УДК 532.546

А.П. Черняев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Нелинейная фильтрация для специального и степенного законов сопротивления среды*

Рассматриваются фильтрационные течения несжимаемой жидкости общего вида. Уравнения в плоскости годографа, полученные из исходных течений в физической плоскости, линеаризуются и при специальном законе фильтрации приводятся к уравнению Лапласа, а при степенном законе фильтрации сводятся к известным. Пример течения к горизонтальной скважине показывает разрешимость исходной задачи в виде, удобном для количественных и качественных исследований.

Ключевые слова: фильтрация, фильтрационное течение, несжимаемая жидкость, физическая плоскость, годограф, горизонтальная скважина, сопротивление среды.

Система уравнений, описывающая двумерное установившееся фильтрационное движение несжимаемой жидкости в пласте, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -u\frac{\Phi(w)}{w}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -v\frac{\Phi(w)}{w}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь H — обобщенный напор, $\vec{w} = (u, v)$ — скорость фильтрации, $w = |\vec{w}|$, $\Phi(w)$ — закон сопротивления среды, для которого $\Phi(w) \geqslant 0$, $\Phi'(w) \geqslant 0$, причем в нуль левые части последних неравенств могут обращаться лишь при $w = 0$.

Из третьего уравнения (1) и формулы Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_{\partial G^+} (-v)\, dx + u\, dy,$$

где ∂G^+ — положительно ориентируемая граница области G, имеем

$$\oint\limits_{\partial G^+} (-v)\, dx + u\, dy = 0.$$

Последнее означает, что выражение $d\psi = (-v)\, dx + u\, dy$ является полным дифференциалом, криволинейный интеграл от которого по пути Г не зависит от формы этого пути, и поэтому существует потенциал

$$\psi = \int\limits_{\Gamma} (-v)\, dx + u\, dy$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Из последних равенств для функции тока ψ мы можем написать:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = -w\sin\theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = w\cos\theta,$$

где θ — угол между $\vec{w}$ и положительным направлением оси Ox. Следуя [1, 2], получаем систему

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \frac{\Phi(w)}{w^2}\frac{\partial w}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial H} + \frac{w\Phi'(w)}{\Phi^2(w)}\frac{\partial w}{\partial \psi} = 0. \tag{2}$$

Перейдем к переменным θ и w. Для этого положим $\psi = \psi(w, \theta)$ и $H = H(w, \theta)$, продифференцируем последние равенства по ψ и H и запишем полученные равенства в виде двух линейных систем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial H} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial H} = 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial H} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial H} = 1. \end{cases}$$

Их общий определитель $w \neq 0$ в силу (2) отрицателен, т. к.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial \psi} & \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \\ \frac{\partial w}{\partial H} & \frac{\partial \theta}{\partial H} \end{vmatrix} = \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial \theta}{\partial H} - \frac{\partial w}{\partial H}\frac{\partial \theta}{\partial \psi} =$$
$$= \frac{\partial w}{\partial \psi}\left(-\frac{w\Phi'(w)}{\Phi^2(w)}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right) - \frac{\partial w}{\partial H}\left(\frac{\Phi(w)}{w^2}\frac{\partial w}{\partial H}\right) =$$
$$= -\frac{w\Phi'(w)}{\Phi^2(w)}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2 - \frac{\Phi(w)}{w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial H}\right)^2 < 0.$$

По правилу Крамера

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \\ 0 & \frac{\partial \theta}{\partial H} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial H},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial \psi} & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial H} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial w}{\partial H},$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \\ 1 & \frac{\partial \theta}{\partial H} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial \psi} & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial H} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial w}{\partial \psi},$$

*Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проекты № 2.1.1/11133 и 2.1.1/12968.

Из последних равенств мы имеем

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial H}}=\frac{\frac{\partial H}{\partial\theta}}{\frac{\partial w}{\partial\psi}}=-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial\theta}}{\frac{\partial w}{\partial H}}=-\frac{\frac{\partial H}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial\psi}},$$

следовательно,

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial\psi}}{\frac{\partial\theta}{\partial H}}\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{\partial H}{\partial\theta},\quad \frac{\frac{\partial\theta}{\partial\psi}}{\frac{\partial w}{\partial H}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial H}{\partial w}.$$

Из последних равенств, с учетом (2), будем иметь

$$\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)}\frac{\partial\psi}{\partial w}=-\frac{\partial H}{\partial\theta},\quad \frac{\Phi(w)}{w^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial H}{\partial w}. \tag{3}$$

Исключив из (3) напор H, получим

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)+\frac{\Phi(w)}{w^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \tag{4}$$

Итак, мы пришли к уравнению (4), которое линейно.

