УДК 519.175.4 + 519.174.7

А. А. Кокоткин[1], *А. М. Райгородский*[1,2,3]

[1] Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
[2] Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;
[3] Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

О реализации случайных графов графами диаметров

Работа находится на стыке комбинаторной геометрии и теории случайных графов. Мы изучаем условия, при которых случайный граф в модели Эрдеша—Реньи содержит подграфы, изоморфные графам диаметров на плоскости с хроматическим числом 3. Для соответствующей экстремальной характеристики случайного графа удается получить точные по порядку оценки и даже асимптотики.

Ключевые слова: случайный граф, граф диаметров, хроматическое число.

1. Введение

Настоящая работа лежит на стыке комбинаторной геометрии и теории случайных графов. С точки зрения комбинаторной геометрии речь идет о некоторых аспектах проблемы Борсука для случая двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Назовем граф $G = (V, E)$ (*двумерным*) *графом диаметров*, если $V \subset \mathbb{R}^2$, $|V| < \infty$, и

$$E = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam} V := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right\}.$$

Хорошо известно, что у любого графа диаметров хроматическое число не превосходит трех: $\chi(G) \leqslant 3$. Этот факт можно легко доказать по индукции (см. [1, 2]) с учетом оценки $|E| \leqslant |V|$, которая также доказывается с помощью индукции.

Рассмотрение графов диаметров напрямую связано с классической гипотезой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [3—7]). В частности, большую роль играют графы диаметров с максимальным хроматическим числом. Как мы уже говорили, на плоскости это графы с хроматическим числом 3.

В этой работе мы изучим вопрос о том, как часто встречаются на плоскости графы диаметров с хроматическим числом 3. Аналогичный вопрос для графов расстояний уже изучался в статьях [11—13].

Будем исследовать задачу в терминах модели Эрдеша—Реньи случайного графа (см. [8—10]). А именно, пусть $V_n = \{1, \ldots, n\}$, $p = p(n) \in [0, 1]$ и $G(n, p) = (\Omega_n, \mathscr{F}_n, P_{n,p})$ — вероятностное пространство, в котором Ω_n — множество всех графов на V_n без петель, кратных ребер и ориентации (так что $|\Omega_n| = 2^{C_n^2}$), $\mathscr{F}_n = 2^{\Omega_n}$,

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1 - p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Иными словами, берутся случайные графы на n вершинах, в которых ребра проводятся взаимно независимо с одной и той же вероятностью p.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00683, гранта Президента РФ № МД-666.2012.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

Положим

$$u(n,p) = \max\Big\{k:\ P_{n,p}\big(\exists\ H=(W,F)\subset G:\ |W|=k,\ H=G|_W,\ H\text{ — граф диаметров},\ \chi(H)=3\big) > \frac{1}{2}\Big\}.$$

Таким образом, мы ищем максимальное количество вершин в индуцированном подграфе случайного графа, который одновременно реализуется графом диаметров на плоскости и имеет наибольшее возможное в этом случае хроматическое число. Если для любого k

$$P_{n,p}\big(\exists\ H=(W,F)\subset G:\ |W|=k,\ H=G|_W,\ H\text{— граф диаметров},\ \chi(H)=3\big) \leqslant \frac{1}{2},$$

то полагаем $u(n,p)=0$.

В следующем разделе мы сформулируем основные результаты для $u(n,p)$.

2. Формулировки результатов

Если функция $p=p(n)$ вероятности ребра очень близка к нулю или к единице, то величина $u(n,p)$ совсем мала. А именно, справедливы следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Тогда при всех достаточно больших* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено* $u(n,p)=0$.

Теорема 2. *Пусть* $q := 1-p = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. *Тогда при всех достаточно больших* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено* $u(n,p)=3$.

Теорема 3. *Пусть* $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *но при этом* $qn^{1.5}\to\infty$. *Тогда при всех достаточно больших* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено* $u(n,p)=4$.

