УДК 517.518.23

Б. В. Трушин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Вложение весовых пространств Соболева в весовые пространства Орлича и в пространство непрерывных функций на анизотропно нерегулярных областях

В работе рассматривается построенная ранее автором классификация областей с условием гибкого σ-конуса по параметру анизотропности λ. На этих классах областей изучается вложение весовых пространств Соболева (в «предельном» случае) в весовое пространство Орлича и в пространство непрерывных функций.

Ключевые слова: теорема вложения, пространство Соболева, пространство Орлича, нерегулярная область.

1. Введение

1.1. История вопроса

В 1938 г. С. Л. Соболев установил [1], что для областей с условием конуса при

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad 1 < p < q < \infty \tag{1}$$

пространство $W_p^s(G)$ вложено в пространство $L_q(G)$. Это утверждение носит *название теоремы вложения С. Л. Соболева.*

В 1980 г. Ю. Г. Решетняк перенес [2] результат С.Л. Соболева о вложении $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ на области с условием Джона, а в 1983 г. О. В. Бесов – на области с условием гибкого конуса (см, например, [3]) с теми же ограничениями на параметры суммируемости и гладкости.

В 2000 г. Килпелайнен и Малы для максимально возможного q установили [4] неравенство Соболева–Пуанкаре для областей с σ-условием Джона при $s = 1$. В 2001 г. О. В. Бесов установил [5] теорему вложения Соболева с максимально возможным показателем q при $s \in \mathbb{N}$ для областей с условием гибкого σ-конуса. В 2008 г. Б. В. Трушин установил [6] теорему вложения Соболева с максимально возможным показателем q при $s \in \mathbb{N}$ для областей с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса, а в 2010 г. распространил [7] этот результат на случай пространств со степенными весами. В 2011 г. О. В. Бесов обобщил [8] теорему вложения Соболева с максимально возможным показателем q при $s \in \mathbb{N}$ на области с обобщенным λ-анизотропный условием гибкого σ-конуса.

Более подробную историю вопроса можно найти в недавней монографии [9].

1.2. Известные результаты о вложении пространства Соболева в пространство Орлича

Хорошо известно, что в предельном случае (если в неравенстве (1) заменить q на ∞) пространство $W_p^s(G)$ не вложено в пространство $L_\infty(G)$. В 1965 г. С. И. Похожаев доказал [10] в случае ограниченной области G с границей, локально удовлетворяющей условию Липшица, вложение пространства $W_p^s(G)$ в пространство Орлича $L_\Phi(G)$, соответствующее функции $\Phi(t) = e^{|t|^{p'}} - 1$ при $s - \dfrac{n}{p} = 0$. Ранее, в 1961 г., В. И. Юдович получил [11] оценки интегралов типа потенциала, приводящие к этому вложению.

В 2003 г. Б. В. Трушин установил [12,13] вложение пространства $W_p^s(G)$ в пространство Орлича $L_\Phi(G)$ в передельном случае соответствующей теоремы вложения (в том числе и в случае весовых пространств).

Также следует отметить работы Трудингера [14], Эванса и Эдмундса [15] и Сианчи [16], в которых рассматривались некоторые вопросы, связанные с вложениями в пространства Орлича.

1.3. Известные результаты о вложении пространства Соболева в пространство непрерывных функций

Если в предельном случае неравенства (1) нестрогое неравенство заменить на строгое, то пространство Соболева вложено в пространство непрерывных функций. Для области с условием конуса это утверждение содержится в монографии [17], а для открытого множества с условием λ-рога – в книге [3].

1.4. Полученные результаты

В настоящей работе устанавливаются теоремы вложения пространства Соболева в пространство Орлича и пространство непрерывных функций для областей с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса. Результаты распространяются также на случаи вложений весовых пространств Соболева. Тем самым результаты работ [12, 13] переносятся на более общие области, введенные в работах [6, 7].

