УДК 517.518.23

О.В. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Теорема вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей[1,2]

Установлена теорема вложения пространства Соболева $W_p^s(G)$ в пространство Лебега $L_q(G)$ для анизотропно нерегулярных областей $G \subset \mathbb{R}^n$ различных классов.

Ключевые слова: пространство Соболева, теорема вложения, нерегулярная область.

Известная теорема вложения Соболева: $W_p^m(G) \subset L_q(G)$, характеризуемая неравенством

$$\|f|L_q(G)\| \leqslant C\|f|W_p^s(G)\| = C\left(\sum_{|\alpha|=s}\|D^\alpha f|L_p(G)\| + \|f|L_p(G)\|\right),$$
$$s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty, \quad (1)$$

установлена им в 1938 г. (см. [1]) для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) (определяющее максимально возможное значение q в теореме (1)) является и необходимым условием вложения. Результат С.Л. Соболева был перенесен на области более общего вида: области классов $J_{\frac{n-1}{n}}$, $I_{p,\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}$ (В.Г. Мазья, 1960, 1975, см. [2]), области с условием Джона (John domains; Ю.Г. Решетняк [3, 4]), области с условием гибкого конуса (О.В. Бесов, 1983, см. [5]).

Определение ([6]). При $\sigma \geqslant 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с условием гибкого σ-конуса*, если при некоторых $T > 0$, $0 < \varkappa_0 \leqslant 1$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x\colon [0,T] \to G, \quad \gamma(0) = x, \quad |\gamma'| \leqslant 1 \quad \text{п.в.},$$

такой, что

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geqslant \varkappa_0 t^\sigma \text{ при } 0 < t \leqslant T. \qquad \square$$

В случае $\sigma = 1$ такую область называют также областью с условием гибкого конуса. Области, не удовлетворяющие условию гибкого конуса, будем называть нерегулярными.

Для нерегулярной области (которая в окрестности некоторой точки границы может, в частности, иметь вид внешнего пика) вложение (1) может оказаться неверным ни при каких соотношениях параметров или быть верным при некоторых более сильных, чем (2), условиях, связывающих n, s, p, q и зависящих от геометрических свойств области G. В.Г. Мазья выделил классы областей I_α (1960), $J_{p,\alpha}$ (1975), для которых установил соответственно при $p = 1$ и при $p > 1$ теорему вложения (1) для $s = 1$ с максимально возможным q. Классы I_α, $J_{p,\alpha}$ определяются в терминах изопериметрических или емкостных неравенств.

В [6] показано, в частности, что для области с условием гибкого σ-конуса вложение (1) справедливо при соотношении параметров

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0. \quad (3)$$

Этот результат при $s = 1$ принадлежит Килпелайнену и Малы [8]. Д.А. Лабутиным установлено [9], что условие (3) является также и необходимым для данного вложения.

В [6–8] содержатся и весовые обобщения неравенства (1) для области с условием гибкого σ-конуса.

Для областей специального вида с условием σ-конуса теорема вложения (1) справедлива и при соотношениях параметров, отличных от (3), как показано в работах Д.А. Лабутина [10] и В.Г. Мазьи – С.В. Поборчего [11].

Б.В. Трушиным [12, 13] выделены специальные подклассы класса областей с условием гибкого σ-конуса и установлена теорема вложения Соболева при неулучшаемых соотношениях параметров, различных для разных подклассов.

В данной работе мы расширяем сравнительно с [12] классы областей, для которых справедлива теорема вложения Соболева в формулировке [12], обобщая тем самым соответствующие результаты Б.В. Трушина. Метод работ [6, 7, 12, 13] опирается, в частности, на оценки слабого типа $(1,1)$ для максимального оператора Харди–Литтлвуда и его анизотропного аналога. Здесь мы привлекаем обобщение анизотропного максимального оператора Харди–Литтлвуда, построенное по дифференциальному базису, содержащему прямоугольные параллелепипеды, ребра одних из которых не обязательно параллельны ребрам других.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00744-а), Программы РАН «Современные проблемы теоретической математики», гранта Президента РФ (проект НШ-65772.2010.1), гранта АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/12136).

[2]Английский перевод данной статьи опубликован в Eurasian Mathematical Journal **2** (1), 32–51 (2011).

Схема данной работы такова. Для области G определенного типа строится семейство гибких конусов (содержащихся в G), «выпущенных» из каждой точки $x \in G$. Строится интегральное представление функции f через ее производные $D^\alpha f$, $|\alpha| = s$, по гибкому конусу, из которого следуют поточечные оценки функции через интегралы, содержащие соответствующие производные. Этим получение оценки вида (1) сводится к получению оценок соответствующих интегральных операторов. Два основных интегральных оператора сначала оцениваются через максимальный оператор, строящийся по дифференциальному базису, соответствующему заданному семейству гибких конусов. Слабая $(1,1)$-ограниченность максимального оператора влечет слабую (p,q)-ограниченность упомянутых операторов. Последняя в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича влечет (p,q)-ограниченность этих операторов, а значит, и оценку теоремы вложения.

В силу сказанного реализация указанной схемы для данной области G должна начинаться с построения согласованных между собой семейства гибких конусов и дифференциального базиса. Такое построение определяется геометрическими свойствами области G.

I. О покрытиях типа Безиковича

Везде далее $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; область $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$, χ — характеристическая функция интервала $(0,1)$. Для измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^n$ через $|E|$ обозначается его лебегова мера.

При $1 \leqslant p < \infty$

$$\|f\|_{p,E} = \|f|L_p(E)\|,$$

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [1,\infty)^n, \ \min_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i = 1, \ |\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x|_\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^{1/\lambda_i},$$

$$|x+y|_\lambda \leqslant |x|_\lambda + |y|_\lambda.$$

Мы перенесем некоторые свойства покрытий множеств в $\mathbb{R}^n$ типа покрытий Безиковича (см. [14, 15]), известные для случаев покрытий шарами или параллелепипедами с ребрами, параллельными координатным осям, на случай покрытий повернутыми прямоугольными параллелепипедами.

Далее будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ задано некоторое семейство операторов поворота $\Re^0(x)$, зависящих от параметра $x \in \mathbb{R}^n$ (т.е. линейных изометрических операторов с $\det \Re^0(x) = 1$). Через $\Re(x)$ будем обозначать оператор

$$\Re(x)y = x + \Re^0(x)(y - x) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n,$$

который будем называть оператором поворота относительно точки x, соответствующим оператору $\Re^0(x)$. Оператор $\Re^0(x)$ ($\Re(x)$) может также зависеть от дополнительного параметра $d > 0$; в таком случае будем обозначать его через $\Re^0(x,d)$ ($\Re(x,d)$).

Через $P(x)$ будем обозначать прямоугольный параллелепипед с центром в точке x и с ребрами, не обязательно параллельными координатным осям. При $\theta > 0$ через $\theta P(x)$ будем обозначать прямоугольный параллелепипед, подобный данному, с центром подобия в точке x и коэффициентом подобия θ.

Положим при $d > 0$

$$Q_\lambda(x,d) := x + \prod_{i=1}^n [-d^{\lambda_i}, d^{\lambda_i}].$$

Множество вида

$$\Re(x,d) Q_\lambda(x,d) \qquad (1.1)$$

будем называть λ-параллелепипедом с центром в точке x.

Определение 1.1. Пусть E — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для каждого $x \in E$ задан прямоугольный параллелепипед $P(x)$, причем $\sup\{\operatorname{diam} P(x) \colon x \in E\} < \infty$. Пусть $0 < \theta < 1 < \kappa < \infty$.

Будем говорить, что покрытие $\{P(x)\}_{x\in E}$ обладает свойством θ-отделимости, если из

$$x, y \in E, \quad P(x) \cap P(y) \neq \varnothing,$$
$$y \notin P(x), \quad |P(y)| \leqslant 2|P(x)|$$

следует, что $(\theta P(x)) \cap (\theta P(y)) = \varnothing$.