Если и p, и q более существенно отделены от нуля, то функция u растет. В большинстве ситуаций удается найти точный порядок ее роста и даже ее асимптотику.

Теорема 4. *Положим* $\tau(n)=pn$ *и* $\sigma(n)=q\ln n$. *Пусть* $\tau(n)$ *и* $\sigma(n)$ *стремятся к бесконечности с ростом* n. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* n_0, *что при* $n\geqslant n_0$ *выполнено*

$$u(n,p)\leqslant(2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 5. *Положим* $\tau(n)=\frac{p\sqrt[4]{n}}{\ln n}$ *и* $\sigma(n)=q\ln n$. *Пусть* $\tau(n)$ *и* $\sigma(n)$ *стремятся к бесконечности с ростом* n. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* n_0, *что при* $n\geqslant n_0$ *выполнено*

$$u(n,p)\geqslant\left(2-\varepsilon+\frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Поскольку в теореме 5 при больших n заведомо $p>\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, а также с учетом $p\leqslant 1$, имеем

$$\frac{4\ln p}{\ln(np)} = 4-\frac{4\ln n}{\ln(np)} \geqslant 4-\frac{4\ln n}{\frac{3}{4}\ln n} = -\frac{4}{3}.$$

Значит, во всяком случае

$$u(n,p)\geqslant\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np),$$

и это лишь в константу раз хуже оценки из теоремы 4. Более того, если для любого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \to \infty$ при $n \to \infty$, то $\frac{4\ln p}{\ln(np)} \to 0$, т.е. из теорем 4 и 5 мы имеем асимптотику

$$u(n,p) \sim 2\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

3. Доказательства результатов

3.1. Доказательство теоремы 1

Хорошо известно, что при $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ случайный граф является лесом (т.е. все его компоненты суть деревья) с асимптотической вероятностью 1. Но индуцированный подграф леса на любых k вершинах и с любым $k \in \{1,\ldots,n\}$ сам является лесом, т.е., в частности, имеет хроматическое число не больше двух. Значит, при достаточно больших n и всех k

$$P_{n,p}(\mathscr{A}(n,p,k)) = \\ = P_{n,p}\big(\exists\ H = (W,F) \subset G:\ |W| = k,\ H = G|_W,\ H\text{ — граф диаметров},\ \chi(H) = 3\big) \leqslant \frac{1}{2},$$

так что $u(n,p) = 0$ при больших n. Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2

При $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является паросочетанием (набором изолированных ребер и вершин). Значит, при больших n с вероятностью больше $\frac{1}{2}$ граф G содержит треугольник, т.е. обладает свойством $\mathscr{A}(n,p,3)$. Однако при $k \geqslant 4$ с той же вероятностью любой k-вершинный индуцированный подграф H случайного графа либо является циклом на четырех вершинах (при $k = 4$), либо имеет строго больше, чем k, ребер. В первом случае $\chi(H) = 2$; во втором случае H нельзя реализовать графом диаметров на плоскости (см. введение). Значит, при $k \geqslant 4$ свойство $\mathscr{A}(n,p,k)$ не выполнено с нужной вероятностью. Теорема доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3

Сперва покажем, что $u(n,p) \leqslant 4$. Поскольку $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является лесом. Значит, у $\overline{G}$ с большой вероятностью на любых k вершинах не более $k-1$ ребер. Соответственно, у G наоборот на каждых k вершинах не менее $C_k^2 - (k-1) = C_{k-1}^2$ ребер. Но из введения мы знаем, что у любого графа диаметров на плоскости, имеющего k вершин, не более k ребер. Следовательно, свойство $\mathscr{A}(n,p,k)$ может иметь большую вероятность лишь при условии, что $C_{k-1}^2 \leqslant k$, откуда $k \leqslant 4$.

Покажем теперь, что $u(n,p) \geqslant 4$. Для этого достаточно взять какой-нибудь подходящий граф диаметров с четырьмя вершинами, который имеет хроматическое число 3 и с большой вероятностью содержится в случайном графе. Возьмем граф A_4, представляющий собой треугольник, к одной вершине которого прицеплено третье ребро. На рис. 1 представлена реализация A_4 в виде графа диаметров на плоскости.