2. Основные определения и обозначения

Везде далее область $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q\,(x, d) = x + (-d, d)^n$,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (0, \infty)^n, \qquad |\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \lambda_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i.$$

При $|\lambda| = n$, $d > 0$ λ-кубом λ-диаметра d называют [6] открытый параллелепипед вида

$$Q_\lambda\,(x, d) = x + \left(-d^{\lambda_1}, d^{\lambda_1}\right) \times \left(-d^{\lambda_2}, d^{\lambda_2}\right) \times \ldots \times \left(-d^{\lambda_n}, d^{\lambda_n}\right),$$

λ-длиной вектора $x \in \mathbb{R}^n$ называют величину

$$|x|_\lambda = \max_i |x_i|^{\frac{1}{\lambda_i}} = \inf\left\{d : \; x \in Q_\lambda(0, d)\right\}.$$

При $x \in G$ через

$$\rho_\lambda(x) = \min\left\{1, \inf_{y \in \mathbb{R}^n \setminus G} |x - y|_\lambda\right\}$$

определяют λ-расстояние до границы области G.

Обозначим

$$G_\delta = \{x \in G : \; \mathrm{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \delta\} \neq \varnothing,$$

где $\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) = \inf\{|x - y| \; : \; y \in \mathbb{R}^n \setminus G\}$ – евклидово расстояние от точки $x \in G$ до границы области G, $\delta > 0$ достаточно мало.

Пусть χ и $\chi_\lambda(\cdot, d)$ – характеристические функции соответственно интервала $(0, 1)$ и λ-куба $Q_\lambda(0, d)$. Весовыми будем называть п.в. положительные локально суммируемые функции. Для измеримого множества E обозначим $|E| = \int\limits_{E \cap G} dx$ лебегову меру множества $E \cap G$.

Через p' обозначают показатель, сопряженный показателю p, то есть $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

2.1. Пространство Соболева

В работе изучается весовое пространство Соболева $W^s_{p,v;r}(G)$, определяемое [5] как совокупность функций с конечной нормой

$$\left\| f|W^s_{p,v;r}(G)\right\| = \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_r(G_\delta)\| \right)$$

при некотором $\delta > 0$.

2.2. Пространство Орлича

Вещественную функцию Φ называют N-функцией, если она непрерывна на всей оси, выпукла, четна и удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty.$$

Весовое пространство Орлича $L_{\Phi,w}(G)$ с N-функцией Φ определяют [12] как совокупность функций с конечной нормой

$$||f|L_{\Phi,w}(G)|| = \inf_{\eta>0} \frac{1}{\eta} \left(1 + \int_G \Phi(\eta|wf|)\, dx \right).$$

Определение 1. Будем говорить, что N-функция Φ принадлежит *классу N_ϱ с показателем $\varrho > 0$*, если для некоторого натурального $k_0 > \varrho^{-1}$ найдется последовательность $\{a_k\}_{k=k_0}^\infty$ такая, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} k \sqrt[k]{a_k} < \infty,$$

и справедлива оценка

$$\Phi(t) \leqslant \sum_{k=k_0}^\infty a_k |t|^{k\varrho}.$$

В качестве примера N-функции Φ, принадлежащей классу N_ϱ, в вопросах, связанных с вложениями в пространства Орлича, обычно рассматривают [10, 12, 13] функцию вида

$$\Phi(t) = e^{|t|^\varrho} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} |t|^{k\varrho}, \qquad k_0 \in \mathbb{N}, \qquad k_0 > \varrho^{-1}.$$

Но в настоящей работе мы не будем ограничиваться лишь этим случаем.

2.3. Области с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса

Определение 2 ([6]). Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$,

$$\sigma \geqslant 1, \quad 0 < t^* < 1, \quad \varkappa > 0, \quad \lambda = (0,\infty)^n, \quad |\lambda| = n, \quad \lambda_0 \geqslant \sigma^{-1}.$$

Пусть для каждой точки $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma:\ [0,t^*] \to G, \quad \gamma(0) = x, \quad Q_\lambda(\gamma(t), \varkappa t^\sigma) \subset G,$$
$$\left| \frac{\partial \gamma_i(t)}{\partial t} \right| \leqslant \varkappa^{-1} \rho_\lambda(\gamma(t))^{\lambda_i - \lambda_0} \ \text{ для п. в. } \ t \in [0,t^*].$$

Тогда будем говорить, что область G является *областью с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса.*

