УДК 517.982.252

Г.Е. Иванов, Г.М. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Взаимосвязь опорных условий слабой выпуклости для множеств в банаховых пространствах*

Рассматриваются два класса слабо выпуклых множеств в банаховом пространстве. Классы характеризуются N-опорным и P-опорным условиями соответственно. Доказано, что рассматриваемые два класса совпадают при условии, что банахово пространство равномерно выпукло. Доказательство основано на теореме о гладкой эквивалентной переномировке равномерно выпуклого банахова пространства.

Ключевые слова: опорное условие, слабая выпуклость.

Анализ слабо выпуклых множеств и функций позволяет применять методы выпуклого анализа к невыпуклым объектам, что весьма актуально в невыпуклых задачах оптимизации и аппроксимации. Определение слабо выпуклого множества можно дать различными неэквивалентными способами. В результате возникают соответствующие классы слабо выпуклых множеств, обладающих похожими, но отличающимися свойствами. В работах [1, 2] рассматривались некоторые классы слабо выпуклых множеств, в частности, класс множеств, удовлетворяющих опорному условию слабой выпуклости. Указанное условие в настоящей работе называется P-опорным условием слабой выпуклости, что объясняется тем, что мы будем также рассматривать и другое, N-опорное условие слабой выпуклости. P-опорное условие определяется через проекцию, а N-опорное условие — через нормальный конус. Оба эти условия естественным образом возникают при рассмотрении слабо выпуклых множеств. Предмет настоящей работы состоит в изучении взаимосвязи этих двух опорных условий для множеств в банаховых пространствах.

I. Основные определения

Пусть E — нормированное пространство. Через $\operatorname{int} A$ и ∂A будем обозначать соответственно внутренность и границу множества $A \subset E$. Через $\langle p, x\rangle$ обозначим значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$. Для вектора $a \in E$ и функционала $p_0 \in E^*$ через $\mathfrak{B}_R(a)$ и $\mathfrak{B}^*_R(p_0)$ обозначим шары с радиусом R в пространствах E, E^* соответственно:

$$\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leqslant R\},$$
$$\mathfrak{B}^*_R(p_0) = \{p \in E^* : \|p - p_0\| \leqslant R\}.$$

Определение 1.1. *Модулем выпуклости* нормированного пространства E называется функция $\delta_E : (0, 2] \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\delta_E(\varepsilon) = \\ = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} :\ x, y \in \mathfrak{B}_1(0),\ \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Нормированное пространство E называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon \in (0, 2]$.

Определение 1.2. Множество $X \subset E$ называется *равномерно выпуклым*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathfrak{B}_\delta\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \subset X.$$

Заметим, что пространство E равномерно выпукло тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{B}_1(0)$ равномерно выпукло.

Определение 1.3. *Модулем гладкости* нормированного пространства E называется функция $\varrho_E : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\varrho_E(\tau) = \\ = \sup\left\{\frac{\|x + y\|}{2} + \frac{\|x - y\|}{2} - 1 :\ \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}.$$

Нормированное пространство E называется *равномерно гладким*, если

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\varrho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Заметим, что функция ϱ_E — выпуклая, возрастающая и $\varrho_E(0) = 0$ для любого банахова пространства E, а значит, и функция $\tau \mapsto \frac{\varrho_E(\tau)}{\tau}$ — возрастающая (см. [3], § 4, гл. 3).

Определение 1.4. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой по Фреше в точке* $x_0 \in E$, если существует функционал $p \in E^*$, называемый *производной Фреше* функции f в точке x_0, удовлетворяющий условию

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in B_\delta(x_0) \\ |f(x) - f(x_0) - \langle p, x - x_0\rangle| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы».

Определение 1.5. Будем говорить, что норма пространства E *дифференцируема по Фреше*, если она дифференцируема по Фреше в каждой точке $x_0 \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$.