Будем говорить, что покрытие $\{P(x)\}_{x\in E}$ обладает свойством κ-поглощения, если из

$$x, y \in E, \quad P(x) \cap P(y) \neq \varnothing,$$
$$y \notin P(x), \quad |P(y)| \leqslant 2|P(x)|$$

следует, что $P(y) \subset \kappa P(x)$. □

Теорема 1.1. Пусть $\kappa > 1$ и пусть $\{P(x)\}_{x\in E}$ — покрытие ограниченного множества E со свойством κ-поглощения.

Тогда из него можно выбрать конечную или счетную последовательность прямоугольных параллелепипедов $\{P_k\} = \{P(x^{(k)})\}$, удовлетворяющую при $\theta = \frac{1}{1+2\kappa}$ условиям

(i) $E \subset \bigcup P_k$;

(ii) $(\theta P_k) \cap (\theta P_m) = \varnothing \quad \forall\, k, m, \quad k \neq m.$ □

Лемма 1.1. Пусть $\{P(x)\}_{x\in E}$ — покрытие ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ со свойством θ-отделимости, $\theta \in (0,1)$. Тогда из него можно выбрать конечную или счетную последовательность прямоугольных параллелепипедов $\{P_k\} = \{P(x^{(k)}\}$, удовлетворяющую условиям i, ii. □

Доказательство леммы проводится по стандартному плану доказательства для случая покрытий кубами (см. [15]). Положим $a_0 = \sup\{|P(x)| \colon x \in E\}$. Выберем прямоугольный параллелепипед $P_1 = P(x^{(1)}) \in \{P(x)\}_{x\in E}$ таким, что $|P(x)| > \frac{a_0}{2}$. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ уже выбраны.

Если $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k = \varnothing$, то процесс выбора закончен. В противном случае положим

$$a_m = \sup\Big\{|P(x)| \colon x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} P_k\Big\}$$

и выберем прямоугольный параллелепипед

$$P_{m+1} = P(x^{(m+1)}) \in \Big\{P(x) \colon x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} P_k\Big\}$$

таким, что $|P_{m+1}| > \frac{a_m}{2}$.

Покажем, что выполняется условие (i): $E \subset \subset \bigcup P_k$. Если процесс выбора обрывается на конечном шаге, то условие (i), очевидно, выполнено. Пусть $\{P_k\}$ — бесконечная последовательность. Тогда $|P_k| \to 0$ при $k \to \infty$, так как $\{P(x)\}_{x\in E}$ — θ-отделимое покрытие, в силу чего $\sum |\theta P_k| < < \infty$. Если найдется $x \in E \setminus \bigcup\limits_{1}^{\infty} P_k$, то существует такое число $m+1$, что $|P_{m+1}| < \frac{1}{2}\,|P(x)|$, что противоречит выбору точки $x^{(m+1)}$. Этим установлено свойство (i). Свойство (ii) следует из θ-отделимости покрытия $\{P(x)\}_{x\in E}$ и способа построения последовательности $\{P_k\}$.

Доказательство теоремы 1.1. Достаточно показать, что свойство κ-поглощения покрытия $\{P(x)\}_{x\in E}$ влечет свойство θ-отделимости этого покрытия при $\theta = \frac{1}{1+2\kappa}$, и воспользоваться леммой 1.1. Пусть $x, y \in E$, и пусть $P(x)$, $P(y)$ — два таких прямоугольных параллелепипеда, что

$$P(x) \cap P(y) \neq \varnothing, \quad y \notin P(x),$$
$$|P(y)| \leqslant 2|P(x)|, \quad \kappa P(x) \supset P(y).$$

Покажем, что $(\theta P(x)) \cap (\theta P(y)) = \varnothing$ при $\theta = = \frac{1}{1+2\kappa}$. Достаточно рассмотреть случай $x = 0$ и $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}[-a_i, a_i]$. Без ограничения общности будем считать, что $y_1 > a_1$. Пусть

$$\theta \in (0,1), \quad (\theta P(x)) \cap (\theta P(y)) \neq \varnothing,$$
$$z \in (\theta P(x)) \cap (\theta P(y)).$$

Поскольку $P(y) \subset \kappa P(x)$, имеем $|z_1 - y_1| \leqslant 2\kappa\theta a_1$. Из $z \in \theta P(x)$ имеем $|z_1 - y_1| > (1-\theta)a_1$. Из последних двух соотношений следует, что $2\kappa\theta a_1 > > (1-\theta)a_1$, откуда $\theta > \frac{1}{1+2\kappa}$. Поэтому $(\theta P(x)) \cap \cap (\theta P(y)) = \varnothing$ при $\theta = \frac{1}{1+2\kappa}$. Этим теорема доказана.

Примером покрытия (ограниченного) множества $E \subset \mathbb{R}^n$ со свойством κ-поглощения является покрытие E шарами или параллелепипедами вида (1.1) при $\Re(x, d(x)) = \mathrm{Id}$, $d(x) \in \in (0, d_0)$. Более общим примером покрытия со свойством κ-поглощения является покрытие сравнимыми прямоугольными параллелепипедами (см. [14, § 1, замечание (5)]). Далее будем иметь дело лишь с покрытиями множества λ-параллелепипедами (1.1) при фиксированном $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [1, \infty)^n$, $\min \lambda_i = 1$.

Пусть $\lambda \in [1,\infty)^n$, $0 < d_0 < \infty$, G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x \in G$ через $\mathcal{B}_\lambda(x)$ обозначим семейство λ-параллелепипедов $\Re(x,d)Q_\lambda(x,d)$ вида (1.1) при $0 < d < d_0 < \infty$. Объединение этих семейств $\mathcal{B}_\lambda = \bigcup\limits_{x\in G} \mathcal{B}_\lambda(x)$ будем называть дифференциальным базисом на множестве G (см. [14]). При $\kappa > 1$ будем говорить, что дифференциальный базис $\mathcal{B}_\lambda$ обладает свойством κ-поглощения, если из

$$x, y \in G, \ \Re(x,d_1)Q_\lambda(x,d_1) \cap \Re(y,d_2)Q_\lambda(y,d_2) \neq \varnothing,$$
$$y \notin \Re(x,d_1)Q_\lambda(x,d_1), \quad |Q_\lambda(y,d_2)| \leqslant 2|Q_\lambda(x,d_1)|$$

следует, что $\kappa\Re(x,d_1)Q_\lambda(y,d_1) \supset \Re(y,d_2)Q_\lambda(y,d_2)$. Введем максимальный оператор, построенный по $\mathcal{B}_\lambda$ на множестве G для $f \in L(\overline{G}, \mathrm{loc})$:

$$\mathfrak{M}_{\lambda,\Re} f(x) := \sup_{0<d<d_0} \frac{1}{|\Re(x,d)Q_\lambda(x,d) \cap G|} \times \int\limits_{\Re(x,d)Q_\lambda(x,d)\cap G} |f(y)|\,dy.$$

Теорема 1.2. Пусть дифференциальный базис $\mathcal{B}_\lambda$ на множестве G обладает свойством κ-поглощения при некотором $\kappa > 1$. Тогда для каждого $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$|\{x \in G \colon \mathfrak{M}_{\lambda,\Re} f(x) > \tau\}| \leqslant \frac{C}{\tau}\,\|f|L_1(G)\|, \qquad (1.2)$$

где C не зависит ни от f, ни от τ. □

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения теоремы 1 из [15, § 1].

Приведем в случае $n = 2$ пример области $G \in \in \mathbb{R}^2$ и связанного с ней дифференциального базиса вида $\{\Re(x,d)Q_\lambda(x,d)\}_{x\in G,\, 0<d<d_0}$ со свойством κ-поглощения. Пусть $\lambda = (2,1)$, $Q_\lambda(x,d) = = x + [-d^2, d^2] \times [-d, d]$. Опишем сначала область $G \subset \mathbb{R}^n$ и построим на ней семейство (усеченных) гибких конусов (которые впоследствии будут служить носителями интегрального представления функций через производные). Построим затем требуемый дифференциальный базис, согласованный с этими гибкими конусами. Начнем с некоторых вспомогательных построений.