3. Основные результаты

3.1. Вложение пространства Соболева в пространство Орлича

Теорема 1. *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, $a \geqslant \lambda_0 - n$, $b \geqslant 0$, и выполнены условия*

$$1 \leqslant p, r < \infty, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_0 s - \frac{n}{p} \geqslant 0, \qquad s + \frac{b}{\lambda_0} - \frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \geqslant 0.$$

Тогда для любой N-функции Φ, принадлежащей классу $N_{p'}$, $k_0 > \frac{p}{p'}$, $k_0 \geqslant \frac{r}{p'}$, имеет место вложение $W^s_{p,v;r}(G) \subset L_{\Phi,w}(G)$ и справедлива оценка

$$\|f|L_{\Phi,w}(G)\| \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_r(G_\delta)\| \right),$$

при $w = \rho_\lambda^b$, $v = \rho_\lambda^a$ и некоторых C, $\delta > 0$, не зависящих от f.

3.2. Вложение пространства Соболева в пространство непрерывных функций

Теорема 2. *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, $a \geqslant \lambda_0 - n$, $b \geqslant 0$, выполнены условия*

$$1 \leqslant p, r < \infty, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_0 s - \frac{n}{p} > 0, \qquad s + \frac{b}{\lambda_0} - \frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \geqslant 0,$$

и имеет место хотя бы одно из неравенств

$$b > 0 \qquad \text{или} \qquad s - \frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \neq 0.$$

Тогда каждая функция $f \in W^s_{p,v;r}(G)$ эквивалентна непрерывной на G функции $\tilde{f}$ и справедлива оценка

$$\|w\tilde{f}|C(G)\| \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_r(G_\delta)\| \right),$$

при $w = \rho_\lambda^b$, $v = \rho_\lambda^a$ и некоторых C, $\delta > 0$, не зависящих от f.

4. Некоторые вспомогательные результаты

4.1. Регуляризация λ-расстояния

Лемма 4.1. [6] *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество, $\lambda \in (0,\infty)^n$, $|\lambda| = n$. Тогда существует такая регуляризация λ-расстояния $\tilde{\rho}_\lambda \in C_0^\infty(G)$, что для всех $x \in G$*

$$c_1\rho_\lambda(x) \leqslant \tilde{\rho}_\lambda(x) \leqslant c_2\rho_\lambda(x), \qquad \left| \frac{\partial \tilde{\rho}_\lambda(x)}{\partial x_i} \right| \leqslant c_3 \rho_\lambda(x)^{1-\lambda_i},$$

где константы c_1, c_2, c_3 зависят лишь от размерности пространства n и параметра λ_0.

4.2. Слабые оценки интегральных операторов

Рассмотрим оператор

$$Kf(x) = \int\limits_G \mathsf{k}(x,y) f(y)\,dy, \qquad x \in G,$$

где измеримое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, $\mathsf{k}: \; G \times G \to \mathbb{R}$ – ядро оператора – измеримая неотрицательная функция.

Введем при $1 \leqslant p < q < \infty$, $x \in G$, $E \subset G$, $y \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$

$$\begin{aligned}&\mathsf{k}(x,y,d) = (1 - \chi_\lambda(x-y,d))\,\mathsf{k}(x,y),\\ &|||\mathsf{k}|||_G = |||\mathsf{k}|||_{p,v;q;G} = \sup_{x\in G}\sup_{d>0} \left\| \mathsf{k}(x,\cdot,d) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} | L_{p'}(G) \right\| \left| Q_\lambda(x,d) \right|^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

где v – некоторая весовая функция.

Лемма 4.2. [7]. *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < q < \infty$, v – весовая функция. Тогда для интегрального оператора K с ядром k существует постоянная $C > 0$, зависящая лишь от размерности n, такая, что справедлива оценка слабого типа*

$$\sup_{\eta>0} \eta \left| \{x \in G : \; |Kf(x)| > \eta\} \right|^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{p}{q}} |||\mathsf{k}|||_G \, \|f | L_{p,v}(G)\|.$$

4.3. Сильные оценки интегральных операторов

Лемма 4.3. *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$, v – весовая функция, а для интегрального оператора K с ядром k при всех $q > p$ справедлива оценка*

$$|||\mathsf{k}|||_G = |||\mathsf{k}|||_{p,v;q;G} \leqslant Cq^\beta$$

для некоторых $C > 0$ и $\beta \geqslant 0$, не зависящих от q.