Наложим теперь условие

$$\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)}=\frac{w^2}{\Phi(w)}, \tag{5}$$

откуда сразу получаем

$$\frac{1}{w^3}=\frac{\Phi'(w)}{\Phi^3(w)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение относительно $\Phi(w)$, имеем

$$\frac{1}{w^2}+a=\frac{1}{\Phi^2(w)},\quad a=\text{const},$$

откуда

$$\Phi(w)=w\left(1+aw^2\right)^{-1/2}, a=\text{const},\ 1+aw^2>0. \tag{6}$$

Из (6) мы получаем

$$\frac{w^2}{\Phi(w)}=w\left(1+aw^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

и, учитывая (5) и (7) из системы (3), будем иметь

$$\begin{aligned} w\left(1+aw^2\right)^{1/2}\frac{\partial\psi}{\partial w}&=-\frac{\partial H}{\partial\theta},\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}&=w\left(1+aw^2\right)^{1/2}\frac{\partial H}{\partial w}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если теперь ввести новую переменную

$$r(w)=\ln\frac{w}{(1+\sqrt{1+aw^2})}=\ln w-\ln(1+\sqrt{1+aw^2}), \tag{9}$$

то

$$r'(w)=\frac{1}{w}-\frac{aw}{(1+\sqrt{1+aw^2})\sqrt{1+aw^2}}=\frac{1}{w\sqrt{1+aw^2}}. \tag{10}$$

Так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{\partial\psi}{\partial r}r'(w),\quad \frac{\partial H}{\partial w}=\frac{\partial H}{\partial r}r(w),$$

то, подставив последнее в систему (8), получим

$$\begin{aligned} w\left(1+aw^2\right)^{1/2}r'(w)\frac{\partial\psi}{\partial r}&=-\frac{\partial H}{\partial\theta},\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}&=w\left(1+aw^2\right)^{1/2}r'(w)\,\frac{\partial H}{\partial r}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (9) и (10), из последних равенств имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial H}{\partial r},\quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\partial H}{\partial\theta}. \tag{11}$$

Таким образом, функция $\psi+iH$ является аналитической функцией комплексного переменного $\theta+ir$, ибо (11) — система Коши–Римана.

Закон (6) при $a=-1/\nu^2$ известен как закон Соколовского. Но тогда невозможны задачи с большими w, которые возникают, например, при моделировании фильтрационных течений к скважинам [2]. Поэтому для таких задач возможен закон (6) при $a\geqslant 0$. При $a=0$ (6) является законом Дарси. Если $a>0$, то можно положить $a=1/\nu^2$ и назвать этот закон *модифицированным законом Соколовского* [3].

Рассмотрим фильтрацию несжимаемой жидкости к горизонтальной скважине в случае (6) при $a>0$. Это плоское движение несжимаемой однофазной жидкости в пласте к горизонтальной скважине, расположенной в начале координат. Тогда пласт — бесконечная горизонтальная полоса в плоскости (x,y) ширины $2h$ с непроницаемой кровлей и подошвой (рис. 1). Горизонтальную скважину моделируем точечным стоком. Если рассмотреть точечный источник, то линии тока останутся прежними, лишь векторы скорости, направленные по касательным к линиям тока, получат противоположные направления. Будем предполагать наличие в начале координат источника. Заметим, что реальные скважины имеют конечный диаметр, но т. к. характерные размеры пластов значительно превосходят характерные размеры диаметров скважин, то рассмотрение такой модели вполне оправдано.