Дополнением до A_4 в полном графе служит граф, компоненты которого суть цепь P_2 длины 2 и одна изолированная вершина. Докажем, стало быть, что при наших условиях

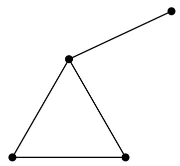

Рис. 1

случайный граф $\overline{G}$ с большой вероятностью содержит одновременно и указанную цепь, и указанную вершину.

Поскольку $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то изолированная вершина с асимптотической вероятностью 1 есть (см. [8]). На самом деле здесь хватило бы даже условия $q = \frac{c \ln n}{n}$ с любым $c < 1$.

Пусть теперь X — случайная величина, равная количеству индуцированных копий P_2 в случайном графе $\overline{G}$. Нам достаточно установить асимптотику $P_{n,q}(X \geqslant 1) \to 1$, $n \to \infty$. Применим неравенство Чебышева:

$$P_{n,q}(X \geqslant 1) = 1 - P_{n,q}(X \leqslant 0) = 1 - P_{n,q}(MX - X \geqslant MX) \geqslant 1 - \frac{DX}{(MX)^2}.$$

Обозначим через $M_f^2 X$ второй факториальный момент величины X. Тогда $DX = M_f^2 X + MX - (MX)^2$, т.е.

$$1 - \frac{DX}{(MX)^2} = 1 - \frac{M_f^2 X}{(MX)^2} - \frac{1}{MX} + 1.$$

Если мы проверим, что $MX \to \infty$ и $M_f^2 X \sim (MX)^2$, то правая часть последнего равенства будет асимптотически равна единице и теорема будет доказана.

Во-первых, $MX = 3C_n^3 q^2 p$. Далее, $MX = \Theta\left(n^3 q^2\right)$, поскольку $p \to 1$. Но по условию теоремы $qn^{1.5} \to \infty$, и, стало быть, $n^3 q^2 \to \infty$. Первая асимптотика проверена.

Во-вторых,

$$M_f^2 X = \sum_{H_1, H_2} MX_{H_1, H_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных графов $H_1, H_2 \subset K_n$, изоморфных графу P_2, а X_{H_1,H_2} — индикатор одновременного попадания графов H_1, H_2 в случайный граф $\overline{G}$ в качестве индуцированных подграфов. Если выделить те слагаемые, в которых графы H_1, H_2 имеют непересекающиеся множества вершин, то получится величина $9C_n^3 C_{n-3}^3 (q^2 p)^2 \sim (MX)^2$. Нетрудно видеть, учитывая асимптотику $qn^{1.5} \to \infty$, что остальные слагаемые бесконечно малы по сравнению с указанной величиной. Таким образом, мы действительно имеем $M_f^2 X \sim (MX)^2$.

Теорема доказана.

3.4. Доказательство теоремы 4

Сперва докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть в графе G, имеющем n вершин, для некоторого $k < n$ выполнено следующее условие: у любого индуцированного подграфа H графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше k. Тогда для любого $l > k$ выполнено то же самое, т.е. у любого индуцированного подграфа H графа G, имеющего l вершин, число ребер строго больше l.*

