УДК 519.17

М. И. Исаев[1,2], *К. В. Исаева*[2]

[1]Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

О классе графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами

Рассматриваются три свойства перемешиваемости графа: большая алгебраическая связность, большая константа Чигера (изопериметрическое число) и большой спектральный зазор между 1 и вторым по величине собственным значением матрицы переходных вероятностей случайного блуждания по графу. В работе доказывается эквивалентность данных свойств (в некотором смысле). Получены оценки вероятности, что случайный граф обладает указанными свойствами перемешиваемости. Кроме того, приведены асимптотические формулы для числа эйлеровых ориентаций и числа эйлеровых циклов в неориентированном простом графе.

Ключевые слова: алгебраическая связность, изопериметрическое число, матрица Лапласа, эйлеровы циклы и ориентации.

1. Введение

Пусть G — неориентированный простой граф с множеством вершин VG и множеством ребер EG. Определим $(n \times n)$-матрицу Q следующим образом:

$$Q_{jk} = \begin{cases} -1, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ d_j, & j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{1}$$

где $n = |VG|$ и d_j обозначает степень $v_j \in VG$. Матрица $Q = Q(G)$ называется *матрицей Лапласа* графа G. Собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ матрицы Q являются неотрицательными вещественными числами, причем количество нулевых собственных значений совпадает с количеством компонент связности, в частности, $\lambda_1 = 0$. Число $\lambda_2 = \lambda_2(G)$ называется *алгебраической связностью* графа G.

Классическая теория алгебраической связности была развита Фидлером, см. [6], [7]. Отметим также, что число $\lambda_2(G)$ является дискретным аналогом наименьшего положительного собственного значения дифференциального оператора Лапласа на римановом многообразии. (Для дополнительной информации о спектральных свойствах матрицы Лапласа см., например, [14] и ссылки, приведенные там.)

Пусть $\mathcal{F}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством.

Свойство 1. *Алгебраическая связность* $\lambda_2(G) \geq \gamma |VG|$.

Для подмножества вершин $A \subseteq VG$ пусть ∂A обозначает множество всех ребер, соединяющих вершину из A и вершину не из A:

$$\partial A = \left\{ \{u, v\} \in EG : u \in A, v \in VG \setminus A \right\}.$$

Константа Чигера (или *изопериметрическое число*) графа G, обозначаемая $i(G)$, определяется следующим образом:

$$i(G) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset VG,\ 0 < |A| \leq \frac{|VG|}{2} \right\}.$$

Число $i(G)$ является дискретным аналогом изопериметрической константы (Чигера) в теории римановых многообразий и имеет много интересных интерпретаций (для более подробной информации см., например, [13] и ссылки, приведенные там).

Пусть $\mathcal{C}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством.

Свойство 2. *Константа Чигера* $i(G) \geq \gamma |VG|$.

Пусть $P = P(G)$ обозначает матрицу переходных вероятностей случайного блуждания по графу G:

$$P_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{d_j}, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Собственные значения P таковы, что

$$1 = \chi_1 \geq \chi_2 \ldots \geq \chi_n \geq -1.$$

Граф G связен тогда и только тогда, когда случайное блуждание является неприводимой цепью Маркова. В этом случае существует единственное стационарное распределение и кратность собственного значения $\chi_1 = 1$ равна одному. (Для дополнительной информации о случайных блужданиях на графах см., например, [9] и ссылки, приведенные там.)

Пусть $\mathcal{M}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством.

Свойство 3. *Спектральной зазор* $1 - \chi_2(G) \geq \gamma$ *и* $\min\limits_j d_j \geq \gamma |VG|$.

Известно, что графы из $\mathcal{F}_\gamma$, $\mathcal{C}_\gamma$, $\mathcal{M}_\gamma$ имеют сильные перемешивающие свойства. Мы называем $\mathcal{F}_\gamma \cap \mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{M}_\gamma$-классом γ-перемешивающих графов. В действительности (см. раздел 2 настоящей работы), Свойства 1–3 эквивалентны в следующем смысле: если граф удовлетворяет одному из этих свойств при $\gamma = \gamma_0 > 0$, то он удовлетворяет всем свойствам 1–3 для некоторого $\gamma > 0$, зависящего только от γ_0.

В разделе 3 оценивается вероятность случайного графа быть γ-перемешивающим. Рассматривается модель Гильберта случайного графа: каждая пара вершин может соединяться ребром независимо с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$. Оказывается, что в этой модели практически все графы (асимптотически) получаются γ-перемешивающими при некотором $\gamma > 0$, зависящим только от p.