Пусть $k \in (0,1)$, $R \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Построим кривую

$$\hat\gamma(k,R) = \hat\gamma^1(k,R) \cup \hat\gamma^2(k,R),$$

где $\hat\gamma^1(k,R)$ является частью окружности радиуса R с центром в точке

$$(x_{k,R}, y_{k,R}) = \left(\frac{1-R}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k(1-R)}{\sqrt{1+k^2}}\right),$$

лежащей в угле $\{(x,y) \colon x > x_{k,R},\ y_{k,R} < y < kx\}$, а $\hat\gamma^2$ — вертикальным лучом, исходящим из нижней точки дуги $\gamma^1(\hat{k}, R)$ и направленным вниз. Точнее говоря,

$$\hat\gamma^1(k,R) = \big\{(x,y) \colon (x - x_{k,R})^2 + (y - y_{k,R})^2 = R^2,$$
$$y_{k,R} \leqslant y < kx\big\},$$
$$\hat\gamma^2(k,R) = \big\{(x,y) \colon x = x_{k,R} + R,\ y \leqslant y_{k,R}\big\}.$$

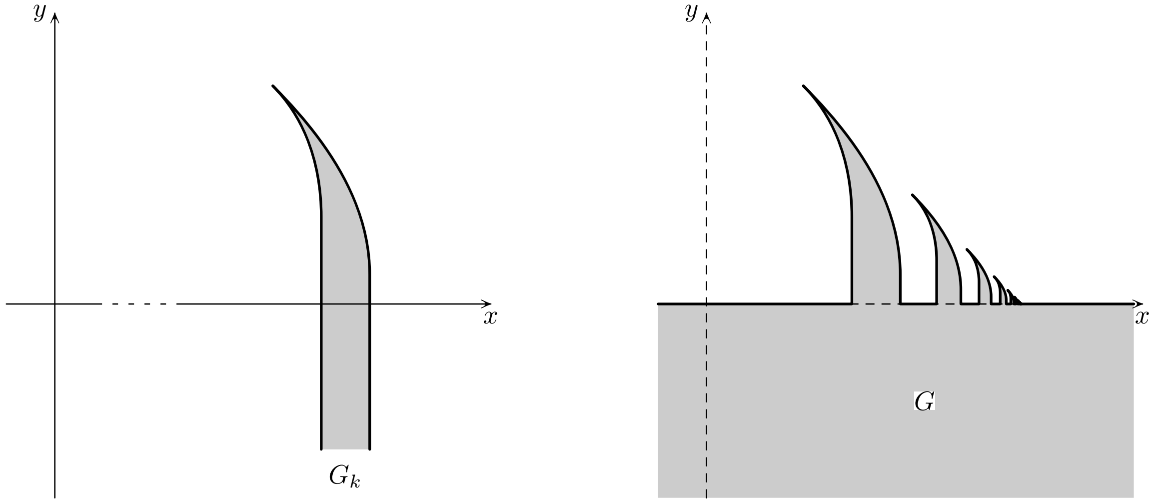

Рис. 1

Отметим, что луч $\hat{\gamma}^2(k,R)$ касается дуги $\hat{\gamma}^1(k,R)$ в точке $(x_{k,R}+R, y_{k,R})$. Положим

$$G_k = \bigcup_{\frac{1}{2}<R<1} \hat{\gamma}(k,R) \subset \left\{(x,y)\colon \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} < x < 1\right\}$$

(см. рис. 1), так что G_k лежит в вертикальной полосе ширины меньше $\frac{1}{2}k^2$.

Пусть $\mathbb{R}^2_- := \{(x,y)\colon y<0\}$, $e^1=(1,0)$. Рассмотрим область

$$G := \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(G_{k_j} - 2^{-j}e^1)\right) \cup \mathbb{R}^2_-,$$

где $2^{-j-1} \leqslant k_j^2 < 2^{-j}$.

Отметим на области G семейство кривых

$$\hat{\gamma}_j(R) := \hat{\gamma}(k_j,R) - 2^{-j}e^1, \text{ где } j\in\mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}<R<1,$$

с помощью которых построим на G дифференциальный базис. Он состоит из всех прямоугольников вида

$$\begin{aligned}\Re((x,y),d)Q_\lambda((x,y),d) &= \\ = \Re((x,y),d)\big((x,y)+[-d^2,d^2]\times[-d,d]\big),& \\ (x,y)\in G, \quad 0<d<d_0<1,&\end{aligned}$$

расположенных следующим образом. Бо́льшая сторона прямоугольника либо вертикальна, либо отклоняется от вертикали на угол, не превосходящий $\frac{\pi}{4}$. Если точка (x,y) лежит на кривой $\hat{\gamma}_j(R)$ и $y\geqslant 0$, то середина нижней из малых сторон прямоугольника также лежит на этой кривой в точке ее с ординатой, меньшей чем y. Таким образом, большая полуось прямоугольника $\Re((x,y),d)Q_\lambda((x,y),d)$, расположенная ниже его центра, является хордой кривой $\hat{\gamma}_j(R)$. Если же $y<0$, то $\Re((x,y),d)=\mathrm{Id}$. Геометрически довольно ясно (можно убедиться и аналитически), что построенный дифференциальный базис обладает свойством κ-поглощения при некотором $\kappa>1$.

Построим семейство (усеченных) гибких конусов представления функций.

Пусть $(x_0,y_0)\in G$. Построим ось конуса с вершиной в точке (x_0,y_0). Пусть сначала $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_-$. Тогда в качестве оси конуса возьмем кривую

$$\gamma(x_0,y_0) := \{(x_0,y)\colon y=y_0-t,\ 0\leqslant t\leqslant T\},$$

а в качестве усеченного гибкого конуса представления функций $\bigcup\limits_{0<t<T} Q_\lambda\big((x_0,y_0-t),\frac{t}{2}\big)$.

Пусть теперь $(x_0,y_0)\in G\setminus\mathbb{R}_-{}^2$. Тогда в качестве оси гибкого усеченного конуса возьмем кривую

$$\gamma(x_0,y_0) = \gamma_0(x_0,y_0)\cup\hat{\gamma}_j(x_j,y_0)$$

с началом в точке (x_0,y_0), где $\gamma_0(x_0,y_0)$ — горизонтальный отрезок, соединяющий точку (x_0,y_0) и точку (x_j,y_0) кривой $\hat{\gamma}_j(\frac{3}{4})$, а кривая $\hat{\gamma}_j(x_j,y_0)$ является дугой конечной длины кривой $\hat{\gamma}_j(\frac{3}{4})$, имеет начало в точке (x_j,y_0) и расположена от этой точки вниз. Кривую $\gamma(x_0,y_0)$ параметризуем с помощью параметра t, квадрат которого на $\gamma_0(x_0,y_0)$ совпадает с длиной отрезка $\gamma_0(x_0,y_0)$, отсчитываемой от точки (x_0,y_0) $(0\leqslant t\leqslant t(x_0,y_0))$, а на $\hat{\gamma}_j(x_j,y_0)$ $t=t(x_0,y_0)+u$, где u — длина дуги $\hat{\gamma}_j(x_j,y_0)$, отсчитываемая от точки (x_j,y_0) в сторону уменьшения ординаты y кривой $\hat{\gamma}_j(x_j,y_0)$, причем $0\leqslant u\leqslant T-t(x_0,y_0)$ (такая специальная параметризация нужна, чтобы выполнялись условия определений следующего раздела).

Точку кривой $\gamma(x_0,y_0)$ со значением параметра t будем для краткости обозначать $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. Обозначим через $Q_\lambda^{(t)}$ прямоугольник Q_λ, повернутый на угол, «достаточно близкий» к углу отклонения касательной к кривой γ (на ее негоризонтальном участке) от вертикали, не конкретизируя сейчас оператор поворота $\Re_t\colon Q_\lambda(\gamma(t)) \to \to Q_\lambda^{(t)}(\gamma(t))$ (на горизонтальном участке угол поворота равен нулю). Построим гибкий усеченный конус представления функций в виде

$$\bigcup_{0<t\leqslant T} Q_\lambda^{(t)}\big(\gamma(t), r(x_0,y_0)+\varepsilon t\big),$$

где $r(x_0,y_0)>0$, $\varepsilon>0$ столь малы, что

$$\bigcup_{0<t\leqslant T} Q_\lambda^{(t)}\big(\gamma(t), 2(r(x_0,y_0)+\varepsilon t)\big)\subset G.$$

II. Класс рассматриваемых областей и основная теорема

Определение 2.1. Пусть G_0, G — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $G_0\subset G$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \in[1,\infty)^n$, $\min\limits_{1\leqslant 1\leqslant n}\lambda_i=1$, $d_0\in(0,\infty)$, $\kappa>1$.

