УДК 519.6

В.М. Ипатова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Аттракторы конечно-разностных схем для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами*

Рассматриваются явная и неявная конечно-разностные схемы для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами. Для каждой из схем устанавливается существование её равномерного аттрактора. Показано, что при уменьшении шага сетки аттракторы схем приближаются к истинному аттрактору системы.

Ключевые слова: аттрактор, неавтономная система, конечно-разностная схема.

Динамические системы, порождаемые диссипативными эволюционными уравнениями, и их аттракторы привлекают внимание исследователей в различных областях научных знаний. Первоначально аттракторы рассматривались только для автономных уравнений, затем это понятие было обобщено [1] и на случай неавтономных эволюционных систем. Важным для приложений является вопрос о том, насколько близки аттракторы дискретных аппроксимаций математических моделей к их истинным аттракторам. Для автономных уравнений этот вопрос был изучен в [2], где была доказана теорема о полунепрерывной зависимости от параметра аттракторов семейств полудинамических систем. В [3,4] аналогичные результаты были получены для равномерных аттракторов семейств полупроцессов, соответствующих неавтономным эволюционным уравнениям. Целью настоящей работы является исследование равномерных аттракторов конечно-разностных схем для неавтономной системы Лоренца.

I. Полупроцессы и их аттракторы

Вначале определим понятия семейств полупроцессов и их аттракторов, придерживаясь изложения, принятого в [1, 3].

Пусть E — полное метрическое пространство с метрикой $\mathrm{dist}_E(\cdot,\cdot)$; T — нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $T_+ = T \cap [0, +\infty)$ — полугруппа неотрицательных элементов из T. Например, $T_+ = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ для систем с непрерывным временем, $T_+ = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $T_+ = \mathbb{Z}_+\tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in T_+$, $t \in T_+$, $t \geqslant h$ на E определены непрерывные операторы $U(t, h) : E \to E$ такие, что $U(t, s)U(s, h) = U(t, h)\ \forall\, t, s, h \in T_+$: $t \geqslant s \geqslant h$. Тройку $\{U, T_+, E\}$ будем называть *полупроцессом.* Рассмотрим семейства операторов $U_f(t, h)$, функционально зависящие от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F — некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{U_f, T_+, E\}$. Множество всех полупроцессов $\{U_f, T_+, E\}$, таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, T_+, E, F\}$.

Множество называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, T_+, E, F\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T_+}} \sup_{f\in F} \mathrm{dist}_E(U_f(t, h)B, P) = 0 \quad \forall\, h \in T_+,$$

где $\mathrm{dist}_E(X, Y) = \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} \mathrm{dist}_E(x, y)$.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором.* Достаточные условия существования аттрактора дает следующая

Теорема 1 ([1]). Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор. □

Далее предполагается, что на F заданы операторы $T(h)$, $h \in T_+$, такие, что:
1) $T(t)T(h) = T(t + h)\ \forall\, t, h \in T_+$;
2) $T(h)F \subseteq F\ \forall\, h \in T_+$,
3) $U_f(t + h, h) = U_{T(h)f}(t, 0)\ \forall\, f \in F\ \forall\, t, h \in T_+$.

Семейство полупроцессов $\{U_f, T_+, E, F\}$ будем называть *локально равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$, любого ограниченного в E множества B и любого $t \in T_+$ найдется константа $\delta = \delta(\varepsilon, B, t) > 0$ такая, что

$$\sup_{f\in F} \mathrm{dist}_E(U_f(t, 0)u, U_f(t, 0)v) \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, u, v \in B : \mathrm{dist}_E(u, v) \leqslant \delta.$$

Имеет место

*Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Теорема 2 ([3]). Пусть ограниченное в E множество A является аттрактором локально равномерно непрерывного семейства полупроцессов $\{U_f, T_+, E, F\}$. Тогда для любого $u \in A$ и любого $t \in T_+$ найдутся последовательности $u_n \in A$ и $f_n \in F$ такие, что $U_{f_n}(t,0)u_n \to u$ при $n \to \infty$. □

Перейдем к рассмотрению семейств полупроцессов $\{U_f^d, T_+^d, E_d, F\}$, зависящих от параметра d, при этом будем предполагать, что d пробегает некоторое метрическое пространство D с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$, а E_d являются подпространствами (замкнутыми подмножествами) полного метрического пространства E.

Справедливо следующее утверждение о полунепрерывной зависимости от параметра аттракторов семейств полупроцессов.