Доказательство леммы 1. Достаточно доказать утверждение леммы при $l = k + 1$. Пусть $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$. Пусть также $W = \{w_1, \ldots, w_{k+1}\} \subseteq V$. Рассмотрим $W' = \{w_1, \ldots, w_k\}$. По условию леммы $|E(G|_{W'})| > k$. Если $|E(G|_{W'})| \geqslant k + 2 = l + 1$, то тем более $|E(G|_W)| \geqslant l+1$, и нужный факт установлен. Предположим, стало быть, что $|E(G|_{W'})| = k+1$. Если теперь хотя бы одно ребро идет из w_{k+1} в W', то снова $|E(G|_W)| \geqslant k+2 = l+1$, и все в порядке. Допустим, однако, что из w_{k+1} ни одно ребро не идет в W'. Поскольку $|E(G|_{W'})| = k+1$, в W' есть хотя бы одна вершина графа $G|_{W'}$ степени не меньше двух. Без ограничения общности это w_1. Рассмотрим $W'' = \{w_2, \ldots, w_{k+1}\}$. С одной стороны, сделанное выше допущение означает, что $|E(G|_{W''})| \leqslant |E(G|_{W'})| - 2 = k-1$. С другой стороны, $|W''| = k$, так что по условию леммы $|E(G|_{W''})| \geqslant k+1$. Противоречие, и лемма доказана.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ (см. условие теоремы 4) и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np) \right\rceil.$$

Прежде всего покажем, что $k \to \infty$. В самом деле, с учетом неравенства $-\ln(1-p) < \dfrac{p}{1-p}$ имеем

$$\log_{\frac{1}{1-p}}(np) = \frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)} > \frac{(1-p)\ln(np)}{p}.$$

Значит, если $p \not\to 1$, то, поскольку $np \to \infty$, получаем $k \to \infty$. Если же $p \to 1$, то заменяем $1-p = q$ на $\dfrac{\sigma(n)}{\ln n}$ (см. условие теоремы) и получаем, в свою очередь,

$$\frac{(1-p)\ln(np)}{p} = \frac{\sigma(n)\ln(np)}{p\ln n} \sim \sigma(n) \to \infty.$$

Далее, снова воспользуемся тем фактом, что у любого графа диаметров на плоскости, имеющего k вершин, число ребер не больше k.

Обозначим через $\mathscr{A}_k$ событие, состоящее в том, что у любого индуцированного подграфа H случайного графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше k. Положим $P_k = P_{n,p}(\mathscr{A}_k)$. Если найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено $P_k > \frac{1}{2}$, то с вероятностью, большей половины, в случайном графе G не найдется индуцированного подграфа H, представимого как граф диаметров и имеющего k вершин. А по лемме 1 не найдется и такого подграфа большего размера, т.е. $u(n,p) < k$.

В дальнейшем мы покажем, что $P_k \to 1$ при $n \to \infty$, и это завершит доказательство теоремы 4.

Обозначим через X_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа, имеющих не более k ребер. Тогда $P_k = P_{n,p}(X_k = 0)$ и с учетом неравенства Маркова

$$P_k = P_{n,p}(X_k = 0) = 1 - P_{n,p}(X_k \geqslant 1) \geqslant 1 - MX_k,$$

так что остается доказать асимптотику $MX_k \to 0$. За счет линейности математического ожидания получаем

$$MX_k = C_n^k \sum_{i=0}^{k} C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i}.$$

Убедимся в том, что в этой сумме максимальным является последнее слагаемое. Для этого разделим $(i+1)$-е слагаемое на i-е $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ и проверим, что отношение не меньше единицы:

$$\frac{C_{C_k^2}^{i+1} p^{i+1} q^{C_k^2 - i - 1}}{C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i}} = \frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Понятно, что функция $\dfrac{C_k^2 - i}{i+1}$ убывает по i. Значит,

$$\frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \geqslant \frac{C_k^2 - k + 1}{k} \cdot \frac{p}{q} > \frac{C_k^2 - k}{k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q}.$$

Мы хотим показать, что

$$\frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q} \geqslant 1,$$

а покажем даже, что

$$\frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q} \to \infty.$$

Упростим, стало быть, запись и рассмотрим выражение $\dfrac{kp}{q}$. Поскольку $np \to \infty$ и $-\ln(1-p) < \dfrac{p}{1-p}$, имеем

$$\frac{kp}{q} > \frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{1-p} > 2\ln(np) \to \infty.$$