В разделе 4 построено общее семейство графов, удовлетворяющих свойствам 1–3 (см. пример 3 и замечание 1). Например, семейства полных графов $\{K_n\}$ и полных двудольных графов $\{K_{n,n}\}$ являются частными случаями этого общего семейства. В разделе 4 обсуждаются также другие важные примеры.

Кроме того, в настоящей работе рассматриваются две задачи перечисления: подсчет числа эйлеровых ориентаций (EO) и подсчет числа эйлеровых циклов (EC) в неориентированном простом графе. Известно, что обе эти задачи являются полными для класса $\#P$ (см. [2], [10]) и, следовательно, трудными с точки зрения теории сложности.

В работах [4], [5] было определено асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций и числа эйлеровых циклов для случая γ-перемешивающих графов (точнее, для графов, удовлетворяющих свойству 1).

В разделе 5 приведены асимптотические формулы для EO, EC, а также проведено сравнение с точными значениями для небольших графов. В действительности, если граф G является γ-перемешивающим, то для любого $\varepsilon > 0$ относительная погрешность $|\delta(G)| \leq Cn^{-1/2+\varepsilon}$, где $C > 0$ зависит только от ε и γ. Доказательство этих формул можно найти в препринтах [e-print: hal-00730657] и [e-print: hal-00739760], планируемых для публикации в ближайшее время.

2. Эквивалентность свойств 1–3

Известно, что для простого графа G с n вершинами

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{n-1} \min_j d_j, \tag{3a}$$

$$\lambda_2(G) \geq 2 \min_j d_j - n + 2, \tag{3b}$$

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq i(G) \leq \sqrt{\lambda_2(G)(2\max_j d_j - \lambda_2(G))}, \tag{4}$$

$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2(G_1) + 1, \tag{5a}$$

$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2(G'), \tag{5b}$$

где G_1 — граф, получающийся из G посредством удаления одной вершины и всех смежных ей ребер, G' — произвольный граф такой, что $VG' = VG$ и $EG \subset EG'$.

Оценки (3), (5) были получены в [6]. Оценки (4) приведены в [13].

Используя (4) и неравенство $d_j < n$, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{C}_{\gamma_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_1}, \tag{6}$$

где $\gamma_1 > 0$ зависит только от γ_0.

Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и M — $(n \times n)$-матрица. Мы используем обозначения:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}, \qquad \|M\| = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\vec{x}\|=1} \|M\vec{x}\|.$$

Для того чтобы завершить доказательство эквивалентности Свойств 1–3, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $a, b_1, b_2 > 0$. Пусть A — симметричная положительно определенная $(n \times n)$-матрица такая, что для некоторого $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} \neq \vec{0}$,*

$$A\vec{w} = 0, \tag{7a}$$

и для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T\vec{w} = 0$,

$$\|A\vec{u}\| \geq a\|\vec{u}\|. \tag{7b}$$

Тогда для любой симметричной $(n \times n)$-матрицы B такой, что

$$\|B\| \leq b_1 \quad \text{и} \quad \vec{w}^T B\vec{w} \geq b_2\|\vec{w}\|^2, \tag{7c}$$

выполняется следующее утверждение:

$$\begin{cases} \det(A - \lambda B) = 0, \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda \geq \rho \tag{8}$$

для некоторого $\rho = \rho(a, b_1, b_2) > 0$.

Доказательство леммы 1 приведено в конце данного раздела.

Заметим, что

$$P = I - D^{-1}Q, \tag{9}$$

где Q и P – матрицы, определенные в (1) и (2) соответственно, I обозначает единичную матрицу и D — диагональная матрица, $D_{jj} = d_j$.

Пусть $A_1 = \frac{1}{n}Q$, $B_1 = \frac{1}{n}D$ и $\vec{w}_1 = [1, \ldots, 1]^T$. Используя (9), получаем, что

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(Q - \lambda nI) = 0; \tag{10}$$

$$\det(A_1 - \lambda B_1) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0 \tag{11}$$

для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T\vec{w}_1 = 0$,

$$\vec{u}^T A_1\vec{u} \geq \frac{1}{n}\lambda_2(G)\vec{u}^T\vec{u}; \tag{12}$$

$$\|B_1\| \le \frac{1}{n}\max_j d_j \le 1, \quad \vec{w}_1^T B_1 \vec{w}_1 \ge \frac{1}{n}\min_j d_j\, \vec{w}_1^T \vec{w}_1. \tag{13}$$

Комбинируя свойство 1, (3a), (10) – (13) и лемму 1, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{M}_{\gamma_2}, \tag{14}$$

где $\gamma_2 > 0$ зависит только от γ_0.