Теорема 3 ([4]). Пусть при каждом $d \in D$ локально равномерно непрерывное семейство полупроцессов $\{U_f^d, T_+^d, E_d, F\}$ имеет компактный аттрактор A_d, d_0 — неизолированная точка D и $E_{d_0} = E$. Предположим, что:

1) для каждой сходящейся к d_0 последовательности $d_k \in D$, $d_k \neq d_0$ замыкание в E объединения по всем $k \in \mathbb{N}$ аттракторов A_{d_k} компактно;
2) если $d_k \to d_0$, то для любого элемента $t \in T_+^{d_0}$ существует сходящаяся к нему последовательность $t_k \in T_+^{d_k}$;
3) если $d_k \to d_0$, $u_k \in A_{d_k}$ и $u_k \to u_0$, $t_k \in T_+^{d_k}$ и $t_k \to t \in T_+^{d_0}$, то имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{f\in F} \mathrm{dist}_E(U_f^{d_k}(t_k,0)u_k, U_f^{d_0}(t,0)u_0) = 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\mathrm{dist}_E(A_d, A_{d_0} \leqslant \varepsilon$ при всех $d \in D$, для которых $\rho(d, d_0) \leqslant \delta$. □

Обозначим B_R и O_R — замкнутый шар и сферу радиуса R в $\mathbb{R}^n$. При исследовании разрешимости неявной схемы мы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 1 (об остром угле). Если Φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение и на сфере O_R выполняется «условие острого угла» $(\Phi(x), x) \geqslant 0$, то существует $x \in B_R$, для которого $\Phi(x) = 0$. □

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Phi(x) \neq 0$ во всех точках $x \in B_R$. В шаре B_R рассмотрим $f(x) = -R\frac{\Phi(x)}{|\Phi(x)|}$. Она непрерывна и переводит B_R в себя. По теореме Брауэра [5] существует $x \in B_R$, для которого $f(x) = x$. Так как $|f(x)| = R$, то $|x| = R$. Тогда $(x,x) = -R\dfrac{(\Phi(x),x)}{|\Phi(x)|} \leqslant 0$, что невозможно.

II. Равномерные аттракторы конечно-разностных схем для неавтономной системы Лоренца

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции $\sigma^0(t)$, $r^0(t)$, $b^0(t)$, причём существуют положительные постоянные c_k, $k = \overline{1,9}$, такие, что при всех $t \geqslant 0$ верны неравенства

$$\begin{gathered} c_1 \leqslant \sigma^0(t) \leqslant c_2, \ \left|\frac{d\sigma^0(t)}{dt}\right| \leqslant c_3, \\ c_4 \leqslant r^0(t) \leqslant c_5, \ \left|\frac{dr^0(t)}{dt}\right| \leqslant c_6, \\ c_7 \leqslant b^0(t) \leqslant c_8, \ \left|\frac{db^0(t)}{dt}\right| \leqslant c_9. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим вектор $q^0(t) = (\sigma^0(t),\, r^0(t),\, b^0(t))$ и введём множество всех его неотрицательных сдвигов по времени $Q = \bigcup\limits_{s\geqslant 0} T(s)q^0(t) = \bigcup\limits_{s\geqslant 0} q^0(t+s)$.

Рассмотрим задачу Коши для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \sigma(t)(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = r(t)x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - b(t)z, \quad t > h, \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \quad z(h) = z_0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $h \geqslant 0$ и $q(t) = (\sigma(t),\, r(t),\, b(t)) \in Q$.

Вектор $q(t) = (\sigma(t),\, r(t),\, b(t)) \in Q$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов системы уравнений (2). По теореме о продолжении решений нормальных систем решение задачи (2) определено при $\forall t \geqslant 0$. Будем его записывать как $(x(t), y(t), z(t)) = U_q(t,h)(x_0,y_0,z_0)$, $t \geqslant h$. Тем самым заданы операторы $U_q(t,h)$, обладающие свойством (1) при $\forall q \in Q$. Непрерывность $U_q(t,h)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости от начального условия решений задачи Коши. Таким образом, для каждого $q \in Q$ определён *полупроцесс* $\{U_q,\ \mathbb{R}_+,\ E\}$, где $\mathbb{R}_+ = T_+ = [0, +\infty)$ — область изменения переменной t, $E = \mathbb{R}^3$ — множество, которому принадлежат начальные состояния (x_0, y_0, z_0). Объединение этих полупроцессов по всем $q \in Q$ образует *семейство полупроцессов* $\{U_q,\, \mathbb{R}_+,\, E,\, Q\}$, порождаемое задачей (2).

Обозначим через $X = (x,y,z)$ вектор неизвестных системы (2) и запишем её в виде

$$\frac{dX}{dt} = F(X,q), \quad t > h, \quad X(h) = (x_0,y_0,z_0), \tag{3}$$

где $F(X,q) = (\sigma(y-x),\, rx - y - xz,\, xy - bz)$.

Обозначим $u = z - \sigma - r$, $Y = (x,y,u)$. В новых переменных система (2) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \sigma(t)(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = -\sigma(t)x - y - xu, \\ \frac{du}{dt} = xy - b(t)u - b(t)(\sigma(t)+r(t)) - \\ - \frac{d\sigma(t)}{dt} - \frac{dr(t)}{dt}, \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \\ u(h) = u_0 = z_0 - \sigma(h) - r(h). \end{gathered} \tag{4}$$

Умножая уравнения (4) на x, y и u соответственно, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} = \sigma(t)(yx - x^2),$$
$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dt} = -\sigma(t)xy - y^2 - xuy,$$
$$\frac{1}{2}\frac{du^2}{dt} = uxy - b(t)u^2 - b(t)u\,(\sigma(t) + r(t)) - -u\frac{d\sigma(t)}{dt} - u\frac{dr(t)}{dt}.$$