Определение 1.6. Будем говорить, что функционал $p \in E^*$ является *двойственным* вектору $x \in E$, а вектор x будем называть двойственным функционалу p, если $\langle p, x\rangle = \|p\| \cdot \|x\|$. Множество всех функционалов, двойственных вектору x, будем обозначать через $J(x)$. Обозначим $J_1(x) = J(x) \cap \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$.

В силу теоремы Хана–Банаха [4, теорема 3.2] $J_1(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in E$. Заметим, что для рефлексивного банахова пространства для любого функционала $p \in E^*$ существует двойственный ему ненулевой вектор из E. Известно, что если норма пространства E дифференцируема по Фреше в точке $x_0 \in E$, то производная Фреше в точке x_0 нормы является единственным элементом множества $J_1(x_0)$.

Всякое равномерно гладкое пространство является пространством с дифференцируемой по Фреше нормой. Любое равномерно выпуклое или равномерно гладкое банахово пространство рефлексивно (см. [3], § 2, § 4 главы 2).

Определение 1.7. *Расстоянием* от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|a - x\|.$$

Обозначим

$$U(R, A) = \{x \in E : 0 < \varrho(x, A) < R\}.$$

Определение 1.8. *Метрической проекцией* точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется любой элемент множества

$$P_A(x) = \{a \in A : \ \|a - x\| = \varrho(x, A)\}.$$

Определение 1.9. Будем говорить, что множество $A \subset E$ удовлетворяет *P-опорному условию слабой выпуклости* с константой $R > 0$, если из того, что $x \in U(R, A)$ и $a \in P_A(x)$, следует, что

$$A \cap \operatorname{int} \mathfrak{B}_R \left(a + \frac{R}{\|x - a\|}(x - a)\right) = \varnothing. \qquad (1.1)$$

Через $\Omega_P(R)$ будем обозначать класс всех замкнутых множеств $A \subset E$, удовлетворяющих P-опорному условию слабой выпуклости с константой R.

Определение 1.10. *Нормальным конусом* к множеству $A \subset E$ в точке $a_0 \in A$ называется множество

$$N(a_0, A) = \Big\{p \in E^* : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ \forall a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta(a_0) \quad \langle p, a - a_0\rangle \leqslant \varepsilon\|a - a_0\|\Big\}.$$

Определение 1.11. Будем говорить, что множество $A \subset E$ удовлетворяет *N-опорному условию слабой выпуклости* с константой $R > 0$, если из того, что $p \in N(a, A) \cap \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$, u — единичный вектор, двойственный функционалу p, следует, что

$$A \cap \operatorname{int} \mathfrak{B}_R (a + Ru) = \varnothing. \qquad (1.2)$$

Через $\Omega_N(R)$ будем обозначать класс всех замкнутых множеств $A \subset E$, удовлетворяющих N-опорному условию слабой выпуклости с константой R.

Заметим, что соотношение (1.1) эквивалентно неравенству $\varrho\left(a + \frac{R}{\|x - a\|}(x - a), A\right) \geqslant R$, а соотношение (1.2) — неравенству $\varrho(a + Ru, A) \geqslant R$.

II. Взаимосвязь двух опорных условий слабой выпуклости

В работе [2] исследована взаимосвязь условия слабой выпуклости, условия проксимальной гладкости и P-опорного условия слабой выпуклости множеств в банаховых пространств. В этом параграфе рассматривается взаимосвязь N-опорного условия слабой выпуклости и P-опорного условия слабой выпуклости.

Лемма 2.1. Пусть E — нормированное пространство, $A \subset E$, $x_1 \in E \setminus A$, $x_0 \in P_A(x_1)$, норма пространства E дифференцируема по Фреше в точке $x_1 - x_0$. Тогда $J(x_1 - x_0) \subset N(x_0, A)$. □

Доказательство. Зафиксируем произвольный функционал $p \in J(x_1 - x_0)$. Требуется доказать, что $p \in N(x_0, A)$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку норма дифференцируема по Фреше в точке $x_1 - x_0$ и $p \in J_1(x_1 - x_0)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\|x_1 - x\| - \|x_1 - x_0\| - \langle p, x_0 - x\rangle \leqslant \varepsilon\|x_0 - x\| \\ \forall\, x \in \mathfrak{B}_\delta(x_0).$$