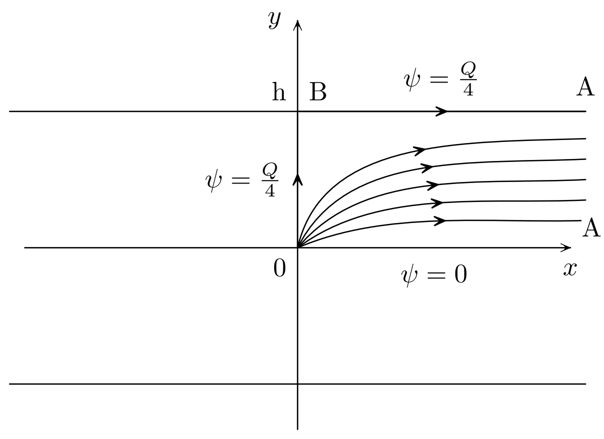

Рис. 1

Течение является симметричным относительно осей Ox и Oy (рис. 1). Достаточно построить решение задачи в первом квадранте, а решения в остальных найдутся заменой знака при соответствующих переменных.

Если принять, что полный расход через контур, охватывающий скважину и целиком лежащий внутри пласта, равен Q, то из стационарности течения получим, что на линии OA $\psi = 0$, а на линии OBA — $\psi = Q/4$ (рис. 1).

Найдем, во что отображается рассматриваемая область при переходе к годографу. Новыми переменными будут θ и w. Линия тока OA, на которой $\psi = 0$, в физической плоскости — положительная часть оси абсцисс (рис. 1) переходит в плоскости годографа в часть оси ординат OA (рис. 2). Часть линии тока OB, на которой $\psi = Q/4$, в физической плоскости — это отрезок на положительной части оси ординат (рис. 1) переходит в вертикальный луч $\theta = \pi/2$, $w > 0$ (рис. 2). Часть линии тока BA, на которой $\psi = Q/4$, в физической плоскости это луч $y = h$, $x > 0$ (рис. 1) переходит в вертикальный отрезок BA на оси ординат (рис. 2). Заметим, что взаимная однозначность отображения нарушается в точке B физической плоскости. Она отображается на отрезок $w = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Ордината точки A в плоскости годографа легко находится из равенства: $Q/4 = hw_{\mathrm{A}}$, откуда $w_{\mathrm{A}} = Q/(4h)$.

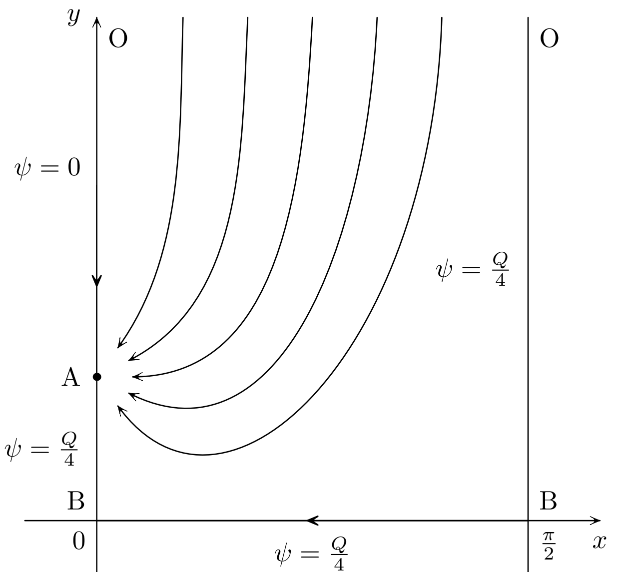

Рис. 2

Таким образом, мы получили в плоскости годографа:

$$\{(\theta, w): \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant w < +\infty\}. \tag{12}$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция тока рассматриваемого течения, имеют вид (рис. 2):

$$\begin{gathered}
\psi\left(\frac{\pi}{2}, w\right) = \frac{Q}{4}, \quad w \in [0, +\infty), \\
\psi(\theta, 0) = \frac{Q}{4}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
\psi(0, w) = \frac{Q}{4}, \quad w \in [0, w_A], \\
\psi(0, w) = 0, \quad w \in (w_A, +\infty).
\end{gathered} \tag{13}$$

При (9) полуполоса (12) переходит в полуполосу

$$\left\{(\theta, r): 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < r < -\frac{1}{2}\ln a\right\} \tag{14}$$

(рис. 3). Действительно, из (9) видно, что при $w \to +0$ $r \to -\infty$, а при $w \to +\infty$ $r \to -(\ln a)/2$. Кроме того, из (10) следует монотонное возрастание (9).

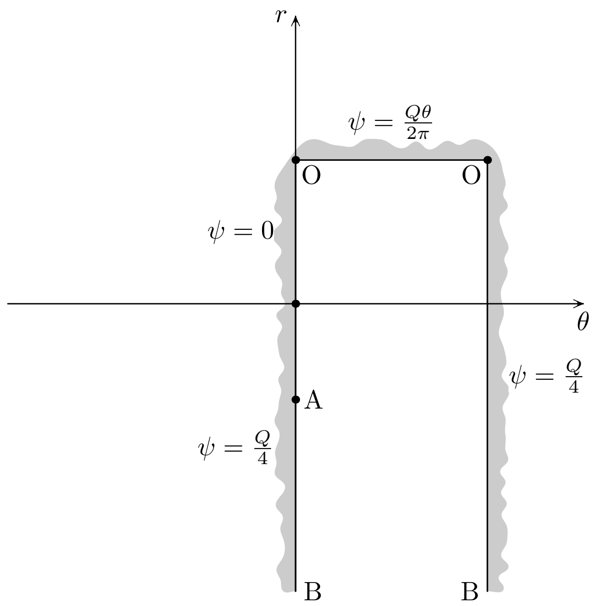

Рис. 3

Граничные условия на границе полуполосы (14) индуцируются формулами (13), за исключением граничного условия на отрезке

$$\left\{\left(\theta, -\frac{1}{2}\ln a\right): 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{15}$$

Граничное условие на (15) зададим таким, каким оно было бы в случае закона Дарси. Поскольку [2, с. 33] функция тока искомого течения для закона Дарси в переменных годографа имеет вид

$$\psi_D = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 2s\cos 2\theta + s^2} + 1 - s\cos 2\theta}{\sqrt{1 - 2s\cos 2\theta + s^2} + s\cos 2\theta - 1}},$$

$$s = \frac{4\pi^2 w^2}{Q^2 m^2}, \quad m = \frac{\pi}{2h};$$

то

$$\psi_\infty = \lim_{s\to+\infty}\psi_D = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \frac{Q\theta}{2\pi}. \quad (16)$$

На основании (13), (15) и (16) можно определить граничные условия на ψ в полуполосе (14):

$$\begin{gathered}\psi\left(\frac{\pi}{2}, r\right) = \frac{Q}{4}, \quad r \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\ln a,\right];\\ \psi\left(\theta, -\frac{1}{2}\ln a\right) = \frac{Q\theta}{2\pi}, \quad \theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right);\\ \psi(0,r) = 0, \quad r\in\left(-\frac{1}{2}\ln a, \quad r_A\right];\\ \psi(0,r) = \frac{Q}{4}, \quad r\in(-\infty, r_A,).\end{gathered} \quad (17)$$

В формулах (17) $r_{\text{A}} = r(w_{\text{A}})$, где правая часть определяется (9), т. е.

$$r_A = \ln\frac{w_A}{\left(1+\sqrt{1+aw_A^2}\right)} = \ln\frac{\frac{Q}{4h}}{\left(1+\sqrt{1+a\left(\frac{Q}{4h}\right)^2}\right)}. \quad (18)$$

В свою очередь из (11) и (14) заключаем, что

$$\Delta_{\theta,r}\psi = \psi''_{\theta\theta} + \psi''_{rr} = 0 \quad (19)$$

в области

$$\left\{(\theta,r): 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad -\infty<r<-\frac{1}{2}\ln a\right\}. \quad (20)$$

Введем теперь

$$\xi = -r - \frac{1}{2}\ln a. \quad (21)$$

Тогда из (19), (20) и (21) следует, что ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\xi,\theta}\psi = \psi''_{\xi\xi} + \psi''_{\theta\theta} = 0 \quad (22)$$

в области

$$\left\{(\xi,r): 0<\xi<+\infty, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}. \quad (23)$$

Из (17) и (21) следует, что ψ удовлетворяет граничным условиям (см. рис. 4):

$$\begin{gathered}\psi\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{Q}{4}, \quad \xi\in[0,+\infty);\\ \psi(0,\theta) = \frac{Q\theta}{2\pi}, \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right);\\ \psi(\xi,0) = 0, \quad \xi\in(0,\xi_A];\\ \psi(\xi,0) = \frac{Q}{4}, \quad \xi\in(\xi_A,+\infty).\end{gathered} \quad (24)$$

В формулах (24) $\xi_{\text{A}} = \xi(r_{\text{A}})$, где правая часть определяется (21), т. е.

$$\xi_A = -r_A - \frac{1}{2}\ln a. \quad (25)$$

В свою очередь правая часть (25) определяется (18).