Суммируя эти уравнения, получим

$$\frac{d|Y|^2}{dt} = 2\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2 - bu(\sigma + r) - - u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right)\right). \quad (5)$$

Оценим члены в правой части (5):

$$\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2\right) \leqslant \leqslant \left(-c_1x^2 - y^2 - c_7u^2\right) \leqslant -a|Y|^2, \quad (6)$$

$$-2ub(\sigma + r) - 2u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right) \leqslant \leqslant 2|u|G \leqslant au^2 + \frac{G^2}{a}, \quad (7)$$

где $a = \min\{c_1, 1, c_7\}$, $G = c_8(c_2 + c_5) + c_3 + c_6$. Используя (5) – (7), получим

$$\frac{d|Y|^2}{dt} \leqslant -2a|Y|^2 + au^2 + \frac{G^2}{a} \leqslant -a|Y|^2 + \frac{G^2}{a}.$$

Умножив полученное соотношение на e^{at} и проинтегрировав по времени от h до $t \geqslant h$, приходим к оценке

$$|Y(t)|^2 \leqslant |Y_0|^2 e^{-a(t-h)} + \rho^2\left(1 - e^{-a(t-h)}\right), \quad (8)$$

где $Y_0 = (x_0, y_0, u_0)$, $\rho = G/a$.

Теорема 4 ([6]). Семейство полупроцессов $\{U_q,\ \mathbb{R}_+,\ E,\ Q\}$, порождаемое задачей (2), имеет аттрактор A, причем

$$|X| \leqslant \rho + c_2 + c_5 \quad \forall\, X \in A. \qquad \square\ (9)$$

Доказательство. Из (8) вытекает, что СПП, порождаемое задачей (4), имеет равномерно притягивающее множество $P = \{|Y| \leqslant \rho\}$. Поскольку $|X| \leqslant |Y| + |z - u|$, то замкнутый шар $B = \{|X| \leqslant \rho + c_2 + c_5\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{U_q,\ \mathbb{R}_+,\ E,\ Q\}$, порождаемого задачей (2). По теореме 1.1 указанное СПП имеет компактный аттрактор, причем верно (9).

II.1. Аттрактор неявной схемы

Пусть $\tau > 0$ — шаг сетки по времени, $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$, $z_k = z(t_k)$ — значение приближенного решения в момент $t = t_k$. Рассмотрим неявную конечно-разностную схему для отыскания приближенного решения задачи (2):

$$\begin{gathered} \frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} = \sigma_k(y_k - x_k), \\ \frac{y_k - y_{k-1}}{\tau} = r_kx_k - y_k - x_kz_k, \\ \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} = x_ky_k - b_kz_k, \\ k = l+1, \quad l+2, \ldots, \end{gathered} \quad (10)$$

где x_l, y_l, z_l заданы, $q_k = (\sigma_k,\, r_k,\, b_k) = q(t_k)$, $q(t) = (\sigma(t),\, r(t),\, b(t)) \in Q$.

Обозначив через $u_k = z_k - \sigma_k - r_k$, запишем уравнения (10) в виде

$$\begin{gathered} \frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} = \sigma_k(y_k - x_k), \\ \frac{y_k - y_{k-1}}{\tau} = -\sigma_kx_k - y_k - x_ku_k, \\ \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = x_ky_k - b_ku_k - b_k(\sigma_k + r_k) - \\ - \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} - \frac{r_k - r_{k-1}}{\tau}, \quad k = l+1,\ \ldots \end{gathered} \quad (11)$$

Умножая уравнения (11) на x_k, y_k, u_k соответственно и суммируя результаты, получаем соотношение

$$\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2\tau} + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\tau} + \frac{y_k^2 - y_{k-1}^2}{2\tau} + + \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{2\tau} + \frac{u_k^2 - u_{k-1}^2}{2\tau} + \frac{(u_k - u_{k-1})^2}{2\tau} = = -\sigma_kx_k^2 - y_k^2 - b_ku_k^2 - u_k\left[b_k(\sigma_k + r_k) + + \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} + \frac{r_k - r_{k-1}}{\tau}\right], \quad k = l+1,\ \ldots,$$

из которого вытекает оценка

$$\frac{|Y_k|^2 - |Y_{k-1}|^2}{\tau} + a|Y_k|^2 \leqslant \frac{G^2}{a},$$

то есть $\quad |Y_k|^2 \leqslant \dfrac{|Y_{k-1}|^2}{1 + a\tau} + \rho^2\left(1 - \dfrac{1}{1 + a\tau}\right).$

Используя индукцию по k, убеждаемся, что верно неравенство

$$|Y_k|^2 \leqslant \frac{1}{(1 + a\tau)^{k-l}}|Y_l|^2 + + \left(1 - \frac{1}{(1 + a\tau)^{k-l}}\right)\rho^2, \quad k \geqslant l. \quad (12)$$

Схему (11) запишем в виде

$$\frac{Y_k - Y_{k-1}}{\tau} = V(Y_k, q_k) + \Psi_k, \quad (13)$$

где $V(Y_k, q_k) = (\sigma_k(y_k - x_k), -\sigma_k x_k - y_k - x_k u_k, x_k y_k - b_k u_k)$,

$$\Psi_k = \left(0, 0, -b_k(\sigma_k + r_k) - \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} - \frac{r_k - r_{k-1}}{\tau}\right).$$

Из (1) и (5), (6) вытекает, что при всех $q \in Q$ верны оценки

$$(V(Y_k, q_k), Y_k) \leqslant -a|Y_k|^2, \quad |\Psi_k| \leqslant G.$$

Обозначим B_R и O_R замкнутый шар и сферу радиуса R в $\mathbb{R}^3$, $H^* = \max\{|Y_l|, \rho\}$. Из (12) следует, что $|Y_k| \leqslant H^*$ при всех $k \geqslant l$.