Так как $x_0 \in P_A(x_1)$, то $\|x_1 - x\| - \|x_1 - x_0\| \geqslant 0$ для любого $x \in A$. Следовательно,

$$\langle p, x - x_0\rangle \leqslant \varepsilon\|x_0 - x\| \qquad \forall\, x \in \mathfrak{B}_\delta(x_0) \cap A.$$

Поэтому $p \in N(x_0, A)$. ■

Заметим, что если норма пространства E не дифференцируема по Фреше, то для точек $x_1 \in E \setminus A$, $x_0 \in P_A(x_1)$ включение $J(x_1 - x_0) \subset N(x_0, A)$ может не выполняться. Например, рассмотрим двумерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^2$, норма в котором определена так, что

$$\mathfrak{B}_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (|x| + 4)^2 + y^2 \leqslant 5^2\}.$$

Заметим, что пространство $\mathbb{R}^2$ с этой нормой равномерно выпукло, но норма не дифференцируема по Фреше. Пусть $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\operatorname{int} \mathfrak{B}_1(0))$, $x_1 = (0, 2)$, $x_0 = (0, 3)$. Тогда $x_0 \in P_A(x_1)$, $N(x_0, A) = \{0\}$, $J(x_1 - x_0) \neq \{0\}$. Поэтому включение $J(x_1 - x_0) \subset N(x_0, A)$ не выполнено.

Теорема 2.1. Пусть E — банахово пространство с дифференцируемой по Фреше нормой, $R > 0$. Тогда $\Omega_N(R) \subset \Omega_P(R)$. □

Доказательство. Пусть $A \in \Omega_P(R)$. Пусть $x_1 \in U(R, A)$, $x_0 \in P_A(x_1)$. Требуется доказать равенство

$$A \cap \operatorname{int} \mathfrak{B}_R \left(x_0 + \frac{R}{\|x_1 - x_0\|}(x_1 - x_0) \right) = \varnothing. \quad (2.3)$$

Зафиксируем произвольный вектор $p \in J_1(x_1 - x_0)$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем $p \in N(x_0, A)$. Поскольку $\frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$ — единичный вектор, двойственный к p, а множество A удовлетворяет N-опорному условию слабой выпуклости с константой R, то справедливо равенство (2.3). ■

Лемма 2.2. Пусть E — нормированное пространство с модулем выпуклости δ_E, $p \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}_1(0)$. Тогда

$$2\delta_E(\|x_1 - x_2\|) \leqslant 2 - \langle p, x_1 + x_2 \rangle. \qquad \square$$

Доказательство. По определению модуля выпуклости $\|x_1 + x_2\| \leqslant 2(1 - \delta_E(\|x_1 - x_2\|))$. Следовательно, $2\delta_E(\|x_1 - x_2\|) \leqslant 2 - \|x_1 + x_2\| \leqslant 2 - \langle p, x_1 + x_2 \rangle$. ■

Используя теорему 1 § 5 главы 5 и теорему 2 § 3 главы 4 из книги [3], получаем следующий результат.

Теорема 2.2. Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $\varepsilon > 0$. Тогда в E существует дифференцируемая по Фреше норма $\|\cdot\|_1$ такая, что пространство $(E, \|\cdot\|_1)$ равномерно выпукло и

$$\frac{\|x\|}{1+\varepsilon} \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\| \quad \forall x \in E. \qquad \square$$

С.Б. Стечкиным в работе [5] получен следующий результат.