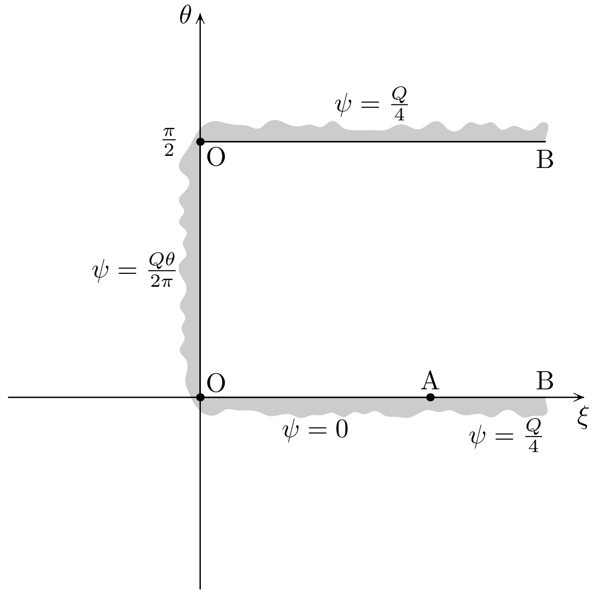

Рис. 4

Для отыскания ψ, удовлетворяющей уравнению (22) на (23) и условиям (24), используем формулу 7.1. 1–8 [4, с. 416]: при $0\leqslant\xi<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$:

$$\begin{gathered}\psi(\xi,\theta) = \\ = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\exp(-2j\xi)\sin(2j\theta)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(\eta)\sin(2j\eta)\,d\eta + \\ + \frac{\sin(2\pi\theta)}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}[2(\xi-\zeta)]-\cos 2\theta} - \right.\\ \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}[2(\xi+\zeta)]-\cos 2\theta}\right\} f_2(\zeta)\,d\zeta + \\ + \frac{\sin(2\pi\theta)}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}[2(\xi-\zeta)]+\cos 2\theta} - \right.\\ \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}[2(\xi+\zeta)]+\cos 2\theta}\right\} f_3(\zeta)\,d\zeta, \end{gathered} \quad (26)$$

где

$$\begin{gathered} f_1(\theta) = Q\theta/(2\pi);\\ f_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0<\xi<\xi_A,\\ \frac{Q}{4}, & \xi_A<\xi<\infty;\end{cases}\\ f_3(\xi) = Q/4.\end{gathered}$$

Последние формулы получены из условий (24). Формула (26) при (9) и (21) решает поставленную задачу. Однако (26) легко упростить. Действительно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(\eta)\sin(2j\eta)\,d\eta = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\sin(2j\eta)\,d\eta = \frac{Q}{8j}(-1)^j.$$

Поэтому

$$\psi(\xi,\theta)=\frac{Q}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\exp(-2j\xi)\sin(2j\theta)+$$
$$+\frac{Q\sin(2\pi\theta)}{4\pi}\int\limits_{\xi_A}^{\infty}\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}[2(\xi-\zeta)]-\cos2\theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\mathrm{ch}[2(\xi+\zeta)]-\cos2\theta}\right\}d\zeta+$$
$$+\frac{Q\sin(2\pi\theta)}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}[2(\xi-\zeta)]+\cos2\theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\mathrm{ch}[2(\xi+\zeta)]+\cos2\theta}\right\}d\zeta. \quad (27)$$

Формула (27) — окончательное выражение для функции тока исходного течения при (6).

Степенной закона фильтрации в годографе имеет вид

$$\Phi(w)=w^n, n=\mathrm{const}>0. \quad (28)$$

Случай $n=1$ соответствует фильтрации по закону Дарси.

