Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи про исчисление высказываний

1. Не опираясь на теорему о полноте, докажите выводимость следующих формул:

a) $\neg\neg A \leftrightarrow A$;
b) $\neg(A \wedge \neg A)$;
c) $((A \to B) \to A) \to A$;
d) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$;
e) $(A \vee B) \to (B \vee A)$;
f) $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$;
g) $((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$;
h) $((A \wedge B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;
i) $((A \vee B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
j) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;
k) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$;
l) $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$;
m) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$;
n) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$;
o) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$;
p) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$;
q) $(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$;
r) $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$;
s) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$;
t) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$;
u) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$.

2. Докажите, что:

a) из $A \vee B$ и $\neg A \vee C$ выводится $B \vee C$;

b) из $A \vee B$, $A \to C$ и $B \to D$ выводится $C \vee D$.

3. Докажите, что аксиома 10 выводится из остальных.

4. Докажите, что закон исключённого третьего выводится из аксиом 1–10 и закона снятия двойного отрицания.

5. Рассмотрим исчисление высказываний со схемами аксиом $A \to (B \to A)$, $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ и $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ и правилом вывода modus ponens. Заменим во всех формулах $A \wedge B$ на $\neg(A \to \neg B)$, а $A \vee B$ на $\neg A \to B$. Докажите, что после такой замены аксиомы 1–11 обычного исчисления высказываний выводимы в описанном.