Итак, при больших n

$$MX_k \leqslant (k+1) C_n^k C_{C_k^2}^k p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Воспользуемся простыми оценками $C_a^b \leqslant \left(\dfrac{3a}{b}\right)^b$ и $C_a^b \leqslant \dfrac{a^b}{b!}$. Получаем

$$MX_k \leqslant (k+1)\left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{(C_k^2)^k}{k!} p^k q^{C_k^2 - k} \leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{2k}}{k!} p^k q^{C_k^2 - k} \leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{2k}}{(k/e)^k} p^k q^{C_k^2 - k} =$$

$$= (3e)^k n^k p^k q^{\frac{k(k-3)}{2}} = \left(3enpq^{\frac{k-3}{2}}\right)^k.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что в ее условиях величина $npq^{\frac{k-3}{2}}$ стремится к нулю. Итак,

$$npq^{\frac{k-3}{2}} < \exp\left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\ln(np)}{-\ln q} \ln q + \ln(np)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \ln(np)\right) \to 0.$$

Теорема доказана.

3.5. Доказательство теоремы 5

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left[\left(2 - \varepsilon + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right) \log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right].$$

При доказательстве теоремы 4 мы уже, по сути, убедились в том, что $k \to \infty$: в самом деле из раздела 2 мы знаем, что

$$\left(2 - \varepsilon + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right) \log_{\frac{1}{1-p}}(np) \geqslant \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right) \log_{\frac{1}{1-p}}(np),$$

а неограниченный рост последней величины мы установили при доказательстве теоремы 4 даже в более слабых ограничениях на функцию p.

Нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u(n,p) \geqslant k$. Наличие целой части не играет никакой роли, т.к. $k \to \infty$ и при необходимости мы просто можем заменить

ε на $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$. В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geqslant n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Любой цикл с нечетным числом вершин можно реализовать на плоскости как граф диаметров с хроматическим числом 3. Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся циклами. Если мы докажем, что при больших n выполнено $P_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $P_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

В силу неравенства Чебышева (ср. § 3.3) имеем

$$P_{n,p}(Y_k > 0) = P_{n,p}(Y_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \frac{DY_k}{(MY_k)^2}.$$

Как и в параграфе 3.3, остается установить две асимптотики: $MY_k \to \infty$ и $M_f^2 Y_k \sim (MY_k)^2$. За счет линейности математического ожидания имеем

$$MY_k = C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Нетрудно видеть, что

$$k = \Theta\left(\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) < \Theta\left(\frac{\ln n}{-\ln(1-p)}\right) \leqslant \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) = \Theta\left(\frac{\sqrt[4]{n}\ln n}{\tau(n)\ln n}\right) = o\left(\sqrt[4]{n}\right).$$

Поэтому $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$MY_k \sim \frac{n^k}{k!}\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} = \frac{n^k}{2k} p^k q^{C_k^2 - k} > \frac{1}{2k} n^k p^k q^{k^2/2} = \frac{1}{2k}\left(npq^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $MY_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$npq^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k имеем

$$\ln(np) + \left(2 - \varepsilon' + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q =$$
$$= \left(1 - \frac{2-\varepsilon'}{2}\right)\ln(np) - 2\ln p = \frac{\varepsilon'}{2}\ln(np) - 2\ln p > \frac{\varepsilon'}{2}\ln(np) \to \infty,$$

и все доказано.

Проверим теперь асимптотику $M_f^2 Y_k \sim (MY_k)^2$. Как обычно,

$$M_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} MY_{C_1, C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных k-вершинных циклов $C_1, C_2 \subset K_n$, а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания циклов C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Как и в параграфе 3.3, отдельно рассмотрим слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \varnothing$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}\right)^2 \sim \left(C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}\right)^2 = (MY_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o(\sqrt[4]{n})$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1, C_2} - S_1 = o((MY_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары циклов C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2) можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k-1\}$, $l \in \{0, \ldots, m-1\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l}.$$

Допустим, мы доказали, что при всех m, l

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2-k)-C_m^2+l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2-k)}} = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Тогда

$$S_2 \leqslant k^2 C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2-k)} \cdot o\left(\frac{1}{k^2}\right) =$$
$$= o\left(C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2-k)}\right) = o((MY_k)^2),$$

и теорема доказана.