Лемма 2.3. Пусть A — замкнутое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве E. Тогда множество $T(A)$ точек $u \in E$, для которых множество $P_A(u)$ состоит ровно из одного элемента, всюду плотно в E. □

Лемма 2.4. Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $R > 0$. Тогда $\Omega_N(R) \subset \Omega_P(R)$. □

Доказательство. Пусть $A \in \Omega_N(R)$. Покажем, что $A \in \Omega_P(R)$. Зафиксируем $x_1 \in U(R, A)$, $x_0 \in P_A(x_1)$. Требуется доказать, что

$$\varrho \left(x_0 + \frac{R}{\|x_1 - x_0\|}(x_1 - x_0), A \right) \geqslant R. \quad (2.4)$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$. Согласно теореме 2.2 в E существует дифференцируемая по Фреше норма $\|\cdot\|_1$ такая, что пространство $(E, \|\cdot\|_1)$ равномерно выпукло и

$$\frac{\|x\|}{1+\varepsilon} \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\| \quad \forall x \in E. \quad (2.5)$$

Обозначим $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. В силу леммы 2.3 существует точка $x_2' \in \mathfrak{B}_{\varepsilon R}(x_2)$ такая, что $\inf\limits_{a \in A} \|x_2' - a\|_1$ достигается в некоторой точке $a_0 \in A$. Обозначим $r = \|x_2' - a_0\|_1$. По теореме Хана–Банаха существует функционал $p \in E^*$ такой, что

$$1 = \langle p, x_2' - a_0 \rangle \geqslant \langle p, x \rangle \quad \forall x \in X, \quad (2.6)$$

где $X = \{x \in E : \|x\|_1 \leqslant r\}$. Используя дифференцируемость по Фреше нормы $\|\cdot\|_1$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathfrak{B}_\delta(x_2' - a_0) \setminus (\operatorname{int} X)$$
$$\langle p, x \rangle + \varepsilon \|x - x_2' + a_0\| \geqslant 1 = \langle p, x_2' - a_0 \rangle. \quad (2.7)$$

Поскольку $r = \inf\limits_{a \in A} \|x_2' - a\|_1$, то $\operatorname{int} X \cap (x_2' - A) = \varnothing$. Следовательно, применяя соотношение (2.7) для $x = x_2' - a$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$$
$$\forall a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta(a_0) \quad \langle p, a - a_0 \rangle \leqslant \varepsilon \|a - a_0\|.$$

Поэтому $p \in N(a_0, A)$. Пусть вектор $u \in E$ — единичный вектор, двойственный функционалу p, т. е.

$$\langle p, u \rangle = \|p\|, \quad \|u\| = 1. \quad (2.8)$$

Так как $A \in \Omega_N(R)$, то

$$\varrho(a_0 + Ru, A) \geqslant R. \quad (2.9)$$

Поскольку $x_0 \in A$, $\|x_2' - a_0\|_1 = \inf\limits_{a \in A} \|x_2' - a\|_1$, то $\|x_2' - a_0\|_1 \leqslant \|x_2' - x_0\|_1$. Отсюда и из неравенств (2.5) следует, что

$$\|x_2' - a_0\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|x_2' - x_0\|.$$

Так как $x_2' \in \mathfrak{B}_{\varepsilon R}(x_2)$ и $\varepsilon < \frac{1}{6}$, $\|x_1 - x_0\| = \varrho(x_1, A) < R$, $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$, то $\|x_2' - x_0\| \leqslant \|x_2 - x_0\| + \varepsilon R < R$. Следовательно,

$$\|x_2' - a_0\| \leqslant \|x_2' - x_0\| + \varepsilon R,$$

а значит,

$$\|x_2 - a_0\| \leqslant \|x_2 - x_0\| + 3\varepsilon R. \quad (2.10)$$

С другой стороны, поскольку $x_0 \in P_A(x_1)$, $a_0 \in A$, то

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1 - a_0\|. \quad (2.11)$$

Из неравенства (2.11) получаем $2\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1 - a_0\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - a_0\|$. Поэтому $\|x_1 - x_2\| \leqslant \|x_2 - a_0\|$. Следовательно, векторы $\frac{x_1 - x_2}{\|x_2 - a_0\|}$ и $\frac{x_2 - a_0}{\|x_2 - a_0\|}$ содержатся в $\mathfrak{B}_1(0)$. По определению модуля выпуклости δ_E имеем