Лемма 2. При всех $R > 0$ и всех $q \in Q$ справедливо неравенство

$$|V(Y_k, q_k)| \leqslant L(R)|Y_k| \quad \forall Y_k \in B_R, \qquad (14)$$

где $L(R) = \sqrt{1 + 3c_2^2 + c_8^2 + R^2}$. □

Доказательство. Вычислим $|V(Y_k, q_k)|^2 = \sigma_k^2(y_k - x_k)^2 + (\sigma_k x_k + y_k + x_k u_k)^2 + (x_k y_k - b_k u_k)^2 \leqslant 2\sigma_k^2(x_k^2 + y_k^2) + (\sigma_k^2 + 1 + x_k^2)(x_k^2 + y_k^2 + u_k^2) + (y_k^2 + b_k^2)(x_k^2 + u_k^2) \leqslant (3\sigma_k^2 + 1 + x_k^2 + y_k^2 + b_k^2)(x_k^2 + y_k^2 + u_k^2) \leqslant (3c_2^2 + 1 + c_8^2 + R^2)|Y_k|^2$, что и дает (14).

Теорема 5. Если $\tau L(H^*) < 1$, то решение (10) существует и единственно. □

Доказательство. Введём вектор-функцию $\Xi(Y) = Y - \tau V(Y, q_k) - Y_{k-1} - \tau\Psi_k$, тогда (11) можно записать в виде: $\Xi(Y_k) = 0$. Покажем, что $(\Xi(Y), Y) \geqslant 0 \ \forall Y \in O_{H^*}$. Действительно, если $Y \in O_{H^*}$, то

$$\begin{aligned}(\Xi(Y), Y) &= \\ &= |Y|^2 - \tau(V(Y, q_k), Y) - (Y, Y_{k-1}) - \tau(Y, \Psi_k) \geqslant \\ &\geqslant (1 + \tau a)|Y|^2 - \frac{1}{2}\left(|Y|^2 + |Y_{k-1}|^2\right) - \\ &- \frac{\tau}{2}\left(a|Y|^2 + \frac{G^2}{a}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(|Y|^2 - |Y_{k-1}|^2\right) + \frac{\tau a}{2}\left(|Y|^2 - \rho^2\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

По лемме 1.1 система (11) имеет решение, тогда (10) также имеет решение.

Если Y_k и Λ_k — два решения (11), то $Y_k - \Lambda_k = \tau(V(Y_k, q_k) - V(\Lambda_k, q_k))$, $|Y_k - \Lambda_k| \leqslant \tau L(H^*)|Y_k - \Lambda_k|$, то есть $(1 - \tau L(H^*))|Y_k - \Lambda_k| \leqslant 0$, следовательно, $Y_k = \Lambda_k$. Решение (11) единственно, значит, и решение (10) единственно.

При $\tau < 1/L(H^*)$ и $k \geqslant l$ будем записывать решение (10) как $(x_k, y_k, z_k) = U_q^\tau(t_k, t_l)(x_l, y_l, z_l)$, а решение (11) как $(x_k, y_k, u_k) = I_q^\tau(t_k, t_l)(x_l, y_l, u_l)$. Обозначим $M = \max\limits_{t \geqslant 0}\left(\sigma^0(t) + r^0(t)\right)$, $m = \min\limits_{t \geqslant 0}\left(\sigma^0(t) + r^0(t)\right)$, $\gamma = \frac{M + m}{2}$, $\Delta = \frac{M - m}{2}$, $H_0 = \sqrt{2}\rho + 2\Delta$, $\tau^0 = \frac{1}{2L(H_0)}$. При $\tau \leqslant \tau^0$ радиусы H_τ определим равенством $\tau L(H_\tau) = \frac{1}{2}$, то есть $H_\tau = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - 1 - 3c_2^2 - c_8^2}$.