Тогда имеет место оценка сильного типа

$$\|Kf | L_q(G)\| \leqslant C_1 \max\left\{1, \frac{1}{(q-p)^{\frac{q+1}{q}}}\right\} q^\beta \|f | L_{p,v}(G)\|,$$

где C_1 не зависит от q.

В работе [13] доказан изотропный аналог данного утверждения. Его доказательство базируется на изотропном аналоге леммы 4.2 (см. [18–20]), и поэтому дословно переносится на анизотропный случай леммы 4.3.

4.4. Интегральные оценки функций через производные

Лемма 4.4. [7]. *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\varepsilon \in (0,1), \qquad \mathsf{R} > 0, \qquad \mathsf{C} \geqslant 1, \qquad \lambda \in (0,\infty)^n, \quad |\lambda| = n,$$

$\gamma: \; [0,t_x] \to G$ – кусочно гладкий путь, $r: \; [0,t_x] \to (0,\infty)$ – непрерывная кусочно гладкая функция со свойствами

$$0 < r(t) \leqslant \varepsilon \rho_\lambda(\gamma(t)), \qquad \left| \left(r(t)^{\lambda_0} \right)' \right| \leqslant \mathsf{C} \;\; \text{для п. в.} \;\; t \in [0,t_x], \quad r(t_x) \geqslant \varepsilon^2,$$

и

$$\gamma(0) = x, \quad \rho_\lambda(\gamma(t_x)) \geqslant \varepsilon, \quad t_x \leqslant \mathsf{R}, \quad \left|\gamma'(t)\right| \leqslant \mathsf{C} \;\; \text{для п. в.} \;\; t \in [0,t_x].$$

Тогда для почти всех $x \in G$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant CA_1\left(\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha f|\right)(x) + CA_2\left(\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha f|\right)(x) + CA_3 f(x),$$

где C не зависит от f, x, и

$$A_1 g(x) = \int_0^{r(0)^{\lambda_0}} t^{s-1-\frac{n}{\lambda_0}} \int_{Q_\lambda\left(x, t^{\frac{1}{\lambda_0}}\right)} g(y)\,dy\,dt,$$

$$A_2 g(x) = \int_0^{t_x} \left(t + r(0)^{\lambda_0}\right)^{s-1} r(t)^{-n} \int_{Q_\lambda(\gamma(t), r(t))} g(y)\,dy\,dt,$$

$$A_3 f(x) = \int_{Q_\lambda(\gamma(t_x), r(t_x))} |f(y)|\,dy.$$

Запишем операторы A_i в виде

$$A_i g(x) = \int_G k_i(x,y) g(y)\,dy, \qquad i = 1,2,3.$$

Лемма 4.5. [7] *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, весовая функция $v(x) = \rho_\lambda(x)^a$, и выполнены условия*

$$1 \leqslant p, r < \infty, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_0 s - \frac{n}{p} \geqslant 0.$$

Тогда имеют место оценки

$$\|k_1(x,\cdot,d) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} | L_{p'}(G)\| \leqslant C_1 \chi\left(\frac{d}{r(0)}\right) \rho_\lambda(x)^{-\frac{a}{p}} n_1(x,d),$$

где

$$n_1(x,d) = \begin{cases} \left(\ln \dfrac{r(0)}{d}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} = 0, \\ r(0)^{\lambda_0 s - \frac{n}{p}} & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} > 0, \end{cases}$$

$$\|k_2(x,\cdot,d) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} | L_{p'}(G)\| \leqslant C_2 \left(\int_0^{t_x} \chi\left(\frac{d}{C_3 \max\{r(0), t^{\frac{1}{\lambda_0}}\}}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(t + r(0)^{\lambda_0}\right)^{(s-1)p'} r(t)^{(\lambda_0 - n)\frac{p}{p}'} \rho_\lambda(\gamma(t))^{-\frac{ap'}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\|k_3(x,\cdot,d) | L_{r'}(G)\| \leqslant C_4 \left(\int_{G_\delta} \left((1 - \chi_\lambda(x-y,d))\,\chi\left(\frac{|x-y|_\lambda}{C_5}\right)\right)^{r'} dy\right)^{\frac{1}{r'}}$$

при некоторых $C_i > 0$, не зависящих от x и d.

