Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи по теории моделей

1. Какие из следующих упорядоченных множеств являются элементарно эквивалентными в сигнатуре $\leqslant$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}+\mathbb{N}$, $\mathbb{N}+\mathbb{N}+\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}+\mathbb{N}$, $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}+\mathbb{R}$, $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, $\langle 2^{\mathbb{N}}, \subset \rangle$, $\langle \mathbb{N}^2, \leqslant_{lex} \rangle$, $\langle \mathbb{N}^2, \leqslant_{stand} \rangle$, $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_{lex} \rangle$, $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_{stand} \rangle$, $\langle \mathbb{R}^k, \leqslant_{stand} \rangle$, $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leqslant_{stand} \rangle$, $\langle [0,1]^2, \leqslant_{stand} \rangle$, $\langle$Ромб с вершинами $(0,0), (1,2), (2,1), (3,3), \leqslant_{stand} \rangle$?

(Напоминание: суммой упорядоченных множеств $\langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\langle B, \leqslant_B \rangle$ называется множество $A + B = \langle A \sqcup B, \leqslant \rangle$, где $x \leqslant y$, если $x \in A$, $y \in B$, или $x, y \in A$ и $x \leqslant_A y$, или $x, y \in B$ и $x \leqslant_B y$. Лексикографический порядок $\leqslant_{lex}$ определяется сравнением первых компонент, при их равенстве — вторых, и т.д. Стандартный порядок $\leqslant_{stand}$ определяется сравнением всех компонент.)

2. Докажите, что абелевы группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_k$ при различных k попарно не элементарно эквивалентны, но любая замкнутая формула, истинная в $\mathbb{Z}$, истинна в $\mathbb{Z}_k$ при всех достаточно больших k.

3. Пусть V — множество вершин некоторого графа, двуместный предикат e означает, что вершины соединены ребром. Докажите, что не существует замкнутой формулы, верной для всех связных графов и неверных для всех несвязных.

4. Придумайте замкнутую формулу, выполнимую только в интерпретациях, состоящих хотя бы из 7 элементов. Какое наименьшее количество предикатных символов необходимо для написания такой формулы?

5. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной интерпретации, но не общезначимы:

a) $\exists x \forall y \exists z ((P(y,z) \to P(x,z)) \to (P(x,x) \to P(y,x)))$;
b) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_1) \wedge (P(x_1,x_3) \to (P(x_1,x_2) \vee P(x_2,x_3)))) \to \exists y \forall z P(y,z)$.

Теорией называется произвольное множество замкнутых формул. *Моделью* теории называется интерпретация, в которой все формулы этой теории истинны. Интерпретация сигнатуры, содержащей символ $=$, (модель теории в такой сигнатуре) называется *нормальной*, если символ $=$ интерпретируется как совпадение элементов. *Спектром* теории с равенством называется множество мощностей всех её конечных нормальных моделей.

6. Придумайте теорию, спектр которой:

a) Пуст;
b) Равен $\mathbb{N}$;
c) Равен $\{5\}$;
d) Равен данному конечному множеству;
e) Равен множеству чётных чисел;
f) Равен множеству нечётных чисел;
g) Равен множеству составных чисел;

h) Равен множеству простых чисел;
i) Равен множеству степеней двойки.