Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №1, вариант 1

1. Определим красивые последовательности из букв a и b следующим образом. Последовательность из одной буквы a является красивой. Если последовательность φ красива, то последовательности φb и $\varphi\varphi$ также красивы. Верна ли для красивых последовательностей теорема об однозначности разбора? Если верна, то докажите, если нет — приведите пример последовательности, разбираемой неоднозначно.

2. Напишите таблицу истинности формулы $((\neg r \to (\neg p \vee q)) \to (r \wedge p)) \wedge (r \vee \neg q)$. Приведите её к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам и напишите эквивалентный ей многочлен Жегалкина.

3. Являются ли следующие системы связок полными? Если нет, то докажите это, если являются, то выразите через них отрицание и конъюнкцию:

a) $\{1, \mathrm{eq}\}$, где eq — функция трёх аргументов, истинная, если все её аргументы одинаковы.

b) $\{0, \mathrm{minor}\}$, где minor — функция трёх аргументов, принимающая то же значение, что и меньшинство аргументов.

4. Не опираясь на теорему о полноте, докажите выводимость формулы $((A \to B) \to B) \to (A \vee B)$. (Можно использовать лемму о дедукции и правила вывода, сформулированные на лекциях).

5*. Классом T_0^∞ называется множество функций f, таких что для некоторого i выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant x_i$. Докажите, что если $f \in T_0^\infty$, то f можно выразить через отрицание импликации.

6*. Докажите, что формула, построенная из связок $\leftrightarrow$ и $\neg$, является тавтологией тогда и только тогда, когда каждая переменная, а также знак отрицания встречаются в ней чётное число раз.

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №1, вариант 2

1. Определим красивые последовательности из букв a и b следующим образом. Последовательность из одной буквы a является красивой. Если последовательность φ красива, то последовательности $b\varphi$ и $\varphi\varphi$ также красивы. Верна ли для красивых последовательностей теорема об однозначности разбора? Если верна, то докажите, если нет — приведите пример последовательности, разбираемой неоднозначно.

2. Напишите таблицу истинности формулы $((p \vee q) \to \neg r) \wedge ((\neg p \to (q \wedge r)) \to p)$. Приведите её к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам и напишите эквивалентный ей многочлен Жегалкина.

3. Являются ли следующие системы связок полными? Если нет, то докажите это, если являются, то выразите через них отрицание и дизъюнкцию:

a) $\{1, \mathrm{diff}\}$, где diff — функция трёх аргументов, истинная, если не все её аргументы одинаковы.

b) $\{\neg, \mathrm{minor}\}$, где minor — функция трёх аргументов, принимающая то же значение, что и меньшинство аргументов.

4. Не опираясь на теорему о полноте, докажите выводимость формулы $((A \to B) \to A) \to A$. (Можно использовать лемму о дедукции и правила вывода, сформулированные на лекциях).

5*. Классом T_1^∞ называется множество функций f, таких что для некоторого i выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant x_i$. Докажите, что если $f \in T_1^\infty$, то f можно выразить через импликацию.

6*. Докажите, что формула, построенная из связок $\leftrightarrow$ и $\neg$, является тавтологией тогда и только тогда, когда каждая переменная, а также знак отрицания встречаются в ней чётное число раз.