5. Оценки норм операторов A_i из леммы 4.4

5.1. Оценка нормы оператора A_1

Лемма 5.1. *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, $a \geqslant \lambda_0 - n$, $b \geqslant 0$, и выполнены условия*

$$1 \leqslant p < \infty, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_0 s - \frac{n}{p} \geqslant 0, \qquad \lambda_0 s + b - \frac{n+a}{p} \geqslant 0.$$

Тогда для всех конечных $q > p$ справедлива оценка

$$|||wk_1|||_G = |||wk_1|||_{p,v;q;G} \leqslant Cq^{\beta},$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{p'} & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} = 0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} > 0 \end{cases}$$

при $w = \rho_\lambda^b$, $v = \rho_\lambda^a$ и некотором C, не зависящем от функции g и показателя q.

Доказательство. Из леммы 4.5 имеем

$$|||wk_1|||_G \leqslant C_1 \sup_{x\in G}\sup_{d>0} \chi\left(\frac{d}{r(0)}\right)\rho_\lambda(x)^{-\frac{a}{p}} n_1(x,d)\rho_\lambda(x)^b d^{\frac{n}{q}} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \sup_{x\in G}\sup_{0<d\leqslant r(0)} d^{\frac{n}{q}} n_1(x,d)\rho_\lambda(x)^{b-\frac{a}{p}},$$

где

$$n_1(x,d) = \begin{cases} \left(\ln\dfrac{r(0)}{d}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} = 0, \\ r(0)^{\lambda_0 s - \frac{n}{p}} & \text{при} \quad \lambda_0 s - \dfrac{n}{p} > 0. \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что

$$\left(\ln\frac{r(0)}{d}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(\frac{q}{np'}\left(\frac{r(0)}{d}\right)^{\frac{np'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} = C_3 q^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{r(0)}{d}\right)^{\frac{n}{q}}.$$

Поэтому при $\lambda_0 s - \dfrac{n}{p} = 0$ имеем

$$|||wk_1|||_G \leqslant C_4 q^{\frac{1}{p'}} \sup_{x\in G}\sup_{0<d\leqslant r(0)} \rho_\lambda(x)^{b-\frac{a}{p}} \leqslant C_4 q^{\frac{1}{p'}}.$$

Если же $\lambda_0 s - \dfrac{n}{p} > 0$, то

$$|||wk_1|||_G \leqslant C_5 \sup_{x\in G}\sup_{0<d\leqslant r(0)} \rho_\lambda(x)^{\lambda_0 s + b - \frac{n+a}{p}} \leqslant C_5.$$

5.2. Оценка нормы оператора A_2

Лемма 5.2. *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, $a \geqslant \lambda_0 - n$, $b \geqslant 0$, и выполнены условия*

$$1 \leqslant p < \infty, \qquad s \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_0 s - \frac{n}{p} \geqslant 0, \qquad s + \frac{b}{\lambda_0} - \frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \geqslant 0.$$

Тогда для всех конечных $q > p$ справедлива оценка

$$\|\|wk_2\|\|_G = \|\|wk_2\|\|_{p,v;q;G} \leqslant Cq^{\beta},$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{p'} & \text{при} \quad b = 0, \qquad s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} = 0, \\ 0 & \text{при} \quad b > 0 \text{ или } s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \neq 0 \end{cases}$$

при $w = \rho_\lambda^b$, $v = \rho_\lambda^a$ и некотором C, не зависящем от функции g и показателя q.