Пусть на G_0 задан дифференциальный базис со свойством κ-поглощения и со свойством монотонности:

$$\Re(x,h)Q_\lambda(x,h)\subset\Re(x,d)Q_\lambda(x,d)\quad \text{при}\quad h<d.$$

Пусть для каждого $x\in G_0$ заданы кусочно гладкий путь $\gamma=\gamma_x\colon[0,t_x]\to G$, $\gamma(0)= =x$, непрерывная кусочно гладкая функция $r= =r_\gamma\colon[0,t_x]\to(0,\infty)$, семейство операторов поворота $\Re_t=\Re_t(\gamma(t))$ и семейство сопровождающих γ λ-параллелепипедов $\{\Re_tQ_\lambda(\gamma(t),r_\gamma(t))\}_{0\leqslant t\leqslant t_x}$ со следующими свойствами.

1°. Усеченный гибкий конус $\bigcup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_x}\big(2\Re_tQ_\lambda(\gamma(t),r_\gamma(t))\big)$ лежит в G.

2°. $\exists\varepsilon_0\in(0,1)\colon r(t_x)\geqslant\varepsilon_0\ \forall x\in G_0$.

3°. $\gamma_x(t)\in\Re(x,t)Q_\lambda(x,t)\ \forall t\in[0,t_x]$.

4°. Матрица преобразования $\Re_t=\Re_t(\gamma(t))$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема по t. Производные по t от r, γ и коэффициентов матрицы преобразования $\Re_t$ ограничены числом, не зависящим от x, t, причем $|\gamma'|\leqslant 1$.

5°. $\exists\varepsilon_1>0\colon \Re_tQ_t(\gamma(t),r_\gamma(t))\not\subset\Re(x,d)Q_\lambda(x,d)\ \Rightarrow\ \Rightarrow\ r_\gamma(0)+t\geqslant\varepsilon_1 d$.

6°. $\exists C_0>0\colon \int\frac{1}{r_\gamma(t)}\chi\big(\frac{|\Re_t^{-1}y-\gamma(t)|_\lambda}{r_\gamma(t)}\big)\,dt\leqslant C_0$ $\forall x\in G_0$, $\forall y\in G$.

Тогда будем писать $G_0\in\mathcal{G}(G,\lambda)$. □

Определение 2.2. Пусть $G=\bigcup\limits_1^{k_0}G_k$, $G_k\in \in\mathcal{G}(G,\lambda^k)$, $\Lambda:=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_0}|\lambda^k|$. Тогда будем писать $G\in\mathcal{G}(\Lambda)$. □

Определение 2.3. Пусть $\lambda\in[1,\infty)^n$, $\min\lambda_i= =1$, $\sigma\geqslant 1$. Будем говорить, что множество G_0 удовлетворяет условию λ-анизотропного гибкого σ-конуса относительно множества G, и писать $G_0\in\mathcal{G}(G,\lambda,\sigma)$, если $G_0\in\mathcal{G}(G,\lambda)$, и при этом для каждого $x\in G_0$ для функции r_γ из определения класса $\mathcal{G}(G,\lambda)$ справедлива оценка $r_\gamma(t)\geqslant c_0t^\sigma$ при $t\in(0,t_x]$, где $c_0>0$ не зависит от $x\in G_0$. □

Определение 2.4. Пусть $G=\bigcup\limits_{k=1}^{k_0}G_k$, $G_k\in \in\mathcal{G}(G,\lambda^k,\sigma)$ при $k=1,\ldots,k_0$, $\Lambda=\max|\lambda^k|$. Тогда будем говорить, что множество G удовлетворяет условию гибкого (Λ,σ)-конуса, и писать $G\in \in\mathcal{G}(\Lambda,\sigma)$. □

При $\delta>0$ введем $G_\delta:=\{x\in G\colon \operatorname{dist}(x,\partial G)> >\delta\}$.

Теорема 2.1. Пусть $\sigma\geqslant 1$, $G\in\mathcal{G}(\Lambda,\sigma)$, $1< <p<q<\infty$,

$$s-\frac{\sigma(\Lambda-1)+1}{p}+\frac{\Lambda}{q}\geqslant 0.$$

Тогда для $f\in W_p^s(G)$ справедлива оценка

$$\|f|L_q(G)\|\leqslant C\Bigg(\sum_{|\alpha|=s}\|D^\alpha f|L_p(G)\|+\|f|L_p(G_\delta)\|\Bigg),$$

$$\delta=\varepsilon_0^\Lambda, \tag{2.1}$$

где постоянная C не зависит от f.

Если при этом $s-\frac{\sigma(\Lambda-1)+1}{p}+\frac{\Lambda}{q}>0$, то утверждение справедливо при $1\leqslant p<q<\infty$. □

Доказательство теоремы базируется на всех последующих рассмотрениях и будет приведено в конце работы.

III. Интегральное представление функций и поточечные оценки

При выводе интегрального представления функции будем предполагать, что она бесконечно дифференцируема на открытом множестве — области своего определения.

Пусть $x\in G_0$, $\Gamma=(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n)\colon[0,t_x]\to G$, $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_n)\colon[0,t_x]\to(0,\infty)^n$ — непрерывные кусочно гладкие функции, $|\Gamma'|\leqslant 1$, $r_i(0)=0$, $0< <r_i(t)\leqslant t$ при $t>0$ $(i=1,\ldots,n)$, оператор $\Re_t=\Re_t(\Gamma(t))$ поворота относительно точки $\Gamma(t)$ — непрерывное кусочно гладкое по параметру t преобразование. Положим $\Re_t^0(y):=\Re_t(\Gamma(t)+y)- -\Gamma(t)$. Пусть $\{e_i\}_1^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $\Re_t^0e_i=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(t)e_j$,

$$\Re_t^0y=\Re_t^0\Bigg(\sum_{i=1}^n y_ie_i\Bigg)=\sum_{i=1}^n y_i\Re_t^0e_i=$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_ia_{ij}(t)e_j=\sum_{j=1}^n\Bigg(\sum_{i=1}^n a_{ij}(t)y_i\Bigg)e_j.$$

Пусть

$$\omega\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),\quad \operatorname{supp}\omega\in[0,1],$$

$$\int\omega(t)\,dt=1,\quad \Omega(y)=\prod_{i=1}^n\omega(y_i).$$

Положим

$$f_t(x)=\int\prod_{i=1}^n\frac{1}{r_i(t)}\,\omega\Bigg(\frac{y_i}{r_i(t)}\Bigg)f(\Gamma(t)+\Re_t^0y)\,dy=$$

$$= \int \Omega(y) f\big(\Gamma(t) + \Re_t^0(\overline{r}(t)y)\big)\, dy, \quad (3.1)$$

где $\overline{r}(y) := (r_1(t), \ldots, r_n(t))$. Заметим, что $f_t(x) \to \to f(x)$ при $t \to 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \int \Omega(y) \sum_{j=1}^n D_j f\big(\Gamma(t) + \Re_t^0(\overline{r}(t)y)\big) \times$$

$$\times \left\{ \Gamma_j'(t) + \sum_{i=1}^n \big[a_{ij}'(t) r_i(t) y_i + a_{ij}(t) r_i'(t) y_i\big] \right\} dy =$$

$$= \int \prod_{i=1}^n \frac{1}{r_i(t)}\, \omega\Big(\frac{y_i}{r_i(t)}\Big) \sum_{j=1}^n D_j f(\Gamma(t) +$$

$$+ \Re_t^0 y) \left\{ \Gamma_j'(t) + \sum_{i=1}^n \left[a_{ij}'(t) y_i + a_{ij}(t)\, \frac{r_i'(t)}{r_i(t)}\, y_i \right] \right\} dy.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right| \leqslant C \int \prod_{i=1}^n \frac{1}{r_i(t)} \left| \omega\Big(\frac{y_i}{r_i(t)}\Big) \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^n \big| D_j f(\Gamma(t) + \Re_t^0 y) \big|\, dy. \quad (3.2)$$

В силу теоремы Ньютона–Лейбница:

$$|f(x)| \leqslant C \int_0^{t_x} \prod_{i=1}^n r_i(t)^{-1} \int\limits_{\substack{0 \leqslant y_i \leqslant r_i(t),\\ i=1,\ldots,n}} \sum_{j=1}^n \big| D_j f(\Gamma(t) +$$

$$+ \Re_t^0 y) \big|\, dy\, dt + |f_{t_x}(x)|. \quad (3.3)$$

Далее ограничимся случаем $\overline{r}(t) = (r(t)^{\lambda_1}, \ldots, r(t)^{\lambda_n})$ при фиксированном $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \in [1, \infty)^n$, $\min \lambda_i = 1$.