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{x_1 - x_2}{\|x_2 - a_0\|} + \frac{x_2 - a_0}{\|x_2 - a_0\|} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \delta_E \left(\left\| \frac{x_1 - x_2}{\|x_2 - a_0\|} - \frac{x_2 - a_0}{\|x_2 - a_0\|} \right\| \right),$$

то есть

$$\frac{\|x_1 - a_0\|}{2\|x_2 - a_0\|} \leqslant 1 - \delta_E \left(\frac{\|a_0 - x_0\|}{\|x_2 - a_0\|} \right). \quad (2.12)$$

Из неравенств (2.10), $\varepsilon < \frac{1}{6}$, $\|x_2 - x_0\| = \frac{\|x_1 - x_0\|}{2} < \frac{R}{2}$ следует, что $\|x_2 - a_0\| < R$. Отсюда и из неравенств (2.10) – (2.12) получаем: $\frac{\|x_1 - x_0\|}{2(\|x_2 - x_0\| + 3\varepsilon R)} \leqslant 1 - \delta_E \left(\frac{\|a_0 - x_0\|}{R} \right)$. Поэтому

$$\delta_E \left(\frac{\|a_0 - x_0\|}{R} \right) \leqslant \frac{6\varepsilon R}{\|x_1 - x_0\|}. \quad (2.13)$$

Согласно соотношению (2.5) справедливо включение $B_r(0) \subset \{x \in E : \|x\|_1 \leqslant r\} = X$. Поэтому, используя соотношения (2.6), получаем

$$r\|p\| = \sup_{x\in\mathfrak{B}_r(0)} \langle p, x\rangle \leqslant \sup_{x\in X}\langle p, x\rangle \leqslant 1. \quad (2.14)$$

Обозначая $u' = \dfrac{x_2' - a_0}{\|x_2' - a_0\|}$, в силу соотношения (2.6) имеем $\langle p, u'\rangle = \dfrac{1}{\|x_2' - a_0\|}$. Следовательно, согласно неравенству (2.5) получаем: $\langle p, u'\rangle \geqslant \geqslant \dfrac{1}{(1+\varepsilon)\|x_2' - a_0\|_1} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon)r} > \dfrac{1-\varepsilon}{r}$. Отсюда и из неравенства (2.14) следует неравенство

$$\langle p, u'\rangle \geqslant (1-\varepsilon)\|p\|. \quad (2.15)$$

Так как $u, u' \in \mathfrak{B}_1(0)$, то в силу леммы 2.2 и неравенств (2.8), (2.15) имеем

$$2\delta_E(\|u - u'\|) \leqslant 2 - \left\langle \frac{p}{\|p\|}, u + u' \right\rangle \leqslant \varepsilon. \quad (2.16)$$

Зафиксируем произвольное число $\gamma \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Выберем положительное число

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{6}, \frac{\|x_1 - x_0\|}{6R}\,\delta_E\left(\frac{\gamma\|x_1 - x_0\|}{R}\right),\ 2\delta_E(\gamma)\right\}.$$

Используя неравенства (2.13) и (2.16), получаем

$$\|a_0 - x_0\| < \gamma\|x_1 - x_0\|, \qquad \|u - u'\| < \gamma. \quad (2.17)$$

Заметим, что

$$u' - \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} = \frac{x_2' - a_0}{\|x_2' - a_0\|} - \frac{x_2 - x_0}{\|x_2 - x_0\|}.$$

Следовательно, из неравенств (2.17) имеем

$$\left\|u' - \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}\right\| \leqslant \frac{2(\|x_2' - x_2\| + \|a_0 - x_0\|)}{\|x_2 - x_0\|} \leqslant 5\gamma.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left\|u - \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}\right\| \leqslant 6\gamma.$$

Поэтому

$$\left\|x_0 + \frac{R}{\|x_1 - x_0\|}(x_1 - x_0) - (a_0 + Ru)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_0 - a_0\| + 6R\gamma \leqslant \gamma\|x_1 - x_0\| + 6R\gamma < 7R\gamma.$$