Доказательство. В работе [7] показано, что для области с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса можно так «исправить» кусочно гладкий путь γ в определении 2, что условия теоремы 4.4 будут верны с функцией r пропорциональной регуляризованному λ-расстоянию $\tilde\rho_\lambda$. Поэтому, в силу леммы 4.1, справедливы оценки

$$r(t) = c\tilde\rho_\lambda(\gamma(t)) \geqslant cc_1\rho_\lambda(\gamma(t)) \geqslant cc_1\varkappa t^\sigma = c_0t^\sigma, \qquad \rho_\lambda(\gamma(t)) \geqslant \frac{r(t)}{cc_2}.$$

Из леммы 4.5 имеем

$$\|\|k_2\|\|_G \leqslant C_1 \sup_{x\in G}\sup_{d>0}\Big(\rho_\lambda(x)^{\lambda_0} + d^{\lambda_0}\Big)^{\frac{b}{\lambda_0}} d^{\frac{n}{q}} \left(\int\limits_0^{t_x} \chi\left(\frac{d}{C_2\max\{r(0), t^{\frac{1}{\lambda_0}}\}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\Big(t + r\,(0)^{\lambda_0}\Big)^{(s-1)p'} r\,(t)^{(\lambda_0-n)\frac{p}{p}'}\rho_\lambda(\gamma(t))^{-\frac{ap'}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Тогда при $a \geqslant \lambda_0 - n$, $b \geqslant 0$ получаем $k_{2G} \leqslant C_3 \sup\limits_{x\in G}\sup\limits_{d>0}(I_1(x,d) + I_2(x,d))$, где

$$I_1(x,d) = r(0)^{b+\frac{n}{q}}\left(\int\limits_0^{\tau_x}\chi\left(\frac{d}{C_4r(0)}\right)r(0)^{\left((s-1)\lambda_0+\frac{\lambda_0-n-a}{p}\right)p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$I_2(x,d) = \Big(\rho_\lambda(x)^{\lambda_0} + d^{\lambda_0}\Big)^{\frac{b}{\lambda_0}+\frac{n}{\lambda_0q}}\left(\int\limits_{\tau_x}^{t_x}\chi\left(\frac{d}{C_5t^{\frac{1}{\lambda_0}}}\right)t^{\left(s-1+\frac{(\lambda_0-n-a)\sigma}{p}\right)p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\tau_x = \min\left\{t_x, \frac{r(0)^{\lambda_0}}{2\mathsf{C}}\right\}.$$

Но

$$I_1(x,d) \leqslant C_6r(0)^{b+\frac{n}{q}+(s-1)\lambda_0+\frac{\lambda_0-n-a}{p}+\frac{\lambda_0}{p'}} = C_6r(0)^{\lambda_0s+b-\frac{n+a}{p}} \leqslant C_6 < C_6$$

при $\lambda_0s + b - \dfrac{n+a}{p} \geqslant 0$.

Заметим, что $(n+a-\lambda_0)(\sigma\lambda_0 - 1) \geqslant 0$ или $\sigma(n+a-\lambda_0)+1 \geqslant \dfrac{n+a}{\lambda_0}$, откуда

$$\lambda_0s + b - \frac{n+a}{p} = \lambda_0\left(s + \frac{b}{\lambda_0} - \frac{n+a}{\lambda_0p}\right) \geqslant \lambda_0\left(s\frac{b}{\lambda_0} - \frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p}\right) \geqslant 0. \qquad (2)$$

$I_2(x,d) = 0$ при $r(0)^{\lambda_0} \geqslant 2\mathsf{C}t_x$, а при $\tau_x = \dfrac{r(0)^{\lambda_0}}{2\mathsf{C}} < t_x$ имеем следующее.

Если $s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} > 0$, то

$$I_2(x,d) \leqslant C_7t_x^{s+\frac{b}{\lambda_0}-\frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p}+\frac{n}{\lambda_0q}} \leqslant C_7\mathsf{R}^{s+\frac{b}{\lambda_0}-\frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p}} < C_7.$$

Если $s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} < 0$, то

$$I_2(x,d) \leqslant C_8 \chi\left(\frac{d_x}{C_5 t_x^{\frac{1}{\lambda_0}}}\right) d_x^{\lambda_0\left(s-\frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p}\right)+b+\frac{n}{q}} \leqslant C_8 C_5^{\lambda_0} \mathsf{R}^{s+\frac{b}{\lambda_0}-\frac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p}} < C_9.$$

при $s + \dfrac{b}{\lambda_0} - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} \geqslant 0$.