Итак, имеем

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2-k)-C_m^2+l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2-k)}} = \frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)}{(n-2k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2k+m)} C_k^m p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant$$
$$\leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-m+1} q^{-C_m^2}.$$

Остается показать, что при всех $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ выполнено

$$k^2 k^{2m} n^{-m} p^{-m+1} q^{-C_m^2} = \exp\Big((2m+2)\ln k - m\ln n - (m-1)\ln p - C_m^2 \ln q\Big) \to 0.$$

Если рассмотреть выражение в показателе экспоненты как функцию от m, то ввиду неравенства $\ln q < 0$ это квадратичная функция с положительным коэффициентом при m^2. Значит, ее максимум по m достигается либо при $m = 1$, либо при $m = k-1$. При $m = 1$ имеем (с учетом $k = o(\sqrt[4]{n})$)

$$4\ln k - \ln n = \ln\left(\frac{k^4}{n}\right) = \ln(o(1)) \to -\infty,$$

и все доказано. При $m = k - 1$ имеем

$$\begin{aligned}2k\ln k - (k-1)\ln n - (k-2)\ln p - C_{k-1}^2 \ln q \leqslant k\left(\ln(k^2) - \frac{k-2}{k}\ln(np) - \frac{k}{2}\ln q\right) \leqslant \\ \leqslant k\left(\ln(k^2) - \frac{k-2}{k}\ln(np) - \left(2 - \varepsilon' + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q\right) = \\ = k\left(\frac{2-\varepsilon'}{2}\ln(np) + \left(\frac{2}{k} - 1\right)\ln(np) + \ln(k^2) + 2\ln p\right) = \\ = k\ln(np)\left(\frac{2-\varepsilon'}{2} - 1 + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right) = \\ = k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right).\end{aligned}$$

Ясно, что $\frac{2}{k} \to 0$. Более того,

$$\frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(6\frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)}p\right)^2}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(36\ln^2(np)\right)}{\ln(np)} = \frac{\ln 36 + 2\ln\ln(np)}{\ln(np)} \to 0.$$

В итоге

$$k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right) < -\frac{k\varepsilon'\ln(np)}{4} \to -\infty,$$

и снова все в порядке.

Теорема доказана.

Литература

1. *Erdős P.* On sets of distances of n points // Amer. Math. Monthly.— 1946.— V. 53.— P. 248—250.
2. *Хадвигер Г.*, *Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия плоскости.— М.: Наука, 1965.
3. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001.— Т. 56, вып. 1.— С. 107—146.
4. *Raigorodskii A. M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — V. 347. — P. 202—248.
5. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Mathematical Intelligencer. — 2004. — V. 26, N 3. — P. 4—12.
6. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники.— Сер. «Современная математика».— 2007.— Т. 23.— С. 147—164.
7. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука.— М.: МЦНМО, 2006.
8. *Bollobás B.* Random Graphs.— Cambridge Univ. Press, 2001.
9. *Колчин В. Ф.* Случайные графы.— М.: Физматлит, 2002.
10. *Janson S.*, *Łuczak T.*, *Ruciński A.* Random graphs.— New York: Wiley, 2000.
11. *Райгородский А. М.* Проблема Нелсона—Эрдеша—Хадвигера и реализация случайных графов в пространстве // УМН. — 2006.— Т. 61, вып. 4.— С. 195—196.
12. *Нагаева С. В.*, *Райгородский А. М.* О вложимости конечных графов расстояний с большим хроматическим числом в случайные графы // Итоги науки и техники.— Сер. «Современная математика».— 2009.— Т. 62.— С. 47—66.

13. *Нагаева С. В.*, *Райгородский А. М.* О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности // Доклады РАН. — 2009. — Т. 424, № 3. — С. 315—317.

Поступила в редакцию 07.07.2011