Следовательно, используя равенство (2.9), получаем неравенство

$$\varrho\left(x_0 + \frac{R}{\|x_1 - x_0\|}(x_1 - x_0), A\right) \geqslant R - 7R\gamma.$$

Переходя к пределу при $\gamma \to +0$, приходим к неравенству (2.4). ■

Лемма 2.5. Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $R > 0$. Тогда $\Omega_P(R) \subset \subset \Omega_N(R)$. □

Доказательство. Пусть $A \in \Omega_P(R)$. Покажем, что $A \in \Omega_N(R)$. Пусть $x_0 \in A$, $p \in N(x_0, A) \cap \cap\, \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$, u_0 — единичный вектор, двойственный функционалу p. Требуется доказать неравенство

$$\varrho(x_0 + Ru_0, A) \geqslant R. \quad (2.18)$$

Для любого числа $r > 0$ определим вектор $y_r = = x_0 + ru_0$. Зафиксируем число $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Согласно лемме 2.3 для любого $r > 0$ существует точка y_r' с единственной проекцией x_r на множество A и такая, что $\|y_r' - y_r\| \leqslant \varepsilon r$. Тогда

$$\|y_r' - x_r\| \leqslant \|y_r' - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_r' - y_r\| + \|y_r - x_0\| \leqslant (1+\varepsilon)r, \quad (2.19)$$

следовательно,

$$\|x_r - x_0\| \leqslant \|y_r' - x_r\| + \|y_r' - x_0\| \leqslant 2(1+\varepsilon)r.$$

Значит, $\|x_r - x_0\| \to 0$ при $r \to 0$. Так как $p \in \in N(x_0, A)$, то существует число $r(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$\langle p, x_{r(\varepsilon)} - x_0\rangle \leqslant \varepsilon\|x_{r(\varepsilon)} - x_0\| \leqslant 2\varepsilon(1+\varepsilon)r(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\langle p, y_{r(\varepsilon)}' - x_{r(\varepsilon)}\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \langle p, y_{r(\varepsilon)} - x_0\rangle - \varepsilon(3+2\varepsilon)r(\varepsilon) =$$

$$= r(\varepsilon)(1 - 3\varepsilon - 2\varepsilon^2). \quad (2.20)$$

Обозначим $u_\varepsilon = \dfrac{y_{r(\varepsilon)}' - x_{r(\varepsilon)}}{\|y_{r(\varepsilon)}' - x_{r(\varepsilon)}\|}$. Из неравенств (2.19) и (2.20) следует, что

$$1 \geqslant \langle p, u_\varepsilon\rangle \geqslant \frac{1 - 3\varepsilon - 2\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \to 1 \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Отсюда и из равенств $1 = \|u_\varepsilon\| = \|u_0\| = \|p\| = = \langle p, u_0\rangle$ согласно лемме 2.2 получаем, что $u_\varepsilon \to \to u_0$ при $\varepsilon \to +0$. Следовательно,

$$x_{r(\varepsilon)} + Ru_\varepsilon \to x_0 + Ru_0 \text{ при } \varepsilon \to +0. \quad (2.21)$$

Из включения $A \in \Omega_P(R)$ следует, что $\varrho(x_{r(\varepsilon)} + + Ru_\varepsilon, A) \geqslant R$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to \to +0$ и используя соотношение (2.21), получаем неравенство (2.18). ■

Теорема 2.3. Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $R > 0$. Тогда $\Omega_P(R) = = \Omega_N(R)$. □

Доказательство состоит в применении лемм 2.4, 2.5. ■

Литература

1. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. – М.: Физматлит, 2006.

2. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Известия РАН. Серия математическая. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 23–66.

3. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Вища школа, 1980.

4. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.

5. *Стечкин С.Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Revue de Math. pures et appl. – 1963. – V. 8, N 1. – P. 5–18; *Стечкин С.Б.* Избранные труды. – М.: Физматлит, 1998. – С. 270–281.

Поступила в редакцию 12.01.2011