Если $s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} = 0$ и $b = 0$, то

$$I_2(x,d) \leqslant C_{10} d_x^{\frac{n}{q}} \left(\ln \frac{C_5^{\lambda_0} t_x}{d_x^{\lambda_0}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C_{10} d_x^{\frac{n}{q}} \left(\frac{\lambda_0 q}{np'}\left(\frac{C_5^{\lambda_0} t_x}{d_x^{\lambda_0}}\right)^{\frac{np'}{\lambda_0 q}}\right)^{\frac{1}{p'}} = C_{11} q^{\frac{1}{p'}},$$

где $d_x = \max\left\{d, C_5 \tau_x^{\frac{1}{\lambda_0}}\right\}$.

Если $s - \dfrac{\sigma(n+a-\lambda_0)+1}{p} = 0$ и $b > 0$, то

$$I_2(x,d) \leqslant C_{10} d_x^{b} \left(\ln \frac{C_5^{\lambda_0} t_x}{d_x^{\lambda_0}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C_{10} d_x^{b} \left(\frac{1}{bp'}\left(\frac{C_5^{\lambda_0} t_x}{d_x^{\lambda_0}}\right)^{bp'}\right)^{\frac{1}{p'}} = C_{12}.$$

5.3. Оценка нормы оператора A_3

Лемма 5.3. *Пусть G – область с условием λ-анизотропного гибкого σ-конуса, $b \geqslant 0$, $1 \leqslant r < \infty$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда для всех конечных $q \geqslant r$ справедлива оценка*

$$|||wk_3|||_G = |||wk_3|||_{r,u;q;G} \leqslant C,$$

при $w = \rho_\lambda^b$, $u = 1$ и некотором C, не зависящем от функции g и показателя q.

Доказательство. Из леммы 4.5 имеем

$$|||wk_3|||_G \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sup_{x\in G}\sup_{d>0} \left(\int\limits_{G_\delta} \left((1-\chi_\lambda(x-y,d))\,\chi\left(\frac{|x-y|_\lambda}{C_2}\right)\right)^{r'} dy\right)^{\frac{1}{r'}} \rho_\lambda(x)^b d^n \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sup_{x\in G}\sup_{d>0} \chi\left(\frac{d}{C_2}\right)\left(d^{nr'}\right)^{\frac{1}{r'}} \rho_\lambda(x)^b d^n = C_1 \sup_{d>0} \chi\left(\frac{d}{C_2}\right) d^{n+b} = C_1 C_2^{n+d}.$$

6. Доказательство основных результатов

6.1. Доказательство теоремы 1

Из леммы 4.4 следует, что для почти всех $x \in G$ справедлива оценка

$$|w(x)f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 w(x) A_1\left(\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha f|\right)(x) + C_1 w(x) A_2\left(\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha f|\right)(x) + C_1 w(x) A_3 f(x).$$

Поэтому из леммы 4.3 для всех $k \geqslant k_0$, в силу лемм 5.1, 5.2 и 5.3, получаем

$$\|wf|L_{kp'}(G)\| \leqslant C_2(kp')^{\frac{1}{p'}}\|f|W_{p,v;r}(G)\|.$$

Условие

$$\lambda_0 s + b - \frac{n+a}{p} \geqslant 0$$

леммы 5.1 выполнено в силу справедливости оценки (2).

Оценим теперь при фиксированном $\eta > 0$ интеграл $\int_G \Phi(\eta|wf|)\,dx$ для некоторой N-функции Φ, принадлежащей классу $N_{p'}$:

$$\int_G \Phi(\eta|wf|)\,dx \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \int_G |\eta w f|^{kp'} dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \eta^{kp'} \left(C_2(kp')^{\frac{1}{p'}}\|f|W_{p,v;r}(G)\|\right)^{kp'}.$$

Обозначим для удобства $F = C_2 {p'}^{\frac{1}{p'}}\|f|W_{p,v;r}(G)\|$, тогда

$$\int_G \Phi(\eta|wf|)\,dx \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k k^k (\eta F)^{kp'}.$$

Получили степенной ряд по $(\eta F)^{p'}$. Его радиус сходимости

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, k\sqrt[k]{a_k}} > 0.$$

Выберем произвольно $R_1 < R$ и возьмем $\eta = \eta_F = \dfrac{R^{\frac{1}{p'}}}{F}$. Тогда

$$\int_G \Phi(\eta_F|wf|)\,dx \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k k^k R_1^k = C_3.$$

Поэтому

$$\|f|L_{\Phi,w}(G)\| = \inf_{\eta>0}\frac{1}{\eta}\left(1 + \int_G \Phi(\eta|wf|)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{\eta_F}\left(1 + \int_G \Phi(\eta_F|wf|)\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_3 F}{R^{\frac{1}{p'}}} = C_4 F = C_5\|f|W_{p,v;r}(G)\|.$$

Тем самым доказано утверждение теоремы 1.

6.2. Доказательство теоремы 2

Пусть $x \in G$, $\varepsilon = \operatorname{dist}(x, \partial G)$. Тогда $f \in W_p^s\left(B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. По классической теореме вложения Соболева (см., например, [17]) функция f в шаре $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ эквивалентна непрерывной функции. Значит, она эквивалентна непрерывной функции и на всей области G.

Для всех $q > p + 1$ из лемм 5.1, 5.2 и 5.3 имеем

$$\|wf|L_q(G)\| \leqslant C_1\|f|W_{p,v;r}(G)\|.$$

Теперь утверждение теоремы 2 следует из очевидного соотношения

$$\|g|L_\infty(G)\| \leqslant \varlimsup_{q\to\infty} \|g|L_q(G)\|.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-0074), гранта Президента РФ «Ведущие научные школы» (проект НШ-65772.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (контракты 16.740.11.0128, 16.740.11.0568).

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. – 1938. – Т. 4, № 3. – С. 471–497.

2. *Решетняк Ю.Г.* Интегральные представления функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журнал. – 1980. – Т. 21, № 6. – С. 108–116.

3. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996.

4. *Kilpeläinen T., Malý J.* Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwendungen. – 2000. – V. 19, N 2. – P. 369–380.

5. *Бесов О.В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192, № 3. – С. 3–26.

6. *Трушин Б.В.* Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей // Тр. МИАН. – 2008. – Т. 260. – С. 297–319.

7. *Трушин Б.В.* Непрерывность вложений весовых пространств Соболева в пространства Лебега на анизотропно нерегулярных областях // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 271–289.

8. *Бесов О.В.* Теорема вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 18–27.

9. *Трушин Б.В.* Пространства Соболева на нерегулярных областях. Непрерывность и компактность вложения. – Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publishing, 2010.

10. *Похожаев С.И.* О теореме вложения С.Л. Соболева в случае $pl = n$ // Докл. научно-технической конференции Московского энергетического ин-та. – 1965. – С. 158–170.

11. *Юдович В.И.* О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 4. – С. 805–808.

12. *Трушин Б.В.* Вложение пространства Соболева в пространства Орлича и BMO со степенными весами // Труды МИАН. – 2003. – Т. 243. – С. 334–345.

13. *Трушин Б.В.* Вложение пространства Соболева в пространства Орлича для области с нерегулярной границей // Мат. заметки. – 2006. – Т. 79, № 5. – С. 767–778.

14. *Trudinger N.S.* On imbeddings into Orlicz spaces and some applications // J. Math. Mech. – 1967. – V. 17, N 5. – P. 473–483.

15. *Edmunds D.E., Evans W.D.* Orlicz and Sobolev spaces on unbounded domains // Proc. roy. soc. London. Ser. A. – 1975. – V. 342. – P. 373–400.

16. *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces / /Indiana Univ. Math. J. – 1996. – V. 45. – P. 39–65.

17. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1950; 2-е изд. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962; 3-е изд. — М.: Наука, 1988.

18. *Кокилашвили В.М., Габидзашвили М.А.* О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 282, № 6. – С. 1304–1306.

19. *Габидзашвили М.А.* Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Тр. Тбилисского матем. института. – 1986. – Т. 82. – С. 25–36.

20. *Бесов О.В.* Вложение пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 214. – С. 25–58.

Поступила в редакцию 11.01.2012.