Пусть $A_2 = D^{-\frac{1}{2}} Q D^{-\frac{1}{2}}$, $B = nD^{-1}$ и $\vec{w}_2 = D^{\frac{1}{2}}\vec{w}_1$, где D^s — диагональная матрица, $D^s_{jj} = (d_j)^s$. Используя (9), находим, что

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0; \tag{15}$$

$$\det(A_2 - \lambda B_2) = 0 \Longleftrightarrow \det(Q - \lambda n I) = 0 \tag{16}$$

для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T \vec{w}_2 = 0$,

$$\vec{u}^T A_2 \vec{u} \ge (1 - \chi_2(G))\vec{u}^T\vec{u}; \tag{17}$$

$$\|B_2\| \le \frac{n}{\min\limits_j d_j}, \quad \vec{w}_2^T B_1 \vec{w}_2 = n\vec{w}_1^T\vec{w}_1 \ge \vec{w}_2^T\vec{w}_2. \tag{18}$$

Комбинируя свойство 3, (15) – (18) и лемму 1, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{M}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_3}, \tag{19}$$

где $\gamma_3 > 0$ зависит только от γ_0.

Собирая вместе (6), (14) и (19), мы получаем искомое утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}_\gamma, \mathcal{C}_\gamma, \mathcal{M}_\gamma$ — множества, рассматриваемые в разделе 1. Тогда для любого $\gamma_0 > 0$*

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \cup \mathcal{C}_{\gamma_0} \cup \mathcal{M}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_\gamma \cap \mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{M}_\gamma, \tag{20}$$

где $\gamma > 0$ зависит только от γ_0.

Теперь осталось доказать лемму 1.

Доказательство. Пусть $\det(A - \lambda B) = 0$. Тогда для некоторого $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \ne 0$,

$$A\vec{v} = \lambda B\vec{v}. \tag{21}$$

Пусть $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, где $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{w}$ и $\vec{v}_\perp^T\vec{w} = 0$. Согласно (7a) имеем, что

$$\vec{v}_\parallel^T A\vec{v} = 0.$$

Так как $\lambda \ne 0$, используя (21), получаем, что

$$\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel = -\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp. \tag{22}$$

Используя (7c), (22) и неравенство Коши–Шварца находим, что

$$b_1\|\vec{v}_\parallel\|\|\vec{v}_\perp\| \ge \|\vec{v}_\parallel\|\|B\vec{v}_\perp\| \ge |\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp| = |\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel| \ge b_2\|\vec{v}_\parallel\|^2.$$

Поэтому имеем, что

$$\|\vec{v}_\perp\| \ge \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\|\vec{v}\|. \tag{23}$$

Используя (7b), (7c) и (23), находим, что

$$\begin{aligned} &\|A\vec{v}\| \ge a\|\vec{v}_\perp\|, \\ &\|B\vec{v}\| \le b_1\|\vec{v}\| \le \frac{b_1\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{b_2}\|\vec{v}_\perp\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Комбинируя (21) и (24), получаем, что

$$\lambda \ge \frac{ab_2}{b_1\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \tag{25}$$

■

3. Вероятность случайного графа быть γ-перемешивающим

Пусть ξ — случайная величина, принадлежащая биномиальному распределению $B(M,p)$:

$$\Pr(\xi = k) = \frac{M!}{k!(M-k)!}p^k(1-p)^{M-k}, \quad 0 < p < 1,\ M \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$\Pr(\xi \le \alpha M) \le c^{-M} \tag{26}$$

для некоторых $\alpha > 0$, $c > 1$, зависящих только от p. Это следует, например, из следующей оценки: для $1 \le k \le \frac{p(M+1)}{p+2}$

$$\frac{\Pr(\xi = k)}{\Pr(\xi = k-1)} = \frac{M-k+1}{k}\,\frac{p}{1-p} \ge \frac{\frac{2}{p+2}(M+1)}{\frac{p}{p+2}(M+1)}\,\frac{p}{1-p} \ge 2.$$

Пусть G — случайный граф, принадлежащий модели Гильберта $G(n,p)$:

$$\forall_{1\le i<j\le n} \Pr(\{v_i, v_j\} \in EG) = p, \quad 0 < p < 1,$$
$$\text{(независимо для каждой пары } \{i,j\}).$$

Для подмножества вершин $A \subset VG$, используя (26), находим, что

$$\Pr(|\partial A| \le \alpha |A|(n - |A|)) \le c^{-|A|(n-|A|)}. \tag{27}$$

Используя (27), получаем, что

$$\begin{aligned}\Pr(i(G) \le \frac{\alpha n}{2}) &\le \sum_{A\subset VG,\ 0<|A|\le\frac{n}{2}} \Pr(|\partial A| \le \alpha |A| \frac{n}{2}) \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n/2} \sum_{|A|=k} \Pr(|\partial A| \le \alpha |A|(n-|A|)) \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n/2} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, c^{-k(n-k)} \le \sum_{k=1}^{n/2} \frac{n!}{k!(n-k)!}\,(c^{-n/2})^k \le \\ &\le (1 + c^{-n/2})^n - 1 \le \beta^{-n}\end{aligned} \tag{28}$$

для некоторого $\beta > 1$, зависящего только от p.

Согласно (28) и теореме 1, получаем, что вероятность случайного графа (в модели Гильберта $G(n,p)$) быть γ-перемешивающим не менее чем $1 - \beta^{-n}$, где $\gamma = \gamma(p) > 0$ и $\beta = \beta(p) > 1$.

4. Некоторые основные свойства и примеры

Заметим, что согласно (3b) и теореме 1,

$$\begin{matrix}\text{если } \min\limits_j d_j \ge \sigma|VG| \\ \text{для некоторого } \sigma > 1/2,\end{matrix} \implies \begin{matrix}\text{то граф } G \text{ является } \gamma\text{-перемешивающим} \\ \text{для некоторого } \gamma = \gamma(\sigma) > 0.\end{matrix}$$

Пример 1. *Пусть K_n и $\tilde{K}_n$ — два полных графа с n вершинами. Определим $G_n^{(1)}$ следующим образом:*

$$VG_n^{(1)} = VK_n \cup V\tilde{K}_n,$$
$$EG_n^{(1)} = EK_n \cup E\tilde{K}_n \cup E^+,$$
$$\text{где } E^+ = \{\{v_i, \tilde{v}_i\},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Для $G = G_n^{(1)}$ имеем, что для всех $j = 1, \ldots, 2n$

$$d_j = n + 1 > \frac{1}{2}|VG_n^{(1)}|,$$

однако

$$\frac{i(G_n^{(1)})}{n} \leq \frac{|E^+|}{n|VK_n|} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому семейство $\{G_n^{(1)}\}$ не удовлетворяет свойству 2 (и, следовательно, свойствам 1, 3). Кроме того, отметим, что это семейство графов имеет также большую вершинную и реберную связность.

Пример 2. *Пусть K_n — полный граф с n вершинами. Определим $G_n^{(2)}$ следующим образом:*

$$VG_n^{(2)} = VK_n \cup \{v_{n+1}\},$$
$$EG_n^{(2)} = EK_n \cup \{v_n, v_{n+1}\}.$$

Для $G = G_n^{(2)}$ имеем, что $\min\limits_j d_j = 1$, однако спектральный зазор $1 - \chi_2(G_n^{(2)}) \geq 1/2$ при $n \geq 2$. Примеры 1 и 2 показывают, в частности, что оба условия свойства 3 являются существенными.

Пример 3. *Пусть G^0 — связный простой граф с $m > 1$ вершинами. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — некоторые натуральные числа. Определим $G_n^{(3)}$ следующим образом:*

$$VG_n^{(3)} = \{v_j^i : \ i = 1, \ldots, nc_j, \ j = 1, \ldots, m\},$$
$$\{v_{j_1}^{i_1}, v_{j_2}^{i_2}\} \in EG_n^{(3)} \iff \{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in EG^0.$$

Оценим константу Чигера (изопериметрическое число) $i(G_n^{(3)})$. Пусть

$$c_0 = \min_{1 \leq j \leq m} c_j, \quad C = \sum_{j=1}^{m} c_j \ .$$

Заметим, что

$$\text{степень каждой вершины } VG_n^{(3)} \text{ не менее } c_0 n \tag{29a}$$

и

$$|VG_n^{(3)}| = Cn. \tag{29b}$$

Пусть $A \subset VG_n^{(3)}$, $|A| \leq Cn/2$.

- Случай 1. $|A| \leq c_0 n/2$. Используя (29), находим, что

$$|\delta A| \geq c_0 n|A| - |A|^2 \geq \frac{c_0 n}{2}|A| = \frac{c_0|VG_n^{(3)}|}{2C}|A|. \tag{30}$$

- Случай 2. $|A| > c_0 n/2$. Пусть $V_1, V_2 \subset VG_0$ такие, что

$$v_j \in V_1 \iff |\left\{v_j^i : v_j^i \in A\right\}| \geq \frac{c_0 n}{2m},$$
$$v_j \in V_2 \iff |\left\{v_j^i : v_j^i \notin A\right\}| \geq \frac{c_j n}{2}.$$

Используя $c_0 n/2 < |A| \leq Cn/2$, находим, что

$$V_1 \cup V_2 = VG_0, \quad |V_1| > 0, \quad |V_2| > 0.$$

Так как G^0 — связный, мы можем найти $v_{j_1} \in V_1$, $v_{j_2} \in V_2$ такие, что $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in EG_0$. Оценивая число ребер в ∂A, соответствующих этим вершинам, получаем, что

$$|\delta A| \geq \frac{c_0 c_{j_2} n^2}{4m} \geq \frac{c_0^2 n}{2mC}|A| = \frac{c_0^2|VG_n^{(3)}|}{2mC^2}|A|. \tag{31}$$

Комбинируя (30), (31) и теорему 1, получаем, что семейство $\left\{VG_n^{(3)}\right\}$ удовлетворяет свойствам 1–3 с $\gamma > 0$, зависящим только от G_0, $c_1, \ldots, c_m$.

Отметим также, что пример 3 может быть модифицирован таким образом, что константы $c_1, \ldots, c_m > 0$ необязательно являются натуральными числами. Мы предположили это только для простоты доказательства.

Замечание 1. *Комбинируя (5), теорему 1 и пример 3, можно доказать свойства 1–3 для большого числа классических примеров (включая семейства $\{K_n\}$, $\{K_{n,n}\}$ и множество других).*

5. Асимптотические оценки для γ-перемешивающих графов

Эйлерова ориентация графа G — такая ориентация его ребер, что для любой вершины число входящих ребер и выходящих ребер одинаково. Обозначим $EO(G)$ — число эйлеровых ориентаций. эйлеровы ориентации полного графа K_n называются регулярными турнирами.

Эйлеров цикл в графе G — замкнутый путь, который использует каждое ребро G ровно один раз. Обозначим $EC(G)$ — число различных эйлеровых циклов с точностью до циклического сдвига.

Известно, что $EO(G) = EC(G) = 0$, если степень хотя бы одной вершины графа G нечетная (для дополнительной информации см., например, [1]). В этом разделе мы везде предполагаем, что все вершины графа имеют четную степень.

Рассматрим две задачи перечисления: подсчет числа эйлеровых ориентаций и подсчет числа эйлеровых циклов в неориентированном простом графе. Известно, что обе эти задачи являются полными для класса $\#P$, см. [2], [10].

Результаты, представленные в этой секции, основаны на оценках из [4], [5]. Доказательства можно найти в препринтах [e-print: hal-00730657] и [e-print: hal-00739760], планируемых для публикации в ближайшее время.

5.1. Эйлеровы ориентации

Известно, что задача подсчета числа эйлеровых ориентаций может быть сведена к подсчету числа полных паросочетаний такого класса двудольных графов, для которых это может быть сделано приближено с большой вероятностью за полиномиальное время, см. [10]. Однако степень соответствующего полинома большая, и поэтому, в действительности, эти алгоритмы имеют большое время работы при уровне относительной погрешности $O(n^{-1/2})$.

Для γ-перемешивающих графов верна следующая асимптотическая формула.

Утверждение 1. *Пусть G — неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, имеющими четную степень. Пусть G также является γ-перемешивающим графом для некоторого $\gamma > 0$. Тогда*

$$\begin{gathered}EO(G) = (1+\delta(G))\left(2^{|EG|+\frac{n-1}{2}}\pi^{-\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t(G)}}\prod_{\{v_j,v_k\}\in EG} P_{jk}\right),\\ P_{jk} = 1 - \frac{1}{4(d_j+1)^2} - \frac{1}{2(d_j+1)(d_k+1)} - \frac{1}{4(d_k+1)^2},\end{gathered} \tag{32}$$

где d_j обозначает степень вершины v_j, $t(G)$ — число остовных деревьев графа G, и для любого $\varepsilon > 0$

$$|\delta(G)| \le Cn^{-1/2+\varepsilon},$$

где константа $C > 0$ зависит только от γ и ε.

Замечание 2. *Отметим, что согласно теореме Кирхгофа (матричной теореме о деревьях), см.* [8], *имеем, что*

$$t(G) = \frac{1}{n}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n = \det M_{11},$$

где M_{11} *— минор матрицы* Q*, получающийся посредством удаления первой строки и первого столбца.*

Замечание 3. *Для полного графа* $\lambda_2(K_n) = n$*,* $EK_n = \frac{n(n-1)}{2}$*,* $t(K_n) = n^{n-2}$*,*

$$\prod_{\{v_j,v_k\}\in EK_n} P_{jk} = \left(1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= \left(e^{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{-1/2} + O(n^{-1}).$$

Результат утверждения 1 для этого случая сводится к результату из [12] *о подсчете числа регулярных турниров в полном графе.*

Подробное доказательство утверждения 1 приведено в препринте [e-print: hal-00730657]. В настоящей работе мы только проводим сравнение ответов, полученных с помощью формулы (32) с точными значениями для маленьких графов. Пусть

$$Error(G) = \frac{EO_{approx}(G) - EO(G)}{EO(G)},$$

где $EO_{approx}(G)$ соответствует правой части (32). Следующие графики (см. рис. 1) демонстрируют зависимость $Error(G)$ от отношения $\lambda_2(G)/n$, где $\lambda_2(G)$ — алгебраическая связность и $n = |VG| = 6, 7, 8, 9$:

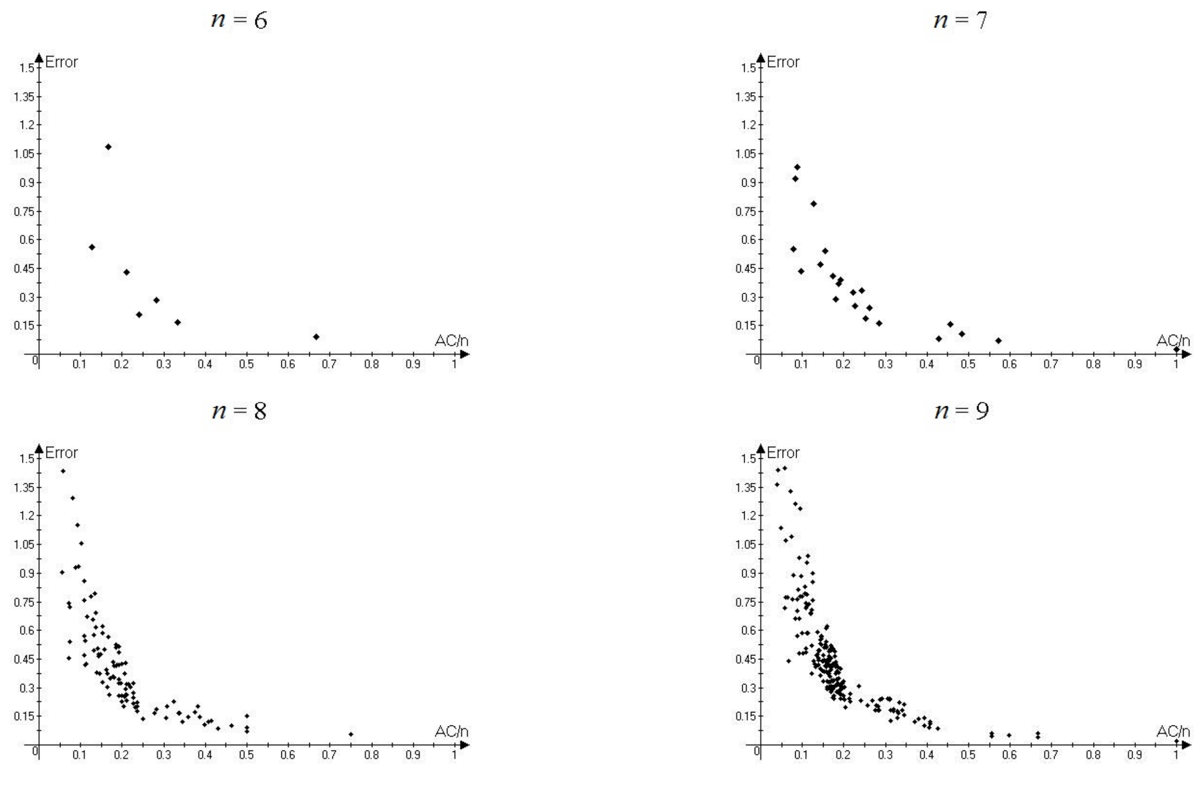

Рис. 1. Зависимость $Error(G)$ от отношения $\lambda_2(G)/n$

Графики из рис. 1 показывают, в частности, что $Error$ значительно убывает при возрастании $\lambda_2(G)/n$.

5.2. Эйлеровы циклы

В отличие от эйлеровых ориентаций даже приближенные и вероятностные эффективные алгоритмы для подсчета числа эйлеровых циклов в общем случае до сих пор не были получены в литературе и известны только для специальных классов графов, обладающих невысокой плотностью, см. [3] и [15]. Тем не менее, для γ-перемешивающих графов верна асимптотическая формула для $EC(G)$, аналогичная (32). Это формула немного более сложная, поэтому нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$W = \hat{Q}^{-1} = (Q + J)^{-1},$$

где Q — матрица Лапласа и J обозначает матрицу, все элементы которой равны 1. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\alpha_j = W_{jj}.$$

Пусть $\vec{\beta} = Q\vec{\alpha}$ и

$$C_1 = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} \beta_j W_{jk} \beta_k\right), \tag{33}$$

$$C_2 = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{2(d_j+1)}\right), \tag{34}$$

где d_j — степень вершины $v_j \in VG$. Пусть

$$R(\vec{\theta}) = \mathrm{tr}(\Lambda(\vec{\theta}) W \Lambda(\vec{\theta}) W),$$

где $\mathrm{tr}(\cdot)$ — след матрицы, $\Lambda(\vec{\theta})$ обозначает диагональную матрицу с элементами на диагонали, равными компонентам вектора $Q\vec{\theta}$. Пусть $\vec{e}^{(k)} = (e_1^{(k)}, \ldots, e_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ такое, что $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Пусть $r_k = R(\vec{e}^{(k)})$,

$$C_3 = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{2(d_j+1)}\right). \tag{35}$$

Наконец, пусть

$$C_4 = \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} P_{jk}, \tag{36}$$

где P_{jk} такое же, как и в (32).

Утверждение 2. *Пусть G — неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, имеющими четную степень. Пусть G также является γ-перемешивающим графом для некоторого $\gamma > 0$. Тогда*

$$EC(G) = \left(1 + \delta'(G)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d_j}{2} - 1\right)!\, 2^{|EG| - \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{t(G)}\, C_1 C_2 C_3 C_4\right), \tag{37}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 определены в (33), (34), (35), (36) соответственно, d_j обозначает степень вершины v_j, $t(G)$ — число остовных деревьев G, и для любого $\varepsilon > 0$

$$|\delta'(G)| \le C' n^{-1/2+\varepsilon},$$

где константа $C' > 0$ зависит только от γ и ε.

Замечание 4. *Можно получить для случая $G = K_n$, что*

$$C_1C_2C_3C_4 = 1 + O(n^{-1}).$$

Используя замечание 3 и формулу Стирлинга для факториалов, результат из утверждения 2 для этого случая может быть сведен к результату из [11] *о подсчете числа эйлеровых циклов в полном графе.*

Подробное доказательство утверждения 2 приведено в препринте [e-print: hal-00739760]. В настоящей работе мы только проводим сравнение ответов, полученных с помощью формулы (37), с точными значениями для маленьких графов. Пусть

$$Error'(G) = \frac{EC_{approx}(G) - EC(G)}{EC(G)},$$

где $EC_{approx}(G)$ соответствует правой части (37). Следующие графики (см. рис. 2) демонстрируют зависимость $Error'(G)$ от отношения $\lambda_2(G)/n$, где $\lambda_2(G)$ — алгебраическая связность и $n = |VG| = 6, 7, 8, 9$:

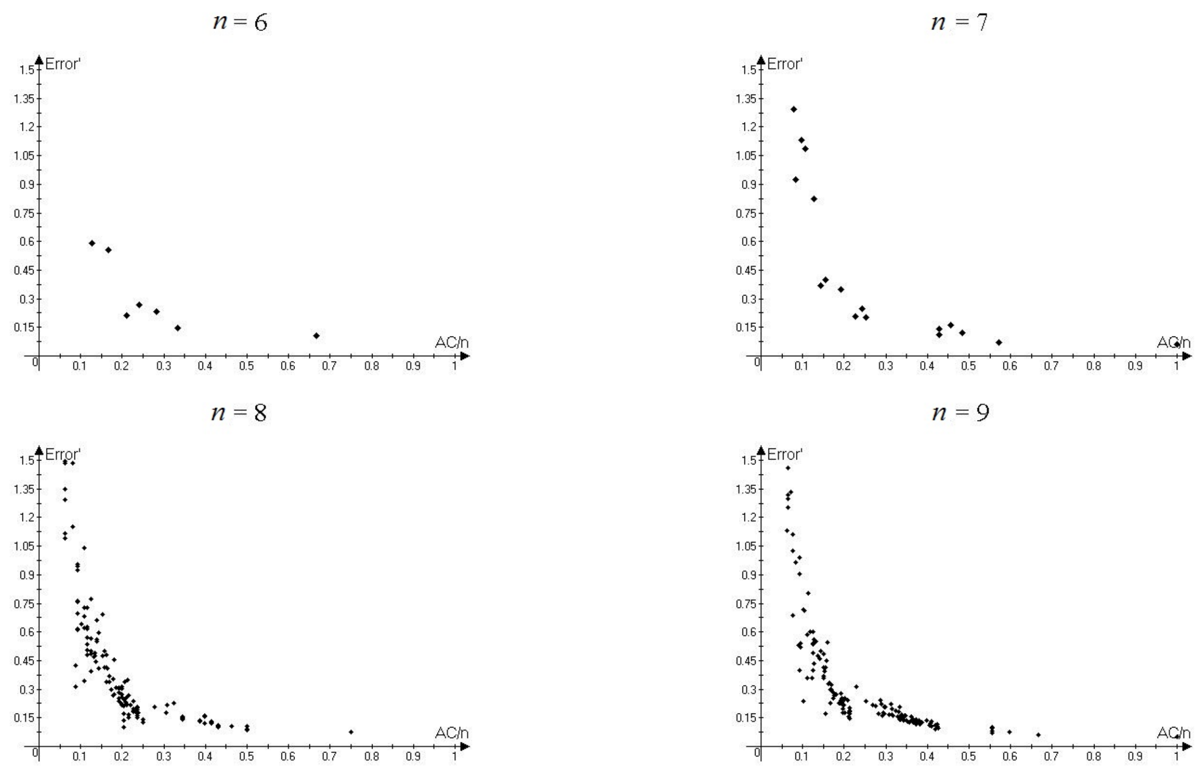

Рис. 2. Зависимость $Error'(G)$ от отношения $\lambda_2(G)/n$

Графики из рис. 2 показывают, в частности, что $Error'$ значительно убывает при возрастании $\lambda_2(G)/n$.

Литература

1. *Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J.* Graph Theory // Clarendon Press, Oxford. — 1976. — P. 1736–1936.

2. *Brightwell G., Winkler P.* Note on Counting Eulerian Circuits // Proceedings of the 7th ALENEX and 2nd ANALCO 2005, ALENEX/ANALCO 2005. Vancouver, BC, C Demetrescu. R. Sedgewick and R. Tamassia (eds.). — 2005. — P. 259–262. — e-print: arXiv:cs/0405067.

3. *P. Chebulu, M. Cryan, R. Martin,* Exact counting of Euler tours for generalized series-parallel graphs // Journal of Discrete Algorithms. — 2012. — V. 10. — P. 110–122.

4. *Isaev M.I.* Asymptotic behaviour of the number of Eulerian circuits // Electronic Journal of Combinatorics. — 2011. — V. 18(1). — P. 219.

5. *Исаев М.И.* Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций в графах // Математические заметки. — 2013. — Т. 93. — В. 6. — С. 828–843.

6. *Fiedler M.* Algebraic connectivity of graphs // Czech. Math. J. — 1973. — V. 23(98). — P. 298–305.

7. *Fiedler M.* Laplacian of graphs and algebraic connectivity // Combinatorics and Graph Theory. — 1989. — V. 25. — P. 57–70.

8. *Kirchhoff G.* Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. Chem. — 1847. — V. 72. — P. 497–508 / Translated by J. B. O'Toole in I.R.E. Trans. Circuit Theory, CT-5. — 1958. — V. 4.

9. *Lovasz L.* Random walks on graphs: A survey // Combinatorics, Paul Erdös is eighty. — 1993. — V. 2. — P. 1–46.

10. *Mihail M., Winkler P.* On the number of Eulerian orientations of a graph // Algorithmica. — 1996. — V. 16. — P. 402–414.

11. *McKay B.D., Robinson R.W.* Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph // Combinatorics, Probability and Computing. — 1998. — V. 7(4). — P. 437–449.

12. *McKay B.D.* The asymptotic numbers of regular tournaments, eulirian digraphs and eulirian oriented graphs // Combinatorica. — 1990. — V. 10(4). — P. 367–377.

13. *Mohar B.* Isoperimetric numbers of graphs // J. Combin. Theory Ser. B. —1989. — V. 47. — P. 274–291.

14. *Mohar B.* The Laplacian spectrum of graphs // Graph Theory, Combinatorics, and Applications. — 1991. — V. 2 / Ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk. — P. 871–898.

15. *P. Tetali, S. Vempala*, Random sampling of Euler tours // Algorithmica. — 2001. — V. 30. — P. 376–385.

Поступила в редакцию 09.10.2012.