Уравнение (4) для степенного закона (28) будет иметь вид

$$\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}+w\frac{\partial\psi}{\partial w}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \quad (29)$$

Обратимся в качестве примера к задаче фильтрации несжимаемой жидкости к горизонтальной скважине при степенном законе (28). Мы рассматриваем плоское движение несжимаемой однофазной жидкости в пласте к горизонтальной скважине, которая расположена в начале координат (рис. 1). Как и ранее, течение симметрично относительно осей Ox и Oy (рис. 1), и достаточно построить решение задачи в первом квадранте, а решения в остальных найдутся заменой знака при соответствующих переменных.

Течение в первом квадранте при преобразовании годографа отображается в ту же замкнутую область (12), что и ранее (рис. 2), а граничные условия, которым должна удовлетворять функция тока, по-прежнему даются формулами (13).

В случае закона Дарси, следующего из (1) при $\Phi(w)=w$, искомое решение известно и имеет вид [5]:

$$\begin{aligned}H_D&=-\frac{Q}{4\pi}\ln\left(\mathrm{sh}^2\,mx+\sin^2 my\right),\\ \psi_D&=\frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{cth}\,mx\,\mathrm{tg}\,my\right).\end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $m=\pi/(2h)$, где h — половина толщины пласта, а Q — расход. На основании первых двух равенств (1) при $\Phi(w)=w$ и первого равенства (30) получается связь между (θ,w) и (x,y):

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}^2\,mx&=-\frac{1}{2}+\frac{1+s}{2\sqrt{1-2s\cos2\theta+s^2}},\\ \sin^2 my&=\frac{1}{2}+\frac{1-s}{2\sqrt{1-2s\cos2\theta+s^2}},\\ s&=\frac{4\pi^2w^2}{Q^2m^2}.\end{aligned} \quad (31)$$

Из (30) напор и функция тока в годографе имеют вид

$$\begin{aligned}H_D&=-\frac{Q}{4\pi}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{1-2s\cos2\theta+s^2}}\right],\\ \psi_D&=\\ &=\frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{1-2s\cos2\theta+s^2}+1-s\cos2\theta}{\sqrt{1-2s\cos2\theta+s^2}+s\cos2\theta-1}}.\end{aligned} \quad (32)$$

Функции (32) соответствуют нашей задаче с законом Дарси в плоскости годографа.

Вводится функция

$$\Psi=\psi-\psi_D, \quad (33)$$

уравнение для которой получается из (29) и (33). Оно имеет вид

$$\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial w^2}+w\frac{\partial\Psi}{\partial w}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}=$$
$$=-\left[\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\psi_D}{\partial w^2}+w\frac{\partial\psi_D}{\partial w}+\frac{\partial^2\psi_D}{\partial\theta^2}\right]. \quad (34)$$

Поскольку граничные условия при обоих законах фильтрации одинаковы, то в задаче для функции Ψ граничные условия нулевые:

$$\begin{aligned}&\Psi\left(\frac{\pi}{2},w\right)=0,\quad w\in[0,+\infty);\\ &\Psi(\theta,0)=0,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\\ &\Psi(0,w)=0,\quad w\in[0,w_A];\\ &\Psi(0,w)=0,\quad w\in[w_A,+\infty).\end{aligned} \quad (35)$$

Сделаем преобразование независимой переменной и неизвестной функции, полагая $w=\exp\{z/n^{1/2}\}$ и $\Psi(z,\theta)=\exp[(1-n)z/(2n^{1/2})]\Pi(z,\theta)$:

$$w=\exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}}\right\},\Psi\{z,\theta)=\exp\left\{\frac{1-n}{2\sqrt{n}}z\right\}\Pi(z,\theta).$$

Тогда исходная полуполоса $\theta\in[0,\pi/2]$, $w\in[0,+\infty)$ переходит в полосу $\theta\in[0,\pi/2]$, $z\in(-\infty,+\infty)$, а уравнение (34) примет вид

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2}-\frac{(1-n)^2}{4n}\Pi=$$
$$=-\exp\left\{\frac{n-1}{2\sqrt{n}}z\right\}\left[\frac{\partial^2\psi_D}{\partial z^2}+\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{\partial\psi_D}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi_D}{\partial\theta^2}\right]. \quad (36)$$

Фундаментальное решение однородного уравнения (36) в плоскости (z,θ) имеет вид [6]:

$$\Pi_0(\theta,z)=K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{z^2+\theta^2}\right).$$

Здесь K_0 — функция Макдональда нулевого порядка. Чтобы найти решение в полосе $\theta \in \in [0, \pi/2]$, $z \in (-\infty, +\infty)$, нужно построить функцию Грина для однородного уравнения Гельмгольца. После этого решение неоднородного уравнения (36) может быть найдено по второй формуле Грина. Значение в некоторой точке искомой функции представляется в формуле Грина через фундаментальное решение, расположенное в этой точке. Таким образом, для построения функции источника поместим источник в произвольной точке (z, θ) и методом отражений относительно линий $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ добьемся того, чтобы на этих линиях функция источника обращалась в ноль. В результате приходим к бесконечной системе источников вида [4]:

$$G(w,\theta,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{n(\ln w - \ln\xi)^2 + (\theta-\eta-\pi l)^2}\right) - \right.$$
$$\left. -K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{n(\ln w - \ln\xi)^2 + (\theta+\eta+\pi l)^2}\right)\right],$$
$$\xi = \exp\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), w = \exp\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right), \quad (37)$$

где $n \neq 1$.

Учитывая (33), получим следующее выражение для функции тока течения жидкости при степенном законе фильтрации:

$$\psi(\theta, w) = \frac{Q}{2\pi}\times$$
$$\times \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{1-2s_0\cos 2\theta + s_0^2} + 1 - s_0\cos 2\theta}{\sqrt{1-2s_0\cos 2\theta + s_0^2} + s_0\cos 2\theta - 1}} -$$
$$-\frac{Qw^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{n}}{2\pi}\times\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{G(w,\theta,\xi,\eta)s\sin 2\eta}{(1-2s\cos 2\eta + s^2)\xi^{\frac{3-n}{2}}}\times$$
$$\times\left[1 + \frac{1-3s^2+2s\cos 2\eta}{n(1-2s\cos 2\eta + s^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(1-s^2)}{1-2s\cos 2\eta + s^2}\right] d\eta\, d\xi,$$
$$s_0 = \frac{4\pi^2 w^2}{Q^2 m^2}, \quad s = \frac{4\pi^2\xi^2}{Q^2 m^2}. \quad (38)$$

Функция (38) при (37) является решением задачи (29), (13).

Итак, для (6) и (28) построены точные решения в плоскости годографа для функции тока. Найденная функция тока связана с напором уравнениями (3), что дает возможность найти частные производные напора по θ и по w. Значит, нам известно поле градиента напора.

Полученное решение можно интерпретировать как математическую модель притока жидкости к горизонтальной скважине бесконечной длины. Она может быть использована для получения приближенного решения задачи о притоке к горизонтальной скважине большой протяженности [7]. Кроме того, полученное решение может быть применено к модели притока к цепочке вертикальных скважин, которая имеет ту же математическую постановку, тем более что вблизи вертикальных скважин скорости обычно выше, чем вблизи горизонтальных, и нелинейные эффекты более существенны. В дальнейшем разработанную технику построения решения можно применить для исследования других областей течения, в частности, рассмотреть приток к разрезу конечной длины, что может соответствовать трещине гидроразрыва.

Литература

1. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. – 1940. – Т. IV, вып. 1. – С. 33–52.

2. *Черняев А.П., Коротеев М.В.* Введение в математическую теорию нелинейной стационарной фильтрации несжимаемой жидкости к горизонтальным скважинам. – М.: МГУП, 2003. – 104 с.

3. *Шешуков Е.Г., Фомин В.М.* К нелинейной теории фильтрации // Вакуумная техника: сб. – Вып. 2. – Казань: Таткнигоиздат, 1970.

4. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

5. *Лейбензон Л.С.* Нефтепромысловая механика. Ч. 2. – М.: Госгеонефтеиздат, 1934. – 352 с.

6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

7. *Басниев К.С., Алиев З.С., Черных В.В.* Методы расчетов дебитов горизонтальных наклонных и многоствольных газовых скважин. – М.: ИРЦ Газпром, 1999. – 47 с.

Поступила в редакцию 21.01.2011