Лемма 3.1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $\lambda \in [0, \infty)^n$, $\min \lambda_i = 1$, $x \in G$, $\Gamma\colon [0, t_x] \to G$ — кусочно гладкий путь, $\Gamma(0) = x$, $r\colon [0, t_x] \to [0, \infty)$ — непрерывная кусочно гладкая функция, $r(0) = 0$, $r(t) > 0$ при $t > 0$. Пусть $\Re_t Q_\lambda(\Gamma(t), r(t)) \subset G$, $|r'(t)| \leqslant C_1$, $|\Gamma'(t)| \leqslant 1$ для п.в. $t \in [0, t_x]$, коэффициенты a_{ij} матрицы преобразования $\Re_t^0$ — непрерывные кусочно гладкие функции от t, причем $|a_{ij}'| \leqslant C_2$.

Тогда

$$|f(x)| \leqslant C \int_0^{t_x} t^{s-1} r(t)^{-|\lambda|} \int\limits_{|y| < r(t)} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(\Gamma(t) +$$

$$+ \Re_t^0 y)|\, dy\, dt + C \int\limits_{|y|_\lambda < r(t_x)} |f(\Gamma(t_x) + \Re_{t_x}^0 y)|\, dy, \quad (3.4)$$

где $C = C(C_1, C_2)$ не зависит от f и $x \in G$. □

Доказательство. Установим сначала, что в условиях леммы

$$|f(x)| \leqslant C \int_0^{t_x} t^{s-1} r(t)^{-|\lambda|} \int\limits_{|y| < r(t)} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(\Gamma(t) +$$

$$+ \Re_t^0 y|)\, dy\, dt + C \sum_{|\beta| \leqslant s-1} |(D_\beta f)_{t_x}(x)|, \quad (3.5)$$

где C не зависит от f и $x \in G$.

Заметим, что при $s = 1$ оценка (3.5) совпадает с (3.3). Допустим, что при некотором $s \geqslant \geqslant 2$ оценка (3.5) верна при замене в ней s на $s - - 1$. Докажем, что тогда она верна в виде (3.5). Зафиксируем t и y, а значит, и $\Re_t^0$ в ее подынтегральном выражении ($y \in Q_\lambda^{(t)}(\Gamma(t), r(t))$). При $y \neq \neq \Gamma(t)$ построим путь $\Gamma_t\colon [0, t_x - t + r(t)] \to G$ и вектор-функцию $\overline{\rho} = (\rho^{\lambda_1}, \ldots, \rho^{\lambda_n})$, где $\rho\colon [0, t_x - - t + r(t)] \to [0, \infty)$.

Положим $u_* = |y - \Gamma(t)|_\lambda$, $u^* := t_x - t + r(t)$,

$$\Gamma_t(u) = \\ = \begin{cases} y + \Re_t^0\big[\big(\frac{u}{u_*}\big)^\lambda \times \\ \quad \times (\Re_t^0)^{-1}(y - \Gamma(t))\big], & 0 \leqslant u \leqslant u_*, \\ \Gamma(t), & u_* \leqslant u \leqslant r(t), \\ \Gamma(t + u - r(t)), & r(t) \leqslant u \leqslant u^*, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\rho(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 < u < r(t), \\ r(t + u - r(t)) & \text{при } r(t) \leqslant u \leqslant u^*. \end{cases} \quad (3.7)$$

Оценка (3.3) для $y \in Q_\lambda^{(t)}(\Gamma(t), r(t))$, пути Γ_t, функции $D^\beta f$ вместо f при $|\beta| = s - 1$ и вектор-функции ρ дает

$$|D^\beta f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^{u_*} u^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < u} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(\Gamma_t(u) + \Re_t^0 z)|\, dz\, du +$$

$$+ C \int_{u_*}^{r(t)} u^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < u} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(\Gamma(t) + \Re_t^0 z)|\, dz\, du +$$

$$+ C \int_{r(t)}^{u^*} r(t - r(t) + u)^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda \leqslant r(t - r(t) + u)} \sum\nolimits_{|\alpha| = s} \big| D^\alpha f\big(\Gamma(t - r(t) + u) +$$

$$+ \Re_{t - r(t) + u}^0 z\big) \big|\, dz\, du + |(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \quad (3.8)$$

Первый из интегралов по z в (3.8):

$$I_1 = \int\limits_{\substack{|(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma_t(u))|_\lambda < u,\\ |(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma(t))|_\lambda < r(t)}} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(z)|\, dz.$$

Но

$$(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma_t(u)) = (\Re_t^0)^{-1}\Big(z - y - \Big(\frac{u}{u_*}\Big)^\lambda (y - \Gamma(t))\Big),$$

так что неравенство $|(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma_t(u))|_\lambda < u$ влечет неравенство

$$|(\Re_t^0)^{-1}(z - y)|_\lambda \leqslant \Big| \Big(\frac{u}{u_*}\Big)^\lambda (\Re_t^0)^{-1}(y - \Gamma(t)) \Big|_\lambda + u \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u}{u_*}\, |(\Re_t^0)^{-1} y - \Gamma(t)|_\lambda + u \leqslant 2u,$$

откуда

$$I_1 \leqslant \int\limits_{\substack{|(\Re_t^0)^{-1}(z - y)|_\lambda \leqslant 2u,\\ |(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma(t))|_\lambda < r(t)}} \sum_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(z)|\, dz.$$

Второй из интегралов по z в (3.8)

$$I_2 = \int\limits_{|(\Re_t^0)^{-1}(z - \Gamma(t))|_\lambda < u} \sum\nolimits_{|\alpha| = s} |D^\alpha f(z)|\, dz, \quad u \in [u_*, r(t)].$$

Но $(\Re_t^0)^{-1}(z-\Gamma(t)) = (\Re_t^0)^{-1}(z-y) + (\Re_t^0)^{-1}(y-\Gamma(t))$, откуда при $|(\Re_t^0)^{-1}(z-\Gamma(t))|_\lambda < u$ имеем

$$|(\Re_t^0)^{-1}(z-y)|_\lambda \leqslant \leqslant u + |(\Re_t^0)^{-1}(y-\Gamma(t))|_\lambda = u + u_* \leqslant 2u.$$

Так что

$$I_2 \leqslant \int\limits_{\substack{|(\Re_t^0)^{-1}(z-y)|_\lambda \leqslant 2u,\\ |(\Re_t^0)^{-1}(z-\Gamma(t))|_\lambda < r(t)}} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)|\,dz.$$

Следовательно, из (3.8) имеем

$$|D^\beta f(\Re_t^0 y)| \leqslant \leqslant C\int\limits_0^{r(t)} u^{-|\lambda|} \int\limits_{\substack{|z-y|_\lambda \leqslant 2u,\\ |z-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)}} \sum\nolimits_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Re_t^0 z)|\,dz\,du + $$
$$+C\int\limits_t^{t_x} r(u)^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < r(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Gamma(u)+\Re_u^0 z)|\,dz\,du + +|(D_\beta f)_{t_x}(x)|.$$

Отсюда при $|y-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)$

$$|D^\beta f(\Re_t^0 y)| \leqslant C_1 \int\limits_{\substack{|z-y|_\lambda \leqslant 2r(t),\\ |z-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)}} |z-y|_\lambda^{1-|\lambda|} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Re_t^0 z)|\,dz + $$
$$+C\int\limits_t^{t_x} r(u)^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < r(u)} \sum\nolimits_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Gamma(u)+\Re_u^0 z)|\,dz\,du + +|(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \quad (3.9)$$