Лемма 3. Для каждого $\tau \leqslant \tau^0$ существует время $T^\tau \in \mathbb{Z}_+\tau$ такое, что:

1) для любого $q \in Q$ и любого Y_l, $|Y_l| \leqslant H_\tau$, верно неравенство

$$|I_q^\tau(t_k + t_l, t_l)Y_l| \leqslant H_\tau - 2\Delta \quad \forall t_k \geqslant T^\tau; \qquad (15)$$

2) $T^\tau \to 0$ при $\tau \to 0$. □

Доказательство. Из (12) вытекает, что (15) будет выполнено, если

$$\frac{H_\tau^2 - \rho^2}{(1 + a\tau)^k} + \rho^2 \leqslant (H_\tau - 2\Delta)^2,$$

то есть $\quad (1 + a\tau)^k \geqslant \dfrac{H_\tau^2 - \rho^2}{(H_\tau - 2\Delta)^2 - \rho^2} \quad$ и

$$\frac{t_k}{\tau}\ln(1 + a\tau) \geqslant \ln\frac{H_\tau^2 - \rho^2}{(H_\tau - 2\Delta)^2 - \rho^2}.$$

Следовательно,

$$t_k \geqslant \tau\ln\left[\frac{H_\tau^2 - \rho^2}{(H_\tau - 2\Delta)^2 - \rho^2}\right] / \ln(1 + a\tau).$$

Оценим величины в правой части последнего неравенства. Поскольку $H_\tau \sim 1/(2\tau)$, $\ln(1 + a\tau) \sim a\tau$ при $\tau \to 0$, то $\tau\ln\left[\frac{H_\tau^2 - \rho^2}{(H_\tau - 2\Delta)^2 - \rho^2}\right] / \ln(1 + a\tau) \sim \frac{8\Delta\tau}{a} \to 0$. Таким образом, T^τ можно выбрать стремящимся к нулю при $\tau \to 0$.

Для $\tau \leqslant \tau^0$ введем множество $E_\tau = \left\{x, y, z : x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 \leqslant (H_\tau - \Delta)^2\right\}$, которое будем рассматривать как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^3$. Для краткости обозначим $Z = (x, y, z - \gamma)$. Если $X_l \in E_\tau$, то для соответствующего $Y_l = (x_l, y_l, z_l - \sigma_l - r_l)$ имеем оценку $|Y_l| \leqslant |Z_l| + |\sigma_l + r_l - \gamma| \leqslant H_\tau$. Пусть t_k, $t_l \in \mathbb{Z}_+T^\tau$, тогда по определению T^τ для решения (11) выполняется неравенство $|I_q^\tau(t_k, t_l)Y_l| \leqslant H_\tau - 2\Delta$, следовательно, $|Z_k| \leqslant |Y_k| + |\sigma_k + r_k - \gamma| \leqslant H_\tau - \Delta$ и $X_k = U_q^\tau(t_k, t_l)X_l \in E_\tau$. Нами показано, что при всех $q \in Q$ операторы $U_q^\tau(t_k, t_l)$, $t_k, t_l \in \mathbb{Z}_+T^\tau$, переводят E_τ в себя. Таким образом, определено СПП $\{U_q^\tau, \mathbb{Z}_+T^\tau, E_\tau, Q\}$.

Теорема 6. Если $\tau \leqslant \tau^0$, то семейство полупроцессов $\{U_q^\tau, \mathbb{Z}_+T^\tau, E_\tau, Q\}$, порождаемое схемой (10), имеет аттрактор A_τ, причем

$$x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 \leqslant (\rho + \Delta)^2 \quad \forall X \in A_\tau. \ \square \qquad (16)$$

Доказательство. Из (12) вытекает, что СПП, порождаемое схемой (11), имеет равномерно притягивающее множество $\{|Y| \leqslant \rho\}$. Поскольку $|Z| \leqslant |Y| + |\sigma + r - \gamma|$, то замкнутый шар $\{x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 \leqslant (\rho + \Delta)^2\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{U_q^\tau, \mathbb{Z}_+T^\tau, E_\tau, Q\}$. По теореме 1.1 указанное СПП имеет компактный аттрактор, причем верно (16).

Нетрудно проверить, что входящая в (3) вектор-функция $F(X, q)$ удовлетворяет в шаре

$B^0 = \{|X| \leqslant \rho + 3c_2 + 3c_5\}$ условию Липшица с некоторой константой $L_0 > 0$:

$$|F(X,q) - F(X^*,q^*)| \leqslant L_0(|X - X^*| + |q - q^*|) \quad \forall X, X^* \in B^0, \quad \forall q, q^* \in Q.$$

Далее будем обозначать через C_n различные положительные константы. Справедливо следующее утверждение о равномерной по $q \in Q$ сходимости схемы (10).

Лемма 4. Если $\tau \leqslant \tau^0$, $X^0 \in A$, $X_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \in A_\tau$, $X(t) = U_q(t,0)X^0$, $X_k = U_q^\tau(t_k,0)X_0$ с тем же $q \in Q$, $T > 0$ и $t_N = N\tau \leqslant 2T$, то верно неравенство

$$|X(T) - X_N| \leqslant c(|T - t_N| + |X^0 - X_0| + \tau), \quad (17)$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от T и констант c_k, $k = \overline{1,9}$, входящих в (1). □

Доказательство. По теореме 2.1 $|X^0| \leqslant \rho + c_2 + c_5$, тогда для соответствующего вектора $Y^0 = (x^0, y^0, w^0 - \sigma(0) - r(0))$ верна оценка $|Y^0| \leqslant \rho + 2c_2 + 2c_5$. Из (8) вытекает, что $|Y(t)| = |W_q(t,0)Y^0| \leqslant \rho + 2c_2 + 2c_5$, тогда $|X(t)| \leqslant \rho + 3c_2 + 3c_5$ при всех $t \geqslant 0$. Аналогично убеждаемся, что $|X_k| \leqslant \rho + 3c_2 + 3c_5$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (1), находим

$$|X(T) - X(s)| = \left| \int_s^T F(X(t), q(t))\,dt \right| \leqslant C_1|s - T| \quad \forall s \geqslant 0, \quad \forall q \in Q. \quad (18)$$

Обозначим $X^k = X(t_k)$. Проинтегрировав систему (3) по времени от t_{k-1} до t_k, находим, что $X^k - X^{k-1} = \tau F(X^k, q_k) + \tau\delta^k$, где $\delta^k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (F(X(t), q(t)) - F(X^k, q_k))\,dt$, $|\delta^k| \leqslant \frac{C_2 L_0}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - t)\,dt \leqslant C_3\tau$.

Для разностей $S_k = X_k - X^k$ получаем соотношение

$$S_k - S_{k-1} = \tau F(X_k, q_k) - \tau F(X^k, q_k) - \tau\delta^k,$$

следовательно, $|S_k| \leqslant |S_{k-1}| + \tau L_0|S_k| + \tau^2 C_3$,

$$|S_k| \leqslant \frac{1}{1 - \tau L_0}|S_{k-1}| + \left(\frac{1}{1 - \tau L_0} - 1\right)\tau\frac{C_3}{L_0} \leqslant \frac{1}{(1 - \tau L_0)^N}|S_0| + \left(\frac{1}{(1 - \tau L_0)^N} - 1\right)\tau\frac{C_3}{L_0},$$

где $k = \overline{1,N}$. Отсюда $|S_k| \leqslant \frac{1}{(1 - \tau L_0)^{t_N/\tau}}|S_0| + \left(\frac{1}{(1 - \tau L_0)^{t_N/\tau}} - 1\right)\tau\frac{C_3}{L_0} \leqslant C_4(|S_0| + \tau)$.

Последнее неравенство вместе с (18) приводит к (17).

Теперь покажем, что при стремлении шага τ к нулю аттрактор схемы (10) лежит в сколь угодно малой окрестности аттрактора задачи (2).

Теорема 7. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $\delta > 0$ такая, что при всех $\tau \leqslant \delta$ справедлива оценка:

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{R}^3}(A_\tau, A) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Доказательство. Рассмотрим зависящие от параметра d семейства полупроцессов $\{U_q^d, \mathbb{T}_+^d, E^d, Q\}$, в которых значениям параметра $d = \tau > 0$ соответствуют СПП $\{U_q^\tau, \mathbb{Z}_+T^\tau, E_\tau, Q\}$, порождаемые схемой (10), а значению параметра $d = 0$ соответствует СПП $\{U_q, \mathbb{R}_+, E, Q\}$, порождаемое задачей (2). На множестве параметров $D = [0, \tau^0]$ введем метрику, индуцированную из $\mathbb{R}$. Из лемм 2.2, 2.3 и теоремы 2.3 вытекает, что рассматриваемые семейства полупроцессов и точка $d_0 = 0$ находятся в условиях теоремы 1.3, что и доказывает нашу теорему.

II.2. Аттрактор явной схемы

Рассмотрим теперь явную конечно-разностную схему для отыскания приближенного решения задачи (2):

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} &= \sigma_k(y_k - x_k), \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} &= r_k x_k - y_k - x_k z_k, \\ \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} &= x_k y_k - b_k z_k, \quad k = l,\ l+1, \ldots, \end{aligned} \quad (19)$$

где x_l, y_l, z_l заданы, $q_k = (\sigma_k, r_k, b_k) = q(t_k)$, $q(t) = (\sigma(t), r(t), b(t)) \in Q$.

Решение (19) будем записывать как $(x_k, y_k, z_k) = J_q^\tau(t_k, t_l)(x_l, y_l, z_l)$, $k \geqslant l$. Обозначив $u_k = z_k - \sigma_k - r_k$, представим уравнения (19) в виде

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} &= \sigma_k(y_k - x_k), \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} &= -\sigma_k x_k - y_k - x_k u_k, \\ \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} &= x_k y_k - b_k u_k - b_k(\sigma_k + r_k) - \\ &- \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{\tau} - \frac{r_{k+1} - r_k}{\tau}, \quad k = l,\ l+1, \ \ldots \end{aligned} \quad (20)$$

Решение (20) будем записывать как $(x_k, y_k, u_k) = W_q^\tau(t_k, t_l)(x_l, y_l, z_l)$, $k \geqslant l$. Схему (20) запишем в виде $\frac{Y_{k+1} - Y_k}{\tau} = V(Y_k, q_k) + \Phi_k$, где

$$\Phi_k = \left(0, 0, -b_k(\sigma_k + r_k) - \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{\tau} - \frac{r_{k+1} - r_k}{\tau}\right).$$

Из (1) вытекает оценка $|\Phi_k| \leqslant G$. Введем следующие обозначения $\varphi(R) = \frac{a^2R^2 - G^2}{2a(G^2 + R^2L^2(R))}$, где $L(R)$ — постоянная Липшица из (14), $R_0 = \sqrt{2}\frac{G}{a}$, $\tau^* = \varphi(R_0)$, $\tau_0 = \min\{\tau^*, 1/a\}$, $\theta = \sqrt{\tau_0}L^2(R_0)$.

Так как $\tau_0 \leqslant \tau^* < a/(4L^2(R_0))$, то $\sqrt{\tau_0}\theta < a/4$. Для $\tau \leqslant \tau_0$ радиусы R_τ и ρ_τ определим равенствами

$$\sqrt{\tau}L^2(R_\tau) = \sqrt{\tau_0}L^2(R_0),$$

то есть $R_\tau = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\tau_0}L^2(R_0)}{\sqrt{\tau}} - 1 - 3c_2^2 - c_8^2}$,

$$\rho_\tau^2 = \frac{(1+2a\tau)G^2}{a(a-2L^2(R_\tau)\tau)} = \frac{(1+2a\tau)G^2}{a(a-2\theta\sqrt{\tau})}.$$

Заметим, что $\rho_\tau^2 \leqslant \dfrac{(1+2a\tau^*)G^2}{a(a-2\theta\sqrt{\tau^*})} \leqslant \dfrac{(1+2a\tau^*)G^2}{a(a-2\tau^*L^2(R_0))} = R_0^2 \leqslant R_\tau^2$ при $\tau \leqslant \tau_0$, причем $\rho_\tau \to \rho$, $R_\tau \to +\infty$ при $\tau \to +0$.

Обозначим через $\beta_\tau = 1 - a\tau + 2\tau^2L^2(R_\tau) = (1 - a\tau + 2\tau\sqrt{\tau}\theta) \in (0,1)$ при $\tau \in (0,\tau_0]$.

Теорема 8. Если $\tau \leqslant \tau_0$ и $|Y_l| \leqslant R_\tau$, то для решения (20) верна оценка:

$$|Y_k|^2 \leqslant \beta_\tau^{k-l}|Y_l|^2 + (1-\beta_\tau^{k-l})\rho_\tau^2, \quad k \geqslant l. \ \square \ (21)$$

Доказательство. Из (20) имеем

$$\begin{aligned}|Y_{k+1}|^2 &= |Y_k + \tau V(Y_k,q_k) + \tau\Phi_k|^2 = \\ &= |Y_k|^2 + 2\tau(V(Y_k,q_k),Y_k) + 2\tau(Y_k,\Phi_k) + \\ &+ \tau^2|V(Y_k,q_k)|^2 + \tau^2|\Phi_k|^2 + 2\tau^2(V(Y_k,q_k),\Phi_k).\end{aligned}$$

Предположим, что $|Y_k| \leqslant R_\tau$ и для краткости обозначим $L = L(R_\tau)$. Оценивая $(V(Y_k,q_k),Y_k) \leqslant -a|Y_k|^2$, $2|(Y_k,\Phi_k)| \leqslant a|Y_k|^2 + G^2/a$,

$$2|(V(Y_k,q_k),\Phi_k)| \leqslant |V(Y_k,q_k)|^2 + G^2, \quad |V(Y_k,q_k)| \leqslant L|Y_k|,$$

находим, что

$$|Y_{k+1}|^2 \leqslant (1 - a\tau + 2L^2\tau^2)|Y_k|^2 + \tau G^2\left(2\tau + \frac{1}{a}\right).$$

Используя введенные нами ранее обозначения, запишем последнее неравенство в виде $|Y_{k+1}|^2 \leqslant \beta_\tau|Y_k|^2 + (1-\beta_\tau)\rho_\tau^2$. Применяя индукцию по k, убеждаемся в справедливости (21).

Поскольку $\rho_\tau \to \rho$, $R_\tau \to +\infty$ при $\tau \to +0$, то существует шаг $\tau_\Delta > 0$ такой, что $R_\tau > \rho_\tau + 2\Delta$ при всех $\tau \leqslant \tau_\Delta$.

Лемма 5. Для каждого $\tau \leqslant \tau_\Delta$ существует время $t^\tau \in \mathbb{Z}_+\tau$ такое, что:

1) для любого $q \in Q$ и любого Y_l, $|Y_l| \leqslant R_\tau$ верно неравенство

$$|W_q^\tau(t_k + t_l, t_l)Y_l| \leqslant R_\tau - 2\Delta \quad \forall\, t_k \geqslant t^\tau; \quad (22)$$

2) $t^\tau \to 0$ при $\tau \to 0$. $\square$

Доказательство. Из (21) вытекает, что (22) будет выполнено, если

$$\beta_\tau^k(R_\tau^2 - \rho_\tau^2) + \rho_\tau^2 \leqslant (R_\tau - 2\Delta)^2,$$

то есть

$$\beta_\tau^k \leqslant \frac{(R_\tau - 2\Delta)^2 - \rho_\tau^2}{R_\tau^2 - \rho_\tau^2} \quad \text{и}$$

$$\frac{t_k}{\tau}\ln\beta_\tau \leqslant \ln\frac{(R_\tau - 2\Delta)^2 - \rho_\tau^2}{R_\tau^2 - \rho_\tau^2}.$$

Следовательно, $t_k \geqslant \tau\dfrac{\ln\dfrac{(R_\tau - 2\Delta)^2 - \rho_\tau^2}{R_\tau^2 - \rho_\tau^2}}{\ln\beta_\tau}$. Оценим величины в правой части последнего неравенства. Поскольку $R_\tau \sim C\tau^{-1/4}$, $\rho_\tau \sim G/a$, $\ln\beta_\tau \sim -a\tau$ при $\tau \to 0$, то

$$\tau\ln\frac{\left[\dfrac{(R_\tau - 2\Delta)^2 - \rho_\tau^2}{R_\tau^2 - \rho_\tau^2}\right]}{\ln\beta_\tau} \sim \tau\ln\frac{\left(1 - \frac{4\Delta}{R_\tau}\right)}{\ln\beta_\tau} \sim \sim \frac{4C\Delta\tau^{1/4}}{a} \to 0.$$

Таким образом, t^τ можно выбрать стремящимся к нулю при $\tau \to 0$.

Для $\tau \leqslant \tau_\Delta$ введем в рассмотрение множество $E^\tau = \{x,y,z\colon x^2+y^2+(z-\gamma)^2 \leqslant (R_\tau - \Delta)^2\}$, которое снабдим метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^3$. Как и ранее, будем обозначать $Z = (x,y,z-\gamma)$. Если $X_l \in E^\tau$, то для соответствующего $Y_l = (x_l, y_l, z_l - \sigma_l - r_l)$ имеем оценку $|Y_l| \leqslant |Z_l| + |\sigma_l + r_l - \gamma| \leqslant R_\tau$. Пусть $t_k, t_l \in \mathbb{Z}_+t^\tau$, тогда по определению t^τ для решения (20) выполняется неравенство $|W_q^\tau(t_k,t_l)Y_l| \leqslant R_\tau - 2\Delta$, следовательно, $|Z_k| \leqslant |Y_k| + |\sigma_k + r_k - \gamma| \leqslant R_\tau - \Delta$ и $X_k = J_q^\tau(t_k, t_l)X_l \in E^\tau$. Нами показано, что при всех $q \in Q$ операторы $J_q^\tau(t_k,\,t_l)$, $t_k, t_l \in \mathbb{Z}_+t^\tau$ переводят метрическое пространство E^τ в себя. Таким образом, определено СПП $\{J_q^\tau,\, \mathbb{Z}_+t^\tau,\, E^\tau,\, Q\}$.

Теорема 9. Если $\tau \leqslant \tau_\Delta$, то семейство полупроцессов $\{J_q^\tau, \mathbb{Z}_+t^\tau, E^\tau, Q\}$, порождаемое задачей (19), имеет аттрактор A^τ, причем

$$x^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 \leqslant (\rho_\tau + \Delta)^2 \quad \forall\, X \in A^\tau. \ \square \ (23)$$

Доказательство. Из (21) вытекает, что СПП, порождаемое задачей (20), имеет равномерно притягивающее множество $\{|Y| \leqslant \rho_\tau\}$. Поскольку $|Z| \leqslant |Y| + |\sigma + r - \gamma|$, то замкнутый шар $\{x^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 \leqslant (\rho_\tau + \Delta)^2\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{J_q^\tau,\, \mathbb{Z}_+t^\tau,\, E^\tau,\, Q\}$. По теореме 1.1 указанное СПП имеет компактный аттрактор, причем верно (23).

Лемма 6. Если $\tau \leqslant \tau_\Delta$, $X^0 \in A$, $X_0 \equiv (x_0,y_0,z_0) \in A^\tau$, $X(t) = U_q(t,0)X^0$, $X_k = J_q^\tau(t_k,0)X_0$ с тем же $q \in Q$, $T > 0$ и $t_N = Nt^\tau \leqslant 2T$, то верно неравенство

$$|X(T) - X_N| \leqslant \alpha(|T - t_N| + |X^0 - X_0| + \tau), \quad (24)$$

где постоянная $\alpha > 0$ зависит только от T и констант c_k, $k = \overline{1,9}$, входящих в (1). $\square$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.

Теперь покажем, что при стремлении шага τ к нулю аттрактор схемы (19) лежит в сколь угодно малой окрестности аттрактора задачи (2).

Теорема 10. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $\delta > 0$ такая, что при всех $\tau \leqslant \delta$ справедлива оценка:

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{R}^3}(A^\tau, A) \leqslant \varepsilon. \qquad \square \; (25)$$

Доказательство. Рассмотрим зависящие от параметра d семейства полупроцессов $\{U_q^d, \mathbb{T}_+^d, E^d, Q\}$, в которых значениям параметра $d = \tau > 0$ соответствуют СПП $\{J_q^\tau, \mathbb{Z}_+ t^\tau, E^\tau, Q\}$, порождаемые схемой (19), а значению параметра $d = 0$ соответствует СПП $\{U_q, \mathbb{R}_+, E, Q\}$, порождаемое задачей (2). На множестве параметров $D = [0, \tau_\Delta]$ введем метрику, индуцированную из $\mathbb{R}$. Из (23), (24) и леммы 2.4 вытекает, что рассматриваемые семейства полупроцессов и точка $d_0 = 0$ находятся в условиях теоремы 1.3, следовательно, верно (25).

III. Заключение

В работе исследованