \right],$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta V_\theta) = 0.$$

Для удобства введем переменную $t = A - \cos\theta$ и вспомогательную функцию

$$\psi_1 = \frac{f_1(\theta)}{\sin\theta}.$$

В новой переменной известные функции имеют вид

$$\sin^2\theta = 1 - A^2 + 2At - t^2, \quad f(\theta) \sin\theta = 2\nu \left(\frac{A^2 - 1}{t^2} - 2A + t \right), \quad (4)$$

$$F(t) = 2\nu \left(\frac{A^2 - 1}{t^2} - 1 \right), \quad F_0(t) = \beta \left[1 - \frac{3(A^2 - 1)}{t^2} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{At^3} \right].$$

После подстановки выражений (1) и (2) в (3) будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из уравнения неразрывности системы (3) получим следующую связь между неизвестными функциями:

$$F_1(t) = (\sin^2\theta \psi_1(t))',$$

где штрих обозначает производную по новой переменной t . Подставляя все эти выражения в уравнения движения системы (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 4\pi_1(t) &= -2F_1(t)(2F(t)+1) + f(\theta)\sin\theta(F_1'(t) - 2\psi_1(t)) + \\ &\quad + \psi_1(t)F'(t)\sin^2\theta - (F'(t)\sin^2\theta)' - 2F_0^2(t), \\ \pi_1(t) &= \int 2\psi_1(t)(F(t)+3)dt + 3F_1(t) - \psi_1(t)f(\theta)\sin\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ее решение будем искать в виде

$$\psi_1(t) = a + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3}.$$

Учтем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta = 1 - A^2 + 2At - t^2, \\ f\sin\theta &= \nu \left(2\frac{A^2-1}{t} - 4A + 2t \right), \\ F_0^2 &= \nu^2\beta^2 \left[4\frac{(A^2-1)^4}{A^2t^6} - 12\frac{(A^2-1)^3}{At^5} + 9\frac{(A^2-1)^2}{t^4} + 4\frac{(A^2-1)^2}{At^3} - 6\frac{(A^2-1)}{t^2} \right]. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в систему (5) получим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 18(A^2-1)a + 6b &= 0, \\ -12A(A^2-1)^2a + 4ab &= -6\nu\beta^2(A^2-1), \\ 2(A^2-1)^2a + \frac{2}{3}(A^2-1)b + 8ac &= 4\nu\beta^2\frac{(A^2-1)^2}{A}, \\ -4A(A^2-1)b + 12A^2c &= 9\nu\beta^2(A^2-1)^2, \\ -24A(A^2-1)c &= -12\nu\beta^2\frac{(A^2-1)^3}{A}, \\ 8(A^2-1)^2c &= 4\nu\beta^2\frac{(A^2-1)^4}{A^2}. \end{aligned}$$

Решение, удовлетворяющее данным уравнениям, имеет вид

$$a = \frac{\beta^2}{4A}, \quad b = -\frac{3\beta^2(A^2-1)}{4A}, \quad c = \frac{\beta^2(A^2-1)^2}{2A^2}.$$

Таким образом, искомая функция равна

$$\psi_1(t) = \frac{\beta^2}{4A} - \frac{3\beta^2(A^2-1)}{4At^2} + \frac{\beta^2(A^2-1)^2}{2A^2t^3}.$$

Через данную функцию найдем искомые неизвестные в исходных параметрах:

$$\begin{aligned} f_1 &= \nu\beta^2 \left[\frac{(A^2-1)^2}{2A^2(A-\cos\theta)^3} - \frac{3}{4}\frac{A^2-1}{A(A-\cos\theta)^2} + \frac{1}{4A} \right] \sin\theta, \\ F_1 &= \nu\beta^2 \left[\frac{3}{2}\frac{(A^2-1)^3}{A^2(A-\cos\theta)^4} - \frac{7}{2}\frac{(A^2-1)^2}{A(A-\cos\theta)^3} + \frac{(4A^2-1)(A^2-1)}{2A^2(A-\cos\theta)^2} + \frac{\cos\theta}{2A} \right]. \end{aligned}$$

3. Перенос циркуляции в струйном потоке

Большой практический интерес представляет закрученная струя, которая используется, например, в камерах смешения и сгорания топлив [7]. В данном параграфе рассматривается распространение циркуляции закрученного потока в затопленном пространстве. Для этого рассмотрим уравнение Навье–Стокса для осесимметричного случая:

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\varphi}{r} + \frac{V_\theta V_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta = \frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{V_\varphi}{\sin^2 \theta} \right].$$

Введя циркуляцию $\Gamma = V_\varphi r \sin \theta$, преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r \Gamma)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \Gamma \sin \theta) = \nu \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right]. \quad (6)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$\Gamma = \frac{G}{r} + \frac{G}{r^2}.$$

Подставляя в (6) выражение для компонент скоростей в виде

$$V_r = \frac{F(\theta)}{r} + \frac{F_0(\theta)}{r^2}, \quad V_\theta = \frac{f(\theta)}{r},$$

получим уравнения для искоемых неизвестных

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (f G \sin \theta) &= \nu \left(2G \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} - \cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right), \\ -F G_0 - F_0 G + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (f \sin \theta G_0)}{\partial \theta} &= \nu \left(6G_0 + \frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Записывая правую часть первого уравнения (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (f G \sin \theta) = \nu \left(2G \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} - \cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) = \nu \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} - 2G \cos \theta \right),$$

после интегрирования получим

$$G = \nu (G' - 2G \operatorname{ctg} \theta) + \operatorname{const}.$$

Постоянная интегрирования равна нулю, т.к. $V_\varphi \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$, следовательно, $G = o(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$ и $G' = \frac{G}{\theta}$. Полученное уравнение интегрируется вторично, в результате чего получим искомую неизвестную:

$$G = \gamma \frac{\sin^2 \theta}{(A - \cos \theta)^2}.$$

Постоянную интегрирования γ находим из условия сохранения удельного момента импульса потока L_0 на срезе форсунки:

$$2\pi \int_0^\pi F(\theta) G(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Проведя интегрирование, получим соотношение

$$L_0 = 8\pi \nu \gamma \left[\frac{2}{3(A^2 - 1)} + 2 - A \ln \frac{A+1}{A-1} \right].$$

Для решения второго уравнения системы (7), как и в предыдущем параграфе, введем переменную $t = A - \cos \theta$. Тогда уравнение запишется в виде

$$F G_0 - F_0 G + (f \sin \theta G_0)' = \nu (6 G_0 + \sin^2 \theta G_0'').$$

После подстановки сюда известных функций (4), получим

$$-2 \left(2 \frac{A^2 - 1}{t^2} + 1 \right) G_0 + \left(2 \frac{A^2 - 1}{t} - 4A + 2t \right) G_0' + (A^2 - 1 - 2At + t^2) G_0'' = \frac{F_0 G_0}{\nu},$$

где

$$F_0 G_0 = \nu \beta \gamma \left[-2 \frac{(A^2 - 1)^3}{At^5} + 7 \frac{(A^2 - 1)^2}{t^4} - 2 \frac{(4A^2 - 1)(A^2 - 1)}{At^3} + 2 \frac{A^2 - 1}{t} + 2 \frac{A}{t} - 1 \right].$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$G_0 = \frac{a}{t^3} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t} + d + et$$

и находим неизвестные коэффициенты

$$a = -\beta \gamma \frac{(A^2 - 1)^2}{A}, \quad b = \frac{5}{2} \beta \gamma (A^2 - 1), \quad c = -\beta \gamma \frac{3A^2 - 1}{2A}, \quad d = -\frac{\beta \gamma}{2}, \quad e = \frac{\beta \gamma}{2A}.$$

В результате

$$\begin{aligned} G_0 &= \beta \gamma \left[-\frac{(A^2 - 1)^2}{At^3} + \frac{5}{2} \frac{A^2 - 1}{t^2} - \frac{3A^2 - 1}{2At} - \frac{1}{2} + \frac{t}{2A} \right] = \\ &= \frac{\beta \gamma \sin^2 \theta}{2A} \left[\frac{1}{A - \cos \theta} + \frac{A}{(A - \cos \theta)^3} - 2 \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^3} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая азимутальная скорость равна

$$V_\varphi = \gamma \frac{\sin \theta}{r^2 (A - \cos \theta)^2} + \frac{\beta \gamma \sin \theta}{2r^3 A} \left[\frac{1}{A - \cos \theta} + \frac{A}{(A - \cos \theta)^3} - 2 \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^3} \right].$$

4. Перенос тепла и взвешенного вещества в струе

Рассмотрим теперь по аналогии с предыдущими параграфами перенос тепла или вещества в струе. Данная задача также имеет большое практическое значение в технике и технологии [7–9]. Пренебрежем такими эффектами, как термодиффузия и конвекция, т.е. рассмотрим классическую задачу переноса тепла и вещества. Поскольку уравнения переноса тепла и концентрации аналогичны, достаточно исследовать, например, задачу о распространении веществ в затопленной струе. Пусть S — концентрация взвешенного вещества в струе, тогда его распространение описывается уравнением

$$V_r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = D \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \right].$$

Будем искать его решение в виде

$$S = \frac{C}{r} + \frac{C_0}{r^2}, \quad V_r = \frac{F}{r} + \frac{F_0}{r^2}, \quad V_\theta = \frac{f}{r}.$$

Как и в предыдущих параграфах, введем переменную t . В результате вместо исходного уравнения переноса получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Sc} (1 - A^2 + 2At - t^2) C'' + \left[2A \left(1 + \frac{1}{2Sc} \right) - t \left(\frac{1}{Sc} + 1 \right) - \frac{A^2 - 1}{t} \right] C' + \left(\frac{A^2 - 1}{t^2} - 1 \right) C &= 0, \\ (1 - A^2 + 2At - t^2) C_0'' + \left[2A(1 + 2Sc) - (1 + Sc)t - 2Sc \frac{A^2 - 1}{t} \right] C_0' + \\ + \left[2(1 - 2Sc) + 4Sc \frac{A^2 - 1}{t^2} \right] C_0 &= -Sc F_0 C. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $Sc = \frac{\nu}{D}$ — число Шмидта. Решение первого уравнения системы (8) будем искать в виде

$$C = K_0 t^m.$$

Подстановка данного выражения в первое уравнение дает

$$m = -2 Sc.$$

Следовательно,

$$C = \frac{K_0}{t^{2Sc}}.$$

Постоянная интегрирования K_0 находится из интегрального соотношения для заданного потока вещества

$$J = 2\pi \int_0^\pi V_r C \sin \theta d\theta.$$

Подставляя полученный результат во второе уравнение системы (8), его правую часть получим в виде

$$-Sc F_0 C = -\frac{Sc \beta K_0}{t^{2Sc}} \left[1 - \frac{3(A^2 - 1)}{t^2} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{At^3} \right].$$

Для решения второго уравнения (8) сделаем замену неизвестного:

$$C_0 = \frac{Y}{t^{2Sc}}.$$

После несложных выкладок получим уравнение

$$(1 - A^2 + 2At - t^2) t^2 Y'' + 2 [Sc(A^2 - 1) - A(2Sc - 1)t + (Sc - 1)t^2] tY' + 2 [Sc(A^2 - 1) - (Sc - 1)t^2] Y = -Sc \beta K_0 \left[t^2 - 3(A^2 - 1) + \frac{2(A^2 - 1)^2}{At} \right],$$

решение которого находим в виде

$$Y = at + b + \frac{c}{t}.$$

Подстановка этого выражения в последнее уравнение позволяет найти искомые коэффициенты, так что

$$C_0 = \frac{\beta K_0}{t^{2Sc}} \left[\frac{2Sc - 1}{2A} t + \frac{1 - 4Sc}{2} + \frac{A^2 - 1}{At} Sc \right].$$

С учетом (5) выпишем найденные решения в сферических координатах:

$$S = \frac{K_0}{r(A - \cos \theta)^{2Sc}} \left\{ 1 + \frac{\beta}{r} \left[\frac{2Sc - 1}{2A} (A - \cos \theta) + \frac{1 - 4Sc}{2} + \frac{A^2 - 1}{A(A - \cos \theta)} Sc \right] \right\}. \quad (9)$$

Аналогично можно записать и выражение для температуры, заменив Sc на Pr , а K_0 — на M_0 — постоянную интегрирования, которая находится из условия сохранения потока тепла (Pr — число Прандтля).

5. Анализ полученных результатов

Таким образом, получены точные решения уравнений Навье–Стокса до третьего члена разложения по радиусу r , а также для переноса циркуляции, тепла и концентрации до второго члена. Эти решения верны для ламинарной струи. Однако здесь возникает известный парадокс нулевого расхода:

$$Q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi \rho r^2 \int_0^\pi V_r \sin \theta d\theta = 2\pi \rho \int_0^\pi F_0(\theta) d\theta = 0. \quad (10)$$

Здесь Q_0 — секундный расход массы из трубки, ρ — плотность газа, которую будем считать постоянной. Полученный результат объясняется тем, что в реальности от 0 до некоторого угла θ_* реализуется турбулентное течение, а вне этой области течение можно считать потенциальным. Однако, как показано, например, в [3], для осесимметричной турбулентной струи ее вязкость можно считать постоянной. Следовательно, полученные результаты можно применить и для турбулентной струи, только во всех интегральных соотношениях интегрирование нужно провести от 0 до θ_* , т.е. потенциальным движением вне турбулентной зоны нужно пренебречь. Тогда из выражения (10) получим

$$Q_0 = 2\pi \rho \int_0^{\theta_*} F_0(\theta) d\theta = -2\pi \nu \beta \rho \sin^2 \theta_* \frac{1 - A \cos \theta_*}{A(A - \cos \theta_*)^2} = \pi \rho U_0 R_0^2. \quad (11)$$

Здесь U_0 — скорость истечения потока из трубки, R_0 — радиус трубки. Отметим, что для турбулентной струи выполняется условие $I/\rho\nu^2 \gg 1$. В этом предельном случае (так называемой «сильной» струи) имеем

$$I = \frac{32\pi\rho\nu^2}{3(A-1)},$$

где $A - 1 \ll 1$. Если ввести параметр $\sigma = \frac{R_0 U_0}{8\nu}$, то коэффициент интегрирования будет равен

$$A = 1 + \frac{32\pi\rho\nu^2}{3I_0} = 1 + \frac{32\nu^2}{3R_0^2 U_0^2} = 1 + \frac{1}{6\sigma^2}, \quad \nu = \frac{R_0 U_0}{4\sigma}.$$

Из выражения (11) находим $\beta = -4\varepsilon\sigma R_0$, где $\varepsilon = \frac{A(A - \cos \theta_*)^2}{(1 - A \cos \theta_*) \sin^2 \theta_*}$.

В таком случае можно считать $\theta \ll 1$ и можно пользоваться оценкой $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$. Если перейти к переменным (η, X) , где

$$\eta = \sqrt{3\sigma} \frac{R}{X},$$

(X — продольное расстояние от источника струи, R — радиус от оси струи), то первые два приближения для продольной скорости потока приблизительно будут равны

$$U_x \approx \frac{F}{X} + \frac{F_0}{X^2} = 3 \frac{\sigma R_0 U_0}{X(1 + \eta^2)^2} \left[1 - 2 \frac{\varepsilon \sigma R_0 (1 - 3\eta^2)}{X(1 + \eta^2)} \right].$$

Данное выражение совпадает с выражением для продольной скорости турбулентной струи, которое, таким образом, является приближением полученных выше выражений для «сильной» струи при условии постоянства коэффициента турбулентной вязкости. При этом возникают две эмпирических константы σ и θ_* .

Для апробации полученных формул проведем сравнение с классическими опытными данными для осевой скорости. Из полученных выражений при $A - 1 \ll 1$ и $\theta = 0$ получим довольно простую формулу:

$$U(x) = \frac{3\sigma U_0 R_0}{X} \left[1 - 2\varepsilon\sigma \frac{R_0}{X} + (2\varepsilon\sigma \frac{R_0}{X})^2 \right].$$

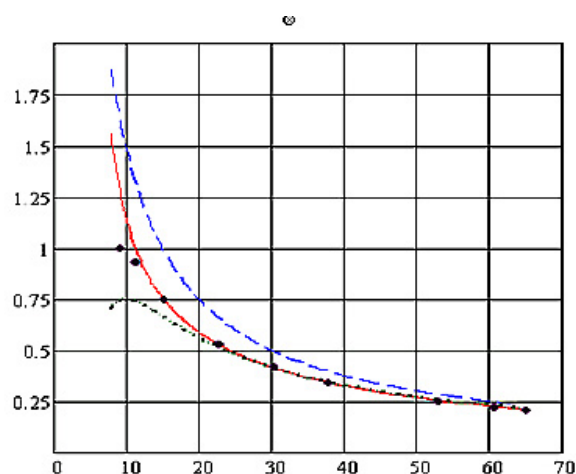


Рис. 1

На рис. 1 дано сравнение результатов расчета по этой формуле (сплошная линия) с опытными данными [3] (показаны точками). Здесь же показаны (пунктир) первое и второе (штрихпунктир) приближения. По оси абсцисс указано безразмерное расстояние от среза форсунки, отнесенное к ее радиусу, а по оси ординат – безразмерная скорость струи, отнесенная к скорости на выходе из трубки. Совпадение с опытными данными хорошее, если положить $\theta_* = 0.5$ рад и $\sigma = 5$.

Рассмотрим выражение (7). Первое приближение

$$S_1 = \frac{K_0}{r(A - \cos \theta)^{2Sc}}$$

для случая турбулентной («сильной») струи принимает вид

$$S_1 \approx \frac{K_0}{X(A - \cos \theta)^{2Sc}}.$$

Для продольной скорости в первом приближении имеем

$$U_1 \approx 2\nu \frac{A^2 - 1}{X(A - \cos \theta)^2}.$$

Из последних двух выражений получим

$$\frac{S_1}{S_{\max}} = \left(\frac{U_1}{U_{\max}} \right)^{Sc}$$

и аналогично,

$$\frac{T_1}{T_{\max}} = \left(\frac{U_1}{U_{\max}} \right)^{Pr}.$$

Эти соотношения получены в [4].

Радиальное распределение концентрации вещества, отнесенной к $S_{\max} = \frac{K_0}{X(A-1)^{2Sc}}$ в функции безразмерного расстояния от оси струи в сечении $\frac{X}{R_0} = 15$ иллюстрирует рис. 2. По оси абсцисс указан безразмерный радиус, а по оси ординат S/S_{\max} (штрихпунктирная линия – первое приближение, сплошная – второе).

Видно, что при учете второго приближения на небольших расстояниях распределение концентрации приобретает вид седла и количественно дает довольно существенную поправку. Заметна поправка и для азимутальной скорости при $X/R_0 = 20$ (см. рис. 3). Здесь по

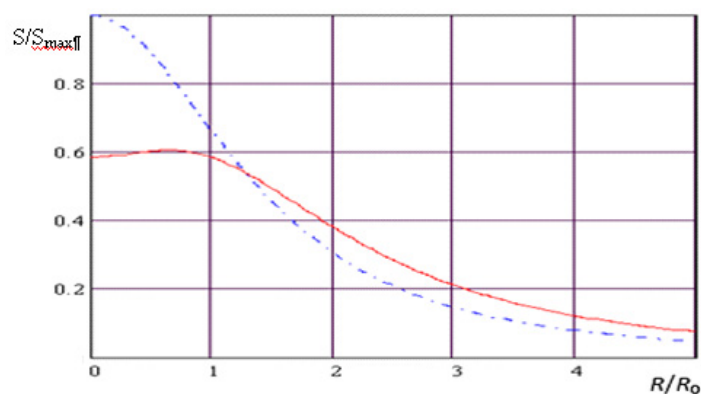


Рис. 2

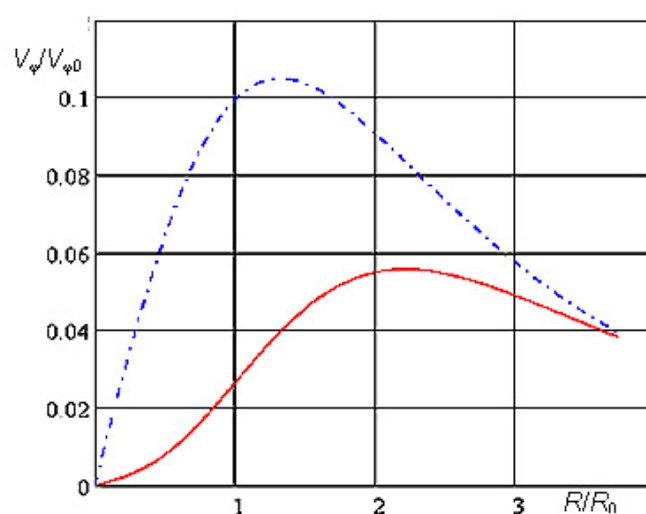


Рис. 3

оси ординат дана безразмерная азимутальная скорость, отнесенная к максимальной азимутальной скорости на выходе из трубки. Штрихпунктирная линия — профиль азимутальной скорости в первом приближении, сплошная — с учетом второго приближения. Видно, что положение максимума для азимутальной скорости заметно смещается вправо. Отметим, что при построении данного графика использованы эмпирические параметры для свободной струи. Данный подход можно применить, если степень закрутки $\frac{2L_0}{I_0R_0}$ много меньше единицы, где L_0 — плотность потока момента импульса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-08-00424, 10-08-00820 и в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 10.11.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
2. Румер Ю.Б. Задача о затопленной струе // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 2. — С. 255–256.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1975. — 848 с.
4. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960. — 630 с.

5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. — М.: Наука, 1965. — 386 с.
6. *Кулешов П.С., Маношкин Ю.В.* Генератор микронного и субмикронного водяного аэрозоля с электрическим управлением // ТВТ. — 2009. — Т. 47, № 6. — С. 937–945.
7. *Лефевр А.* Процессы в камерах сгорания ГТД. — М.: Мир, 1986. — 566 с.
8. *Ватажин А.Б., Клименко А.Ю., Лебедев А.Б., Сорокин А.Л.* Влияние турбулентных пульсаций на гомогенную конденсацию в изобарической затопленной струе. Механика неоднородных и турбулентных потоков. — М.: Наука, 1989. — С. 211–220.
9. *Вышинский В.В., Стасенко А.Л.* Физические модели, численные и экспериментальные исследования аспектов авиационной экологии и безопасности полетов // Труды МФТИ. — 2009. — Т. 1, № 3. — С. 23–39.

Поступила в редакцию 01.06.2011.