Проинтегрируем это неравенство по $y \in \{y\colon |y-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)\} \subset \{y\colon |y-z|_\lambda \leqslant 2r(t)\}$. Заметим предварительно, что

$$\int\limits_{|y-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)} |z-y|_\lambda^{1-|\lambda|} dy \leqslant \int\limits_{|w|_\lambda \leqslant 2r(t)} |w|_\lambda^{1-|\lambda|} dw \leqslant C_2 r(t).$$

Тогда

$$\int\limits_{|y-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)} |D^\beta f(\Re_t^0 y)|\,dy \leqslant \leqslant C_3 r(t) \int\limits_{|z-\Gamma(t)|_\lambda < r(t)} \sum\nolimits_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Re_t^0 z)|\,dz +$$
$$+Cr(t)^{|\lambda|} \int\limits_t^{t_x} r(u)^{-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < r(u)} \sum\nolimits_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Gamma(u)+ +\Re_u^0 z)|\,dz\,du + r(t)^{|\lambda|} |(D^\beta f)_{t_x}(x)|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3.5), в котором s заменено на $s-1$, получим оценку

$$|f(x)| \leqslant \leqslant C_4 \int\limits_0^{t_x} t^{s-2} r(t)^{1-|\lambda|} \int\limits_{|z|_\lambda < r(t)} \sum\nolimits_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Gamma(t)+\Re_t^0 z)|\,dz\,dt +$$
$$+C_4 r(t)^{|\lambda|} \int\limits_0^{t_x} t^{s-2} \int\limits_t^{t_x} r(u)^{-|\lambda|} \times \times \int\limits_{|z|_\lambda < r(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\Gamma(u)+\Re_u^0 z)|\,dz\,du\,dt + +C\sum_{|\beta|\leqslant s-1} |(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \quad (3.10)$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом и вычисляя интеграл по t, с учетом ограниченности $r(t)$ получаем оценку (3.5).

Оценим слагаемые $|D^\beta|$, $|\beta| \leqslant s-1$, из правой части (3.5). Используя определение f_t и применяя при $0 < |\beta| \leqslant s-1$ интегрирование по частям, получаем

$$|(D^\beta f)_{t_x}(x)| \leqslant c_\beta \int\limits_{|y|_\lambda < r(t_x)} |f(\Gamma(t_x)+\Re_t^0 y)|\,dy. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) следует (3.4).

Лемма 3.2. Пусть G_0, G — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $G_0 \Subset G$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [1,\infty)$, $\min \lambda_i = 1$.

Пусть для каждого $x \in G_0$ заданы кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x\colon [0,t_x] \to G$, $\gamma(0) = x$, непрерывная кусочно гладкая функция $r = r_\gamma\colon [0,t_x] \to (0,\infty)$ и семейство сопровождающих γ λ-параллелепипедов $\{\Re_t Q_\lambda(\gamma(t), r(t))\}_{0\leqslant t\leqslant t_x}$ со свойствами 1, 2, 4 из определения 2.1.

Тогда для $f \in C^\infty(G)$, $x \in G_0$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant CA_1\Bigg(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f|\Bigg)(x) + +CA_2\Bigg(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f|\Bigg)(x) + CA_3 f(x), \quad (3.12)$$

где

$$A_1 g(x) = \int\limits_0^{r_\gamma(0)} t^{s-1-|\lambda|} \int\limits_{|y|_\lambda < t} g(x+\Re_0^0 y)\,dy\,dt, \quad (3.13)$$

$$A_2 g(x) = \int\limits_0^{t_x} (t+r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(t)^{-|\lambda|} \times \times \int\limits_{|y|_\lambda < r_\gamma(t_x)} |g(\gamma(t)+\Re_t^0 y)|\,dy\,dt, \quad (3.14)$$

$$A_3 f(x) = \int\limits_{|y| < r_\gamma(t_x)} |f(\gamma(t)+\Re_{t_x}^0 y)|\,dy, \quad (3.15)$$

а постоянная C не зависит от f, x, γ, r_γ. □

Доказательство. По данному пути γ и функции $r = r_\gamma$ построим путь Γ:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \gamma(0) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant r(0),\\ \gamma(t-r(0)) & \text{при } r(0) \leqslant t \leqslant t_x + r(0).\end{cases}$$

Свяжем с путем Γ кусочно гладкую функцию r_Γ:

$$r_\Gamma(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant r(0), \\ r(t - r(0)) & \text{при } r(0) \leqslant t \leqslant t_x + r(0) \end{cases}$$

и оператор поворота

$$\Re_t(\Gamma(t)) = \\ = \begin{cases} \Re_0(\gamma(0)) & \text{при } 0 < t \leqslant r(0), \\ \Re_{t-r(0)}(\gamma(t - r(0))) & \text{при } r(0) \leqslant t \leqslant t_x + r(0). \end{cases}$$

Заменив в (3.4) Γ, r_Γ, $\Re_t(\Gamma(t))$ их выражениями через γ, r, $\Re_t(\gamma(t))$, получим требуемое.

IV. Некоторые оценки интегральных операторов

Пусть G_0, G — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $G_0 \subset G$. Рассмотрим оператор

$$Kf(x) = \int\limits_G k(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in G_0, \tag{4.1}$$

где $k\colon G_0 \times G \to \mathbb{R}$ — измеримая неотрицательная функция.

Введем

$$k(x,y,d) := \left(1 - \chi\left(\frac{|(\Re^0(x,d))^{-1}(y-x)|_\lambda}{d}\right)\right)k(x,y)$$

при $x \in G_0$, $y \in G$, $d > 0$,

$$|||k|||_{p,q} := \sup_{\substack{x \in G_0,\\ 0<d<\infty}} \|k(x,\cdot,d)|L_{p'}(G)\|\,|\Re Q_\lambda(x,d)|^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 4.1. Пусть $1 \leqslant p < q < \infty$, K — интегральный оператор (4.1) с ядром k. Тогда для $x \in G_0$

$$|Kf(x)| \leqslant 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \times \\ \times |||k|||_{p,q}\|f|L_p(G)\|^{1-\frac{p}{q}}\,\mathfrak{M}_{\lambda,\Re}(|f|^p)(x)^{\frac{1}{q}}. \ \square \tag{4.2}$$

Эта лемма обобщает невесовые результаты В.М. Кокилашвили, М.А. Габидзашвили [16, 17] и Б.В. Трушина [12] в отношении вида покрытия типа Безиковича и соответствующего ему вида максимального оператора.

Доказательство. Можно считать, что $\|f|L_p(G)\| > 0$ и что правая часть (4.2) конечна. Положим ради краткости обозначений $\Re Q_\lambda(x,d) := \Re(x,d)Q_\lambda(x,d)$. Рассмотрим последовательность $\{d_i\}_0^\infty$: $d_0 = d$, $|Q_\lambda(x,d_i)| = 2^{-i}|Q_\lambda(x,d)|$. Представим $Kf(x)$ в виде

$$Kf(x) = \int\limits_{G \setminus \Re Q_\lambda(x,d)} k(x,y)f(y)\,dy + \\ + \sum_{i=0}^\infty \int\limits_{\Re Q_\lambda(x,d_i) \setminus \Re Q_\lambda(x,d_{i+1})} k(x,y)f(y)\,dy.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями p, p' к каждому из слагаемых правой части, получим

$$|Kf(x)| \leqslant \\ \leqslant |||k|||_{p,q}|Q_\lambda(x,d)|^{-\frac{1}{q}}\|f|L_p(G \setminus \Re Q_\lambda(x,d))\| + \\ + \sum_{i=0}^\infty |||k|||_{p,q}|Q_\lambda(x,d_i)|^{-\frac{1}{q}} \times \\ \times \big\|f\big|L_p\big(\Re Q_\lambda(x,d_i) \setminus \Re Q_\lambda(x,d_{i+1})\big)\big\| \leqslant \\ \leqslant |||k|||_{p,q}|Q_\lambda(x,d)|^{-\frac{1}{q}} \times \\ \times \Big[\|f|L_p(G \setminus \Re Q_\lambda(x,d))\| + 2^{\frac{1}{p}}\big(2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - 1\big)^{-1} \times \\ \times \big(\mathfrak{M}_{\lambda,\Re}(|f|^p)(x)\big)^{\frac{1}{p}}|Q_\lambda(x,d)|^{\frac{1}{p}}\Big].$$

Из соображений монотонности и непрерывности при изменении d ясно, что при некотором d оба слагаемых в квадратной скобке окажутся равными друг другу. Обозначим их общее значение через κ. Возведя первое слагаемое в степень $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, а второе в степень $\dfrac{1}{q}$ и перемножив их, получим

$$2\kappa = 2^{1+\frac{1}{q}}\|f|L_p(G \setminus \Re Q_\lambda(x,d))\|^{1-\frac{p}{q}} \times \\ \times \big(2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\big)^{\frac{p}{q}}\big(\mathfrak{M}_{\lambda,\Re}(|f|^p)(x)^{\frac{1}{q}}|Q_\lambda(x,d)|^{\frac{1}{q}}\big),$$

откуда следует (4.2).

Лемма 4.2. Пусть $1 \leqslant p < q < \infty$, K — оператор (4.1) с ядром k. Тогда при $|||k|||_{p,q} < \infty$ оператор K имеет слабый тип (p,q). $\square$

Доказательство следует из оценок (4.1) и (1.2).

V. Оценки для операторов A_1, A_2, A_3 и доказательство теоремы 2.1

Будем считать, что $G \in \mathcal{G}(\Lambda,\sigma)$, так что $G = \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} G_k$, $G_k \in \mathcal{G}(G,\lambda^k,\sigma)$ при $k = 1, \ldots, k_0$. Произвольное из открытых множеств G_k $(1 \leqslant k \leqslant k_0)$ обозначим через G_0, λ^k через λ и рассмотрим операторы $A_i\colon L_p(G) \to L_q(G_0)$ из (3.13) – (3.15) $(i = 1,2,3)$.

Оценим сначала A_3. Учитывая, что при $\gamma = \gamma_x$

$$|x - (\gamma(t_x) + \Re_{t_x}y)| \leqslant |x - \gamma(t_x)| + |\Re_{t_x}y| \leqslant \\ \leqslant R_0 + |\Re_{t_x y}|_\lambda \leqslant R_0 + C_0,$$

имеем

$$|A_3f(x)| \leqslant \overline{A}_3f(x) := \int\limits_{G_\delta} \chi\left(\frac{y-x}{R_0+C_0}\right)|f(y)|\,dy.$$

Применяя неравенство Юнга, получаем

$$\|A_3f|L_q(G_0)\| \leqslant C\|f|L_p(G_\delta)\| \tag{5.1}$$

при $1 \leqslant p < q < \infty$.

Оценим A_if, $i = 1,2$. Запишем A_if в виде

$$A_if(x) = \int\limits_G k_i(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in G_0, \quad i = 1,2.$$

Оценим $|||k_1|||_{p,q}$, считая, что $s - \dfrac{|\lambda|}{p} + \dfrac{|\lambda|}{q} \geqslant 0$. Напомним, что $\Re_0 = \Re(x, r_\gamma(0))$. Имеем

$$|k_1(x,y,d)| = \chi\big(d|\Re^{-1}(x,d)(y-x)|_\lambda^{-1}\big) \times \\ \times \int\limits_0^{r_\gamma(0)} t^{s-1-|\lambda|}\chi\left(\frac{|\Re_0^{-1}(y-x)|_\lambda}{t}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\chi\big(d|\Re^{-1}(x,d)(y-x)|_\lambda^{-1}\big)\times \times\chi\big(r_\gamma(0)^{-1}|\Re^{-1}(x,r_\gamma(0))(y-x)|_\lambda\big)\times \times\int\limits_0^{r_\gamma(0)} t^{\frac{|\lambda|}{p}-\frac{|\lambda|}{q}-1-|\lambda|}\,dt.$$

Отсюда

$$\|k_1(x,\cdot,d)|L_{p'}(G)\|^{p'}\leqslant \leqslant C_1\int\limits_{d<|\Re^{-1}(x,r_\gamma(0))(y-x)|_\lambda<r_\gamma(0)}|\Re^{-1}(x,r_\gamma(0))\times \times(y-x)|_\lambda^{\left(\frac{|\lambda|}{p}-\frac{\lambda}{q}-|\lambda|\right)p'}\,dy= =C_1\int\limits_{d<|y|_\lambda<r_\gamma(0)}|y|_\lambda^{\left(\frac{|\lambda|}{p}-\frac{|\lambda|}{q}-|\lambda|\right)p'}\,dy\leqslant C_2d^{-\frac{|\lambda|}{q}p'},$$

так что

$$|||k_1|||_{p,q}\leqslant C_3. \qquad (5.2)$$

Для ядра k_2 при $1\leqslant p<\infty$, $s-\dfrac{\sigma(|\lambda|-1)+1}{p}+\dfrac{|\lambda|}{q}\geqslant 0$ имеем

$$|k_2(x,y,d)|=\chi\big(d|\Re^{-1}(x,d)(y-x)|_\lambda^{-1}\big)\times \times\int\limits_0^{t_x}(t+r_\gamma(0))^{s-1}r_\gamma(t)^{-|\lambda|}\chi\left(\frac{|\Re_t^{-1}y-\gamma(t)|_\lambda}{r_\gamma(t)}\right)dt.$$

Применяя (в случае $p>1$) неравенство Гёльдера, получаем

$$|k_2(x,y,d)|^{p'}\leqslant\chi\big(d|\Re^{-1}(x,d)(y-x)|_\lambda^{-1}\big)\times \times\int\limits_0^{t_x}\chi\big(r_\gamma(t)^{-1}|\Re_ty-\gamma(t)|_\lambda\big)\times \times(t+r_\gamma(0))^{(s-1)p'}r_\gamma(t)^{\left(\frac1p-|\lambda|\right)p'}dt\times \times\left(\int\limits_0^{t_x}\frac{1}{r_{\gamma(t)}}\,\chi\big(r_\gamma(t)^{-1}|\Re_t^{-1}y-\gamma(t)|_\lambda\big)\,dt\right)^{\frac{p'}{p}}.$$

Учитывая свойство 6° разд. 2, имеем отсюда

$$\|k_2(x,\cdot,d)|L_{p'}(G)\|^{p'}\leqslant \leqslant C_1^{p'}\int\limits_{G\setminus\Re Q_\lambda(x,d)}\int\limits_0^{t_x}\chi\big(r_\gamma(t)^{-1}|\Re_t^{-1}(y-\gamma(t))|_\lambda\big)\times \times(t+r_\gamma(0))^{(s-1)p'}r_\gamma(t)^{\left(\frac1p-|\lambda|\right)p'}\,dt\,dy.$$

Из свойства 5° разд. 2 следует, что если

$$y\notin\Re(x,d)Q_\lambda(x,d),\quad y\in\Re_tQ_\lambda(\gamma(t),r_\gamma(t)),$$

то $\varepsilon_1d\leqslant r_\gamma(0)+t$. Поэтому

$$\|k_2(x,\cdot,d)|L_{p'}(G)\|^{p'}\leqslant \leqslant C_1\int\limits_0^{t_x}\chi\left(\frac{d}{c_2\max\{r_\gamma((0),t\}}\right)\times \times(t+r_\gamma(0))^{(s-1)p'}r_\gamma(t)^{\left(\frac1p-|\lambda|\right)p'+|\lambda|}\,dt= =C_1\int\limits_0^{y_x}\chi\left(\frac{d}{c_2\max\{r_\gamma(0),t\}}\right)\times \times(t+r_\gamma)(0)^{(s-1)p'}r_\gamma(t)^{(1-|\lambda|)\frac{p'}{p}}\,dt.$$

Тогда, считая, что $t_\gamma(t)\geqslant ct^\sigma,\sigma\geqslant 1$, имеем

$$|||k_2|||_{p,q}^{p'}\leqslant C_2\sup_{x\in G_0,0<d\leqslant d_0}(I_1^{p'}(x,d)+I_2^{p'}(x,d)),$$

где при $\tau_x=\min\{t_x,r_\gamma(0)\}$

$$I_1(x,d)^{p'}= =d^{\frac{|\lambda|}{q}p'}\int\limits_0^{\tau_x}\chi\left(\frac{d}{c_3r_\gamma(0)}\right)r(0)^{\left(s-1+\frac{1-|\lambda|}{p}\right)p'}\,dt\leqslant \leqslant C_4r_\gamma(0)^{\frac{|\lambda|}{q}p'+\left(s-1+\frac{1-|\lambda|}{p}\right)p'+1}\leqslant \leqslant C_5r_\gamma(0)^{\left[s-|\lambda|\left(\frac1p-\frac1q\right)\right]p'}\leqslant C_6,$$

$$I_2(x,d)^{p'}=d^{\frac{|\lambda|}{q}p'}\int\limits_{\tau_x}^{t_x}\chi\left(\frac{d}{c_4t}\right)t^{\left[s-\frac{\sigma(|\lambda|-1)+1}{p}\right]p'-1}dt\leqslant \leqslant C_7d^{\frac{|\lambda|}{q}p'}\int\limits_{\tau_x}^{t_x}\chi\left(\frac{d}{c_4t}\right)t^{-\frac{|\lambda|}{q}p'-1}\,dt\leqslant C_8.$$

Объединяя результаты, получаем

$$|||k_2|||_{p,q}<\infty \quad\text{при}\quad s-\frac{\sigma(|\lambda|-1)+1}{p}+\frac{|\lambda|}{q}\geqslant 0. \qquad (5.3)$$

Лемма 5.1. 1°. Пусть $s\in\mathbb{N}$, $\lambda\in[1,\infty)^n$, $\min\lambda_i=1$, $1\leqslant p<q<\infty$, $s-\dfrac{|\lambda|}{p}+\dfrac{|\lambda|}{q}\geqslant 0$.

Тогда оператор A_1 имеет слабый (p,q)-тип.

Если же при этом $p>1$ или $s-\dfrac{|\lambda|}{p}+\dfrac{|\lambda|}{q}>0$, то оператор A_1 имеет сильный (p,q)-тип.

2°. Пусть $s\in\mathbb{N}$, $\lambda\in[1,\infty)^n$, $\min\lambda_i=1$, $1\leqslant p<q<\infty$, $\sigma\geqslant 1$, $s-\dfrac{\sigma(|\lambda|-1)+1}{p}+\dfrac{|\lambda|}{q}\geqslant 0$, $G_0\in\mathcal{G}(G,\lambda,\sigma)$. Пусть оператор A_2 построен по γ,r_γ, удовлетворяющим требованиям 1–6 из определения 2.1.

Тогда оператор $A_2\colon L_p(G)\to L_q(G_0)$ имеет слабый (p,q)-тип.

Если же при этом $p>1$ или $s-\dfrac{\sigma(|\lambda|-1)+1}{p}+\dfrac{|\lambda|}{q}>0$, то оператор A_2 имеет сильный (p,q)-тип. □

Доказательство. Из оценок (5.2), (5.3) с помощью леммы 4.2 заключаем, что каждый из операторов A_1,A_2 имеет слабый (p,q)-тип. Отсюда с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича получаем утверждения леммы о сильном (p,q)-типе.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть область $G\in\mathcal{G}(\Lambda,\sigma)$. Тогда $G=\bigcup\limits_{k=1}^{k_0}G_k$, причем $G_k\in\mathcal{G}(G,\lambda^k,\sigma)$. Пусть $f\in C^\infty(G)$. При каждом $k=1,\ldots,k_0$ для каждого $x\in G_k$ справедлива оценка (3.11). В силу оценки (5.1) и леммы 5.1 операторы $A_i \colon L_p(G) \cap C^\infty(G) \to L_q(G_k)$ $(i = 1, 2, 3)$ ограничены. Следовательно, при $1 \leqslant k \leqslant k_0$ для $f \in W_p^s(G) \cap C^\infty(G)$ справедлива оценка

$$\|f|L_q(G_k)\| \leqslant C\left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_p(G)\| + \|f|L_p(G_\delta)\|\right),$$

из которой следует оценка (2.1) для $f \in C^\infty(G)$. В силу плотности $C^\infty(G)$ в $W_p^s(G)$ оценка (2.1) остается верной для произвольных функций f с конечной правой частью (2.1).

Литература

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. Англ. пер.: S.L. Sobolev, Some applications of functional analysis in mathematical physics // Transl. Math. Monogr. 90, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

2. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. Англ. пер.: Sobolev spaces. – Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin 1985.

3. *Решетняк Ю.Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. матем. журн. – 1980. – Т. 21:6. – С. 108–116. Англ. пер.: Yu.G. Reshetnyak, Integral representation of differentiable functions in domains with nonsmooth boundary, Siberian Math. J. – 1981. – V. 21:6. – P. 883–839.

4. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983.

5. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. Англ. пер.: O.V. Besov, V.P. Il'in, S.M. Nikol'skii, Integral representations of functions and imbedding theorems. – V.H. Winston & Sons, Washington, DC; J. Wiley & Sons, New York, 1978, 1979. Vols. 1, 2.

6. *Бесов О.В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Матем. сб. – 2001. – Т. 192:3. – С. 3–26; Англ. пер.: O.V. Besov, Sobolev's embedding theorem for a domain with irregular boundary // Sb. Math. – 2001. – V. 192:3. – P. 323–346.

7. *Бесов О.В.* Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях // Матем. сб. – 2010. – Т. 201:12. – С. 69–82; Англ. пер.: O.V. Besov, Integral estimates for differentiable functions on irregular domains // Sb. Math. – 2010. – V. 201:12. – P. 1777–1790.

8. *Kilpeläinen T., Malý J.* Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Ztschr. Anal. und Anwend. – 2000. – V. 19:2 – P. 369–380.

9. *Лабутин Д.А.* Неулучшаемость неравенств Соболева для класса нерегулярных областей // Тр. МИАН. – 2001. – Т. 232. – Р. 218–222. Англ. пер.: D.A. Labutin, Sharpness of Sobolev inequalities for a class of irregular domains // Proc. Steklov Inst. Math. – 2001. – V. 232. – P. 211–215.

10. *Лабутин Д.А.* Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 170–179. Англ. пер.: D.A. Labutin, Embedding of Sobolev Spaces on Hölder Domains // Proc. Steklov Inst. Math. – 1999. – V. 227. – P. 163–172.

11. *Мазья В.Г., Поборчий С.В.* Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гёльдеровой области // Алгебра и анализ. – 2006. – Т. 18:4. – С. 95–126.

12. *Трушин Б.В.* Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Тр. МИАН. – 2008. – Т. 260. – С. 297–319. Англ. пер.: B.V. Trushin, Sobolev Embedding Theorems for a Class of Anisotropic Irregular Domains // Proc. Steklov Inst. Math. – 2008. – V. 260. – P. 287–309.

13. *Трушин Б.В.* Непрерывность вложений весовых пространств Соболева в пространства Лебега на анизотропно нерегулярных областях // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 271–289. Англ. пер.: B.V. Trushin, Continuity of Embeddings of Weighted Sobolev Spaces in Lebesgue Spaces on Anisotropically Irregular Domains // Proc. Steklov Inst. Math. – 2010. – V. 269. – P. 265–283.

14. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. – М.: Мир, 1978. Пер. с англ.: M. de Guzmán. Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. Berlin: Springer, 1975.

15. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973; пер. с англ. Ellas M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. – Princeton univ. press, 1970.

16. *Кокилашвили В.М., Габидзашвили М.А.* О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций // ДАН СССР. – 1985. – Т. 282:6. – С. 1304–1306; Англ. пер.: V.M. Kokilashvili, M.A. Gabidzashvili, On weighted inequalities for anisotropic potentials and maximal functions // Sov. Math. Dokl. – 1985. – V. 31:3. – P. 583–585.

17. *Габидзашвили М.А.* Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Тр. Тбилисского матем. института. – 1986. – Т. 82. – С. 25–36.

18. *Бесов О.В.* Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 214. – С. 25–58. Англ. пер.: O.V. Besov, Embedding of spaces of differentiable functions of variable smoothness // Proc. Steklov Inst. Math. – 1996. – V. 214. – P. 19–53.

Поступила в редакцию 14.02.2011