

М.Л. Бланк

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Синхронно обновляемые процессы с запретами в моделях транспортных потоков

Изучено несколько простых моделей транспортных потоков в виде процессов с запретами (как решеточных, так и с непрерывным пространством) и получены явные формулы для некоторых связанных с ними статистик. В частности, получена так называемая фундаментальная диаграмма, выражающая зависимость средней скорости движения от плотности частиц.

Ключевые слова: процессы с запретами, транспортные потоки, системы взаимодействующих частиц, каплинг.

I. Введение

Одним из естественных способов математического моделирования транспортных потоков представляется их реализация в виде процессов с запретами (Exclusion Processes). Последние представляют собой системы частиц, совершающих случайные блуждания и взаимодействующих по закону «исключенного объема» (hard core). Впервые простейшую решеточную модель этого типа предложил Ф. Спитцер в 1970 г., и с тех пор подобные, на первый взгляд примитивные, модели нашли весьма широкое применение в самых различных областях, начиная с моделей транспортных потоков [2, 3, 10, 12, 16], синтеза протеинов и молекулярных моторов в биологии, роста случайных поверхностей в физике (см. [7, 17]) и до анализа диаграмм Юнга в теории представлений [9].

Качественно, с точки зрения порядка взаимодействий частиц имеются два типа процессов с запретами: асинхронные и синхронные. В первом случае не более одной частицы может сдвинуться в данный момент времени, а во втором все частицы двигаются одновременно. Последний вариант приводит к необходимости анализа кратных одновременных взаимодействий, однако с точки зрения приложений представляется более естественным.

В работе будет изучено несколько простых моделей транспортных потоков этого типа (как решеточных, так и с непрерывным пространством) и получены явные формулы для некоторых связанных с ними статистик. В частности, будет получена так называемая фундаментальная диаграмма, выражающая зависимость средней скорости движения от плотности частиц. Читатель может найти серьезные обзоры по «физическим» постановкам задач по этой тематике в [8, 12].

Мой собственный интерес к такого рода задачам возник в связи со следующим практическим наблюдением. Иногда быстрее идти против движения в медленно двигающейся толпе людей (напри-

мер, в переходе метро), чем по движению. Стандартная вероятностная модель диффузии частицы по или против потока явно противоречит этому наблюдению, что указывает на специальную (неслучайную) внутреннюю структуру потока в рассматриваемом случае. Одной из целей настоящей работы является обсуждение того, как подобная структура возникает из произвольных (случайных) начальных конфигураций частиц.

Мы начнем исследование с простейшей детерминированной модели на целочисленной решетке (описанной в разделе 2). Эта модель может быть полностью изучена элементарными средствами, и мы приводим ее в основном в педагогических целях. Однако даже в рамках этой модели отбрасывание условия регулярности начальной конфигурации частиц приводит к необходимости значительно более сложного математического анализа (см. [2, 3]). В дальнейшем оказалось, что с точки зрения математики проще изучать на первый взгляд значительно более сложную модель – процесс с запретами в непрерывном пространстве. В разделе 3 мы опишем эту модель и покажем, что ее ограничение на множество конфигураций, расположенных в целочисленных точках, инвариантно. Поэтому все полученные результаты применимы также к модели с дискретным пространством.

Все известные подходы к анализу решеточных систем существенно используют комбинаторную структуру пространства конфигураций частиц (отметим, например, идею двойственности частица–пустая позиция, используемую в разделе 2). Никаких аналогов подобных комбинаторных структур в непрерывном пространстве нет, что приводит к необходимости разработки фундаментально нового подхода.

Процессы с запретами в непрерывном пространстве новы не только как модели транспортных потоков, но и с чисто математической точки зрения. Первые результаты на эту тему были получены недавно в [5], где была разработана оригинальная техника, позволяющая изучать эргодиче-

ские (статистические) свойства таких процессов. Главной технической новинкой здесь является метод динамического каплинга (описанный в разделе 6). Отметим, что этот метод не только нов, но и используется нестандартно: вместо доказательства (обычного в теории каплинга) существования «успешного склеивания» (которого может и не быть в наших условиях) мы используем его наличие или отсутствие в качестве диагностического средства.

II. Простейшая модель на целочисленной решетке

Начнем с простейшей одномерной модели транспортного потока, введенной в [16]. Эта модель описывается следующей динамической системой с дискретным временем и дискретным фазовым пространством – целочисленной решеткой \mathbb{Z} , на которой расположены частицы. В следующий момент времени каждая частица либо передвигается вперед на одну позицию, если она свободна, либо остается на месте в противном случае. В случае конечной решетки с периодическими граничными условиями анализу (в основном численному) этой модели и некоторых ее обобщений в последнее время было посвящено большое число публикаций (см. [8, 10–12, 15, 16] и дальнейшие ссылки в них). Наиболее интересным явлением, обнаруженным в этих работах, является нетривиальная зависимость средней скорости движения частиц от их плотности $V(\rho)$, равная 1 при $\rho \in [0, 1/2]$ и $\frac{1}{\rho} - 1$ при $\rho \in (1/2, 1]$. Ниже мы выведем этот результат при помощи техники двойственных отображений для произвольных конечных и бесконечных решеток и начальных конфигураций. Кроме того, мы дадим полное описание предельных множеств (соответствующих стационарным транспортным потокам) и точную оценку длины переходного периода. Физическая интерпретация описанного результата – это наличие фазового перехода «газ–жидкость» от свободного движения частиц (при малой плотности) к постоянному наличию транспортных пробок (при большой плотности).

С точки зрения теории динамических систем описанная выше модель может быть представлена следующим образом. Пусть $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ – множество всех возможных конфигураций – бинарных последовательностей $x = x(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, единицы в которой соответствуют частицам, а нули – занятым позициям на решетке. Рассмотрим отображение $T : X \rightarrow X$:

$$Tx(i) := \begin{cases} 1, & \text{если } x(i) = 0, \\ & x(i-1) = 1 \text{ или } x(i) = x(i+1) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Группу из (более одной) последовательно стоящих частиц мы назовем кластером; а частицу в позиции i (т.е. $x(i) = 1$), позиция после которой не

занята (т.е. $x(i+1) = 0$), назовем свободной. Будем называть конфигурацию $x \in X$ регулярной, если имеются число $\rho = \rho(X)$ (плотность частиц) и монотонная функция $\varphi(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, такие, что для любого N число частиц с координатами от $n+1$ до $n+N$ отличается от $N\rho$ не более чем на $N\varphi(N)$ для любого n . Заметим, что конфигурация на конечной решетке длины n с периодическими граничными условиями соответствует n -периодической конфигурации на бесконечной решетке, которая удовлетворяет условию регулярности с $\varphi(N) = n\rho(1-\rho)/N$. Под средней (по пространству) скоростью (частиц) $V(x)$ понимается среднее значение (если оно корректно определено) перемещения частиц в конфигурации x во время следующей итерации отображения T . Отметим, что в разделе 4 будет введено и изучено более тонкое понятие средней скорости индивидуальной частицы.

Теорема 1. Для любой регулярной начальной конфигурации $x \in X$ с плотностью $\rho \neq 1/2$ через не более чем $t_c(x) = \frac{1}{2}\varphi^{-1}(|\frac{1}{2} - \rho(x)|)$ итераций отображения T средняя скорость станет равна $V = \min(1, \frac{1}{\rho} - 1)$, и при любом $t \geq t_c(x)$ выполняется следующая альтернатива: конфигурация $T^t x$ состоит либо только из свободных частиц, либо не имеет кластеров незанятых позиций. Более того, при $\forall n$ для n -периодических начальных конфигураций ограничение $\rho \neq 1/2$ снимается, для $t_c(x)$ справедлива лучшая оценка $t_c(x) = \min(\rho(x)N, N - \rho(x)N)$, и при $t \geq t_c(x)$ последовательность $\{T^t x\}_t$ становится n -периодической по t .

Доказательство этой теоремы и ряда других результатов настоящей работы основано на идее введения двойственной динамической системы (T^*, X^*) , описывающей динамику незанятых позиций на решетке под действием основного отображения T . Здесь для конфигурации $x \in X$ двойственная конфигурация x^* определяется соотношением $x_i^* = 1 - x_i$ для всех i . Можно показать, что $(Tx)^* = T^* x^*$ при всех $x \in X$. Для рассматриваемой модели отображение T^* отличается от T только направлением движения частиц, что сводит анализ к конфигурациям низкой плотности $\rho \in [0, 1/2]$, поскольку большая плотность соответствует плотности незанятых позиций меньшей $1/2$. Это наблюдение резко упрощает задачу, поскольку динамика в случае высокой плотности частиц нетривиальна и трудно поддается непосредственному анализу. Далее, показывая, что длина любого кластера частиц не может возрастать (т.е. в этой модели не могут возникать транспортные пробки), а число свободных частиц убывать, мы приходим к описанной в формулировке теоремы альтернативе, что и приводит к требуемым оценкам.

Рассмотрим теперь модель движения со сверхбыстрыми частицами, отличающуюся от предыду-

щей тем, что на каждом шагу частица сдвигается вперед до следующей занятой позиции.

Теорема 2. Для любой начальной конфигурации x , удовлетворяющей закону больших чисел с плотностью $\rho(x) \notin \{0,1\}$, средняя скорость частиц не зависит от времени и равна $\frac{1}{\rho(x)} - 1$.

Качественно динамика этой модели богаче, чем в модели с медленными частицами, например, транспортные пробки типичны даже для конфигураций малой плотности. С другой стороны, несмотря на это, средняя скорость движения частиц $V(\rho)$ для этой модели совпадает с предыдущим случаем при высокой плотности и аналитически продолжает ее при малой плотности.

Сделаем несколько замечаний о простейших обобщениях и приложениях описанных моделей. Во-первых, часто рассматривается вероятностная постановка, при которой частица переходит на незанятую позицию с заданной вероятностью p (случай $p = 1$ возвращает нас к описанной детерминированной задаче). Как показывает численный анализ и качественные рассуждения (см. [8, 9, 15, 16]), результаты для детерминированного случая выглядят очень похоже и для стохастической версии при p , достаточно близких к 1. Полный математический анализ здесь к настоящему времени проведен только для модели движения конечного набора частиц по окружности, а не бесконечной решетке (см. [11, 12]). Частичный ответ в общем случае получен также при анализе динамики в непрерывном пространстве (см. следующий раздел и [5]).

Важным представляется вопрос о возможности описания многополосного движения в рамках процессов с запретами. Одной из возможностей здесь является изменение условия о том, что не более одной частицы может находиться в одной позиции на решетке, на условие о максимальном числе $M > 1$ частиц. В случае $M = 2$ эта модель в точности соответствует двухполосному движению, а при $M > 2$ представляет собой некоторое упрощение. Математический анализ детерминированной постановки этой задачи проведен в [2].

До сих пор мы обсуждали только модели, при которых оказывается справедливой точная зависимость между средней скоростью движения частиц и их плотностью. Как известно, экспериментальные данные показывают, что в общем случае одной плотности частиц может соответствовать целый набор средних скоростей, или последнее понятие может не быть корректно определено. Оказывается, что простые модификации рассматриваемых нами моделей демонстрируют подобное поведение (см. [3–5, 8, 9, 15]). С точки зрения фазовых переходов описанное поведение соответствует возникновению новой «гистерезисной» фазы.

Дадим теперь математическое описание наблюдения о движении пассивной быстрой части-

цы (имитирующей поведение спешащего прохожего) в медленном транспортном потоке, который мы сформулировали в начале данного раздела. Упрощая ситуацию, мы будем полагать (как обычно делают в гидродинамике), что движение нашей быстрой частицы не влияет на транспортный поток и описывается следующим образом. Положим $\tau_x^+(y) := \min(i : y < i \text{ и } x(i) = 1)$, $\tau_x^-(y) := \max(i : y > i \text{ и } x(i) = 1)$. Тогда совместная динамика T_\pm конфигурации частиц $x \in X$ и положения быстрой частицы $y \in \mathbb{Z}$ определяется косым произведением отображения T и одного из отображений τ^\pm (знак соответствует движению по/против потока), т.е. $T_\pm(x, y) := (Tx, \tau_x^\pm(y))$.

Под скоростью в момент t пассивной частицы будем понимать суммарное расстояние (со знаком), пройденное ею к этому моменту времени, деленное на t . Опираясь на полученное полное описание предельных множеств модели медленных частиц, мы получаем следующий результат.

Теорема 3. Для любой регулярной начальной конфигурации с плотностью $\rho(X) \notin \{0, 1/2, 1\}$ в случае неограниченной решетки средняя скорость быстрой частицы стремится (по t) к 1 при $\rho \leq 1/2$ и движении вперед (по потоку) и к $-\max(1, 1/\rho(x) - 1)$ при движении назад (против потока).

III. Процессы с запретами в непрерывном пространстве

Перейдем теперь к изучению более общего класса процессов с запретами в непрерывном пространстве с синхронными взаимодействиями (т.е. все частицы пытаются двигаться одновременно).

В непрерывном пространстве координатное представление конфигураций (принятое в предыдущем разделе) неудобно и вместо этого предлагается следующее. Под конфигурацией частиц $x := \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ будем понимать бесконечную (в обе стороны) последовательность действительных чисел $x_i \in \mathbb{R}$, которые можно интерпретировать как центры шаров заданного радиуса $r \geq 0$. Предполагается, что упорядочивание по индексу соответствует естественному порядку позиций центров шаров, т.е. $\dots \leq x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots$. Чтобы отметить зависимость от радиуса шара $r \geq 0$, мы используем обозначение $x(r)$ и только в предельном случае $r = 0$ не отмечаем этой зависимости, т.е. $x \equiv x(0)$. Будем говорить, что конфигурация $x(r)$ допустима, если

$$x_i(r) + r \leq x_{i+1}(r) - r \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

(соответствующие шары не пересекаются и могут только касаться), и обозначим через $X(r)$ пространство допустимых конфигураций.

Динамика в пространстве конфигураций определяется следующим образом. Начнем с тривиальной конфигурации, состоящей из единственной ча-

стицы, находящейся в момент времени $t \geq 0$ в точке $x_0^t \in \mathbb{R}$ (т.е. $x^t \equiv \{x_0^t\}$). В этом случае полагаем

$$x_0^{t+1} := x_0^t + v_0^t,$$

где $\{v_0^t\}$ – заданная последовательность (случайных) величин. Значения v_0^t естественно рассматривать как локальные скорости частицы в момент времени t . Таким образом, полученный процесс – это простое случайное блуждание в \mathbb{R} . Обобщая эту тривиальную постановку на случай бесконечной конфигурации $x(r) \in X$ и вновь интерпретируя (бесконечную в обе стороны по $i \in \mathbb{Z}$) последовательность $\{v_i^t\}_{i,t}$ как локальные скорости частиц в конфигурации $x^t(r)$ в момент t , получаем бесконечный набор случайных блужданий, ограниченных условиями сохранения порядка и законом исключенного объема (hard core exclusion rule).

Для упрощения изложения мы ограничимся только случаем неотрицательных локальных скоростей, собственно только эта ситуация осмысленна в задачах транспортного моделирования. В общем случае при анализе локальных скоростей обоих знаков определения становятся существенно сложнее, но как результаты, так и доказательства почти не изменяются (см. [5]).

Для неотрицательных локальных скоростей рассматриваемые нами запреты означают, что условие допустимости нарушается для i -й частицы в момент $t \in \mathbb{Z}_+$ тогда и только тогда, когда неравенство

$$x_i^t(r) + v_i^t + r \leq x_{i+1}^t(r) - r$$

перестает выполняться. В последнем случае мы будем говорить о конфликте между частицами i и $i+1$, для разрешения которого применяется конструкция нормализации:

$$v_i^t \rightarrow \mathcal{N}(v_i^t, x^t(r)).$$

Позиции частиц в момент времени $t+1$ вычисляются по правилу:

$$x_i^{t+1}(r) := x_i^t(r) + \mathcal{N}(v_i^t, x^t(r)) \quad \forall i.$$

Нормализация может быть проведена различными способами (что приводит к существенно разным статистическим свойствам). В настоящей работе мы рассмотрим только слабую нормализацию (другие возможности изучены в [5]), при которой в случае конфликта локальная скорость меняется так, чтобы соответствующая частица могла продвинуться вперед на максимально возможное расстояние. В терминах зазоров

$$\Delta_i(x^t) \equiv \Delta_i^t := x_{i+1}^t - x_i^t - 2r$$

между частицами в конфигурации x^t нормализация записывается следующим образом:

$$\mathcal{N}(v_i^t, x^t) := \begin{cases} v_i^t & \text{если } v_i^t \leq \Delta_i^t, \\ \Delta_i^t & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

¹Заметим, что $\{v_0^t\}$ может быть как траекторией детерминированного хаотического отображения $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, т.е. $v_0^{t+1} := v f^t(v_0^t/v)$, так и (несмотря на название) реализацией настоящей стохастической цепи Маркова.

Здесь важно отметить, что между любыми двумя конфигурациями частиц $x(r), \hat{x}(\hat{r})$ с общей последовательностью зазоров $\Delta := \{\Delta_i\}$ имеется взаимно однозначное соответствие φ :

$$\hat{x}_i(\hat{r}) = \varphi(x_i(r)) := x_i(r) - 2i(r - \hat{r}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку нормализация зависит только от зазоров между частицами, достаточно провести анализ случая частиц нулевого радиуса ($r = 0$). Статистика в общем случае $r > 0$ пересчитывается при помощи замены переменных φ . С другой стороны, полагая $r = 1/2$, $x_i^0(r) \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ и $v_i^t \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \geq 0$, мы получаем, что $x_i^t(r) \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \geq 0$. Последнее означает, что системы на целочисленной решетке инвариантны относительно введенной динамики. Поэтому наши результаты приводят к принципиально новому подходу для анализа решеточных систем. Заметим все же, что в случае $r = 0$ условие допустимости разрешает наличие произвольного (и даже бесконечного) числа частиц в одной точке пространства, что запрещено для решеточной системы.

Естественно, без специальных предположений о структуре локальных скоростей $\{v_i^t\}_{i,t}$ никакие содержательные результаты о динамике подобных систем невозможны. Будем полагать, что $v_i^t \in [0, v] \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ и выполнено одно из следующих (на первый взгляд противоположных) предположений:

- (a) $v_i^t \equiv v_0^t \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_0$ и $\exists \bar{v}(\gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \min(v_0^s, \gamma) \quad \forall \gamma > 0$ (п.н.);
- (b) $\{v_i^t\}$ являются н.о.р. (как по i , так и по t) случайными величинами.

Пересечение между множествами локальных скоростей, удовлетворяющих предположениям (a) или (b), не пусто и содержит принципиально важный случай чисто детерминированных скоростей: $v_i^t \equiv v \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_0$. Как мы покажем, свойства всех систем, удовлетворяющих условию (a), близки к чисто детерминированному случаю. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о постановке (a) как о детерминированной,¹ а о постановке (b) как о стохастической.

Заметим, что кажущаяся простейшей чисто детерминированная постановка $v_i^t \equiv v \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_0$ приводит к чрезвычайно сложной динамике частиц. Это видно, например, из того, что детерминированная динамическая система, описывающая динамику конфигураций частиц, в этом случае оказывается хаотической,

и, более того, топологическая энтропия этой системы бесконечна (теорема 6).

Обычно математический анализ систем взаимодействующих частиц начинают с изучения инвариантных распределений на них и, выбрав удачное инвариантное распределение, переходят к анализу его статистических характеристик. В нашем случае этот подход не работает. Дело в том, что у рассматриваемых нами систем может быть как бесконечно много инвариантных распределений, так и ни одного (напомним тривиальный пример одной частицы, совершающей асимметричное случайное блуждание). Несмотря на отсутствие инвариантного распределения, последний пример демонстрирует, что здесь имеется другая важная статистическая характеристика – средняя скорость движения частиц, легко вычисляемая в этом примере.

IV. Элементарные свойства

В этом разделе мы изучим вопросы, связанные с определениями понятий *плотности* и *средней скорости частиц* для процессов в непрерывном пространстве.

Под *плотностью* $\rho(x, I)$ конфигурации $x \in X$ в ограниченном сегменте $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ будем понимать число частиц из x , центры которых x_i находятся в I , деленное на длину $|I| > 0$ сегмента I . Если для любой последовательности *вложенных* ограниченных сегментов $\{I_n\}$ с $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ предел

$$\rho(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, I_n)$$

корректно определен, то этот предел назовем *плотностью* конфигурации $x \in X$. В противном случае рассматриваются верхняя и нижняя (по отношению ко всем возможным коллекциям вложенных ограниченных сегментов $\{I_n\}$) плотности частиц $\rho_{\pm}(x)$.

Замечание 1.

- (а) Если $\rho(x) < \infty$, то $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{|n-m| \rightarrow \infty} 1/\rho(x)$.
- (б) Пусть конфигурации $x(r) \in X(r)$, $r > 0$ и $x \in X$ имеют общую последовательность зазоров $\{\Delta_i\}$. Тогда $\rho_{\pm}(x(r)) = \frac{\rho_{\pm}(x)}{1+2r\rho_{\pm}(x)}$.

Лемма 1. Верхняя/нижняя плотности $\rho_{\pm}(x^t)$ инвариантны относительно динамики, т.е. $\rho_{\pm}(x^t) = \rho_{\pm}(x^{t+1}) \forall t$.

Под (средней по времени) *скоростью* i -й частицы в конфигурации $x \in X$ в момент $t > 0$ будем понимать

$$V(x, i, t) := \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathcal{N}(v_i^s, x^s) \equiv (x_i^t - x_i^0)/t.$$

Если предел

$$V(x, i) := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x, i, t)$$

корректно определен, назовем его (средней по времени) *скоростью* i -й частицы. В противном случае рассматриваются нижняя и верхняя скорости частицы $V_{\pm}(x, i)$.

Лемма 2. Для любой конфигурации $x \in X$ выполнено $|V(x, j, t) - V(x, i, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ п.н. $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Следствие 1. Нижняя и верхняя скорости i -й частицы $V_{\pm}(x, i)$ не зависят от индекса i .

Доказательство этого результата, кроме всего прочего, демонстрирует тот факт, что в детерминированной постановке зазоры между последовательными частицами не могут существенно увеличиваться. Следующее утверждение показывает, что при некоторых слабых технических предположениях (заведомо выполняемых при высокой плотности частиц) большие зазоры со временем исчезают.

Лемма 3. Пусть $x \in X$ и рассматривается только чисто детерминированная постановка (т.е. $v_i^t \equiv v$). Предположим, что $\forall i, t \exists j > t : \Delta_j(x^t) < v$. Тогда $\forall i \exists t_i < \infty : \Delta_i(x^t) < 2v \forall t \geq t_i$.

V. Эргодические свойства

Сформулируем теперь основные результаты для процессов с запретами в непрерывном пространстве.

Теорема 4. Пусть плотность $\rho(x)$ конфигурации $x \in X$ корректно определена. Тогда множество предельных точек при $t \rightarrow \infty$ последовательности $\{V(x, t)\}_{t \in \mathbb{Z}_0}$ зависит только от $\rho(x)$.

Теорема 5. Фундаментальная диаграмма в детерминированной постановке

$$V(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \min(1/\rho, v_0^s) = \begin{cases} v, & \text{если } \rho(x) \leq 1/v, \\ 1/\rho(x) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{если } v_0^t \equiv v.$$

Следствие 2. Пусть для конфигурации $x(r) \in X(r)$, $r > 0$ плотность $\rho(x(r))$ корректно определена и пусть $\forall i, t v_i^t \equiv v$. Тогда

$$V(x(r)) = \begin{cases} v, & \text{если } \rho(x) \leq \frac{1}{v+2r}, \\ 1/\rho(x(r)) - 2r & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, для версии процесса на целочисленной решетке получаем

$$V(x(1/2)) = \begin{cases} v, & \text{если } \rho(x) \leq \frac{1}{v+1}, \\ 1/\rho(x(1/2)) - 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 2. Последний результат совпадает с соответствующим утверждением о процессе на решетке, описанном в теореме 1 (см. также [2, 16]). Несмотря на это сходство, в решеточном случае имеется важное качественное отличие динамики: при высокой плотности частицы неминуемо образуют плотные кластеры (статические транспортные пробки). Доказательство же теоремы 5 в действительности показывает, что «типичное»

поведение конфигураций высокой плотности качественно отлично: они также образуют кластеры частиц (т.е. наборы последовательных частиц, расстояния между которыми строго меньше v), но эти кластеры не стоят на месте, а передвигаются с постоянной скоростью как «эшелон». Интересно отметить, что ранее был разработан целый ряд весьма сложных решеточных моделей для имитации подобного поведения.

В чисто детерминированной постановке (т.е. $v_i^t \equiv v \quad \forall i, t$) рассматриваемая система описывается детерминированным отображением $T_v : X \rightarrow X$ из пространства допустимых конфигураций в себя. Покажем, что это отображение сильно хаотическое в том смысле, что его топологическая энтропия бесконечна.² Читатель может найти детальное описание конструкций, связанных с энтропией динамической системы и ее свойств, например, в [13]. Чтобы обойти сложности, связанные с некомпактностью фазового пространства, мы определим топологическую энтропию отображения T_v (обозначение $h_{\text{top}}(T_v)$) как супремум по всем метрическим энтропиям этого отображения относительно его вероятностных инвариантных мер.

Теорема 6. Топологическая энтропия чисто детерминированного процесса с запретами в непрерывном пространстве бесконечна.

Доказательство этого результата основано на аналогичном утверждении для действия отображения сдвига $\sigma_v : X \rightarrow X$ в непрерывном пространстве:

$$(\sigma_v x)_i := x_i + v \quad i \in \mathbb{Z}, x \in X.$$

Лемма 4. Топологическая энтропия отображения сдвига σ_v в непрерывном пространстве бесконечна.

Идея здесь состоит в том, чтобы построить инвариантное подмножество пространства конфигураций X , на котором отображение σ_v изоморфно полному отображению сдвига в пространстве последовательностей со счетным алфавитом. Замечая теперь, что топологическая энтропия полного отображения сдвига в пространстве последовательностей с алфавитом из n элементов равна $\ln n$, получаем наше утверждение.

VI. Каплинг

Одной из основных технических новаций в доказательстве результатов, сформулированных в предыдущем разделе, является конструкция «динамического» каплинга.

Напомним, что под каплингом двух марковских процессов x^t и y^t , действующих на пространстве X , понимается представление этой па-

ры процессов на общем вероятностном пространстве. Иными словами, каплинг — это процесс пар (x^t, y^t) , определенный на пространстве прямого произведения $X \times X$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$P((x^t, y^t) \in A \times X) = P(x^t \in A)$$

и

$$P((x^t, y^t) \in X \times A) = P(y^t \in A),$$

т.е. проекции нового процесса пар ведут себя точно так же, как исходные процессы.

Обсудим теперь конструкцию динамического каплинга между двумя копиями x^t, \hat{x}^t рассматриваемого нами марковского процесса. Обычно при анализе систем взаимодействующих частиц на решетке с асинхронными взаимодействиями используется так называемый *равный* каплинг (см., напр., [14]). В этом случае каплинг состоит в спаривании частиц процессов x^t, \hat{x}^t , занимающих одинаковое позиции. После спаривания все выборы случайных скоростей для элементов одной пары предполагаются одинаковыми. В рассматриваемом нами случае систем с синхронными взаимодействиями этот подход не работает. Действительно, произвольное число частиц может сдвинуться одновременно, что приводит к ситуации, когда частицы, принадлежащие процессам x^t, \hat{x}^t , обгоняют друг друга, но при этом ни в какой момент времени не занимают одинаковые позиции. Более того, имеется и более важное препятствие: может оказаться, что движение только одной частицы из пары заблокировано в момент t неспаренной частицей. В результате одновременного движения всех этих частиц получаем следующую диаграмму: $\bullet^\circ \longrightarrow \circ \circ$. Как видим, старая пара уничтожается, но при равном каплинге новая пара не образуется. Здесь и далее мы используем диаграммное представление для конфигураций при каплинге: спаренные частицы обозначаются черными кружками, а неспаренные белыми, при этом верхняя строка диаграммы показывает x -частицы (т.е. частицы x -процесса), а нижняя строка соответствует \hat{x} -частицам.

Чтобы обойти это препятствие, мы и вводим *динамический*³ каплинг, описанный в [5, 6]. Отметим для сравнения идейно близкую конструкцию каплинга в [1, 11], предложенную для случая решеточных систем с асинхронными взаимодействиями. Важным преимуществом динамического каплинга по отношению к этим конструкциям является ограниченность расстояний между элементами одной пары (в конструкциях [1, 11] эти расстояния могут становиться бесконечно большими).

Под *динамическим каплингом* процессов x^t, \hat{x}^t понимается последовательное спаривание достаточно близко расположенных частиц в разных

²Обычно говорят, что отображение хаотическое, если его топологическая энтропия положительна, поэтому бесконечное значение энтропии говорит об очень высоком уровне хаотичности.

³Слово *динамический* используется для того, чтобы подчеркнуть то, что взаимное положение частиц в одной паре меняется со временем, в отличие от равного каплинга.

процессах, удовлетворяющее следующим условиям:

- (A1) В момент $t = 0$ все частицы предполагаются неспаренными. Локальные скорости взаимно спаренных частиц всегда одинаковы.
- (A2) Однажды созданная пара частиц никогда не исчезает; при этом частицы, образующие данную пару, могут меняться.
- (A3) Частица, обгоняющая под действием динамики за один шаг времени некоторые неспаренные частицы, становится спаренной с одной из них.

Согласно (A1)–(A3) частицы, принадлежащие одной паре, двигаются синхронно до тех пор, пока либо нарушается условие допустимости для одной из них (т.е. ее движение заблокировано другой частицей), либо одна из частиц в паре заменяется неспаренной частицей, принадлежащей тому же процессу. Удобно представлять результат каплинга наших процессов как «газ», состоящий из ординарных (неспаренных) частиц и «гантелей» (пар). Спаренная прежде частица (элемент гантели) может наследовать роль ординарной от одного из своих соседей. Для того чтобы удобнее отслеживать позиции неспаренных частиц, мы будем называть их x - и \acute{x} -дефектами в зависимости от процесса, к которому они принадлежат.

Практически динамический каплинг может быть реализован самыми разными способами (в частности, используя только идею обгона частиц). Чтобы продемонстрировать гибкость конструкции, мы опишем другой подход. Отметим, что в дальнейшем только свойства (A1)–(A3) используются в доказательствах.

Под x -тройкой ($\circ \bullet$ или $\bullet \circ$) в процессе пар (x^t, \acute{x}^t) понимаются две взаимно спаренные частицы и x -дефект, находящийся между ними, индекс которого отличается на единицу от индекса спаренной x -частицы. \acute{x} -тройка ($\circ \bullet$ или $\bullet \circ$) определяется аналогично.

Говорят, что две пары частиц *пересекают* друг друга, если прямые линии, соединяющие позиции частиц из одной пары, пересекаются, т.е. $\bullet \star \bullet$ (здесь взаимно спаренные частицы обозначены одинаковыми символами).

x -дефект в x_i^t вместе с ближайшим к нему⁴ \acute{x} -дефектом в \acute{x}_j^t (\circ или \bullet) назовем d -парой, если $|x_i^t - \acute{x}_j^t| < v$, эта пара дефектов не пересекается с другими взаимно спаренными частицами, и интервал (x_i^t, \acute{x}_j^t) не содержит других дефектов. Будем говорить, что d -пара (i, j) *меньше*, чем d -пара (n, m) , если $|i| < |n|$, или $i < n$ в случае $|i| = |n|$. Заметим, что ситуация $i = n$ и $j \neq m$ может произойти, в отличие от ситуации $i \neq n$ и $j = m$.

Приведем два примера. В наборе $\circ \bullet \bullet$ две первых x -частицы вместе с первой \acute{x} -частицей образуют x -тройку, несмотря на наличие дополнительной спаренной частицы в интервале между ними. С другой стороны, набор $\circ \bullet \circ$ не содержит ни троек, ни d -пар.

Пара конфигураций (x^t, \acute{x}^t) называется *правильной*, если она не содержит x - или \acute{x} -троек, d -пар и пересекающихся взаимно спаренных частиц.

Правильность пары конфигураций (x^t, \acute{x}^t) в момент t в общем случае не препятствует тому, что под действием динамики в момент $(t + 1)$ пара $(x^{t+1}, \acute{x}^{t+1})$ может оказаться неправильной. В частности, могут возникнуть тройки обоих типов и d -пары, например $\bullet \circ \bullet \rightarrow \bullet \circ$ или $\circ \circ \circ \rightarrow \circ \circ$. Здесь важно, что ввиду сохранения порядка частиц пересекающиеся взаимно спаренные частицы не могут появиться.

Лемма 5. Пусть пара конфигураций (x^t, \acute{x}^t) не имеет пересекающихся взаимно спаренных частиц. Тогда тройки одного типа не могут иметь общих элементов.

Поэтому все тройки одного типа могут быть устранены одновременно. Под *устранением* x - или \acute{x} -тройки будем понимать следующее: бывший дефект спаривается с частицей из другого процесса, а спаренная ранее частица становится неспаренной: $\circ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet$.

Устранение d -пары еще проще: дефекты «аннигилируют» друг друга, образуя спаренную пару частиц: $\circ \bullet \rightarrow \bullet \circ$. Во всех случаях позиции частиц сохраняются, а меняются только их «роли».

В результате конструкция динамического каплинга состоит из следующих шагов:

- (1) Каждая x -тройка рекурсивно устраняется: $\circ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet \circ$.
- (2) Каждая \acute{x} -тройка рекурсивно устраняется: $\bullet \circ \bullet \rightarrow \bullet \circ \circ$.
- (3) Наименьшая⁵ d -пара рекурсивно устраняется: $\circ \bullet \rightarrow \bullet \circ$.

Лемма 6. Описанная процедура каплинга корректно определена, приводит к марковскому процессу пар и удовлетворяет условиям (A1)–(A3).

Чтобы объяснить необходимость рекурсий, заметим, что пространственные сегменты, на которых расположены спаренные частицы, могут пересекаться. Поэтому устранение x - или \acute{x} -тройки может привести к созданию новой тройки того же типа:

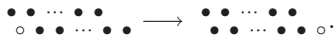
$$\circ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \circ \bullet \rightarrow \bullet \bullet \circ$$

Заметим теперь, что при рекурсиях в процедуре каплинга дефект может сдвинуться на произ-

⁴Если имеется несколько ближайших \acute{x} -дефекта, то выбирается тот, который имеет минимальный индекс.

⁵Порядок d -пар может меняться после каждой процедуры рекурсии.

вольно большое расстояние от его начальной позиции:



Обозначим через $\rho_u(x, I)$ плотность x -дефектов в конечном сегменте I , а через $\rho_u(x) := \rho_u(x, \mathbb{R})$ — верхний предел величин $\rho_u(x, I_n)$, взятый по всем возможным наборам вложенных конечных сегментов I_n , длины которых стремятся к бесконечности.

Говорят, что каплинг двух марковских процессов x^t, \acute{x}^t почти удачен, если верхняя плотность x -дефектов $\rho_u(x)$ стремится к нулю по времени почти наверное. Это определение существенно отличается от принятого определения удачного каплинга (см., напр., [14]), которое, грубо говоря, означает, что рассматриваемые процессы со временем стремятся друг к другу.

Применяя понятие почти удачного каплинга к рассматриваемым процессам с запретами, получаем следующий условный результат.

Лемма 7. Пусть $x, \acute{x} \in X$ с $\rho(x) = \rho(\acute{x}) > 0$, и предположим, что имеет место почти удачный каплинг (x^t, \acute{x}^t) , удовлетворяющий дополнительному условию о том, что расстояния между взаимно спаренными частицами равномерно ограничены сверху величиной $\gamma(t) = o(t)$. Тогда

$$|V(x, 0, t) - V(\acute{x}, 0, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

VII. Схема доказательства основных эргодических результатов

Начнем с двух технических результатов.

Лемма 8. Супремум $|W_{ij}^t| := x_i^t - \acute{x}_j^t$ по всем взаимно спаренным частицам при динамическом каплинге (см. раздел 6) процессов (x^t, \acute{x}^t) равномерно ограничен величиной v для любого $t \in \mathbb{Z}_0$.

Лемма 9. Пусть $\rho(x) = \rho(\acute{x})$ и пусть при каплинге $\forall i, j$ найдется такой (случайный) момент времени $t_{ij} < \infty$, что $x_i^t > \acute{x}_j^t$ для любого $t \geq t_{ij}$. Тогда каплинг почти успешен.

При наших предположениях (стандартный удачный каплинг⁶ может не существовать (например, в случае чисто детерминированной постановки с двумя равно распределенными начальными конфигурациями, сдвинутыми друг относительно друга). Поэтому лемма 8 не может быть применена непосредственно для сравнения скоростей частиц. Тем не менее оказывается, что это не является серьезным препятствием и даже отсутствие удачного каплинга может быть использовано в качестве диагностического средства.

Идея доказательства теоремы 4 состоит в следующем. Рассмотрим две произвольные допустимые конфигурации x, \acute{x} одинаковой плотности $\rho > 0$. Если предположить, что имеется почти удачный динамический каплинг процесса пар с

начальными условиями x, \acute{x} , то по лемме 8 выполняются условия леммы 7, откуда следует, что $|V(x, 0, t) - V(\acute{x}, 0, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Применение леммы 2 доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что нет почти удачного динамического каплинга. Определим новые случайные величины

$$W_{ij}^t := x_i^t - \acute{x}_j^t, i, j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_0.$$

Тогда

$$V(x, i, t) - V(\acute{x}, j, t) = W_{ij}^t/t - W_{ij}^0/t.$$

Согласно лемме 2 средние скорости разных частиц в одной конфигурации стремятся друг к другу со временем. Поэтому достаточно рассмотреть случай $i = j = 0$. Для W_{00}^t возможны три следующие ситуации:

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} W_{00}^t/t = 0$. Тогда $|V(x, 0, t) - V(\acute{x}, 0, t)| \leq |W_{00}^t|/t + |W_{00}^0|/t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, что по следствию 1 влечет совпадение средних скоростей.
- (b) $\limsup_{t \rightarrow \infty} W_{00}^t/t > 0$. Тогда $\forall i \in \mathbb{Z}$ i -я частица x -процесса со временем обгонит любую частицу \acute{x} -процесса, исходно расположенную правее точки x_i^0 . Это наблюдение вместе с условием равенства плотностей позволяет применить лемму 9, согласно которой каплинг почти успешен. С другой стороны, по лемме 8 расстояния между взаимно спаренными частицами не могут превысить величины v . Поэтому по лемме 7 имеем $|V(x, 0, t) - V(\acute{x}, 0, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, что противоречит предположению (b).
- (c) $\limsup_{t \rightarrow \infty} W_{00}^t/t < 0$. Меняя роли процессов x^t, \acute{x}^t , возвращаемся к случаю (b).

Поэтому только предположение (a) может иметь место.

Идея доказательства теоремы 5 состоит в построении для каждого значения плотности специального семейства конфигураций, остающегося инвариантным под действием динамики. Показывается, что для любой конфигурации из этого семейства все частицы двигаются с постоянной скоростью, которая явно вычисляется. Применяя теперь результат теоремы 4 о том, что конфигурации одинаковой плотности имеют одинаковые средние скорости, получаем требуемое утверждение.

Работа была частично поддержана грантами РФФИ.

Литература

1. Angel O. The Stationary Measure of a 2-type Totally Asymmetric Exclusion Process // J. Combin. Theory Ser. A — 2006 — V. 4. — P. 625–635.

⁶Когда почти все частицы со временем оказываются спаренными.

2. *Blank M.* Hysteresis phenomenon in deterministic traffic flows // *J. Stat. Phys.* — 2003. — V. 3-4. — P. 903-930.
3. *Blank M.* Hysteresis phenomenon in deterministic traffic flows // *J. Stat. Phys.* — 2005. — V. 3-4. — P. 627-658.
4. *Blank M.* Travelling with/against the Flow. Deterministic Diffusive Driven Systems // *J. Stat. Phys.* — 2008. — V. 4. — P. 773-796.
5. *Blank M.* Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum // *J. Stat. Phys.* — 2010. — V. 1. — P. 170-197.
6. *Blank M., Pirogov S.* On quasi successful couplings of Markov processes // *Problemy Peredachi Informacii* — 2007. — V. 4. — P. 316-330.
7. *Borodin A., Ferrari P.L., Sasamoto T.* Large time asymptotics of growth models on space-like paths II: PNG and parallel TASEP — 2007.
8. *D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider.* Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // *Physics Reports* — 2000. — V. 329. — P. 199-329.
9. *Comtet A., Majumdar S.N., Ouvry S. and Sabhapandit S.* Integer partitions and exclusion statistics: limit shapes and the largest parts of Young diagrams // *J. Stat. Mech.* — 2007.
10. *Evans M. R., Rajewsky N., Speer E. R.* Exact solution of a cellular automaton for traffic // *J. Stat. Phys.* — 1999. — V. 95. — P. 45-98.
11. *Evans M.R., Ferrari P.A., Mallick K.* Matrix representation of the stationary measure for the multispecies TASEP — 2008.
12. *Gray L., Griffeth D.* The ergodic theory of traffic jams // *J. Stat. Phys.* — 2001. — V. 3/4. — P. 413-452.
13. *Kornfeld E.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V.* Ergodic theory — M.: Nauka, 1980.
14. *Liggett T.M.* Interacting particle systems // Springer-Verlag — NY, 1985.
15. *Maerivoet S., De Moor B.* Cellular Automata Models of Road Traffic // *Physics Reports* — 2005. — V. 1. — P. 1-64.
16. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // *J. Physique I* — 1992. — V. 2. — P. 2221-2229.
17. *Penrose M.D.* Existence and spatial limit theorems for lattice and continuum particle systems // *Probab. Surveys* — 2008. — V. 5. — P. 1-36.

Поступила в редакцию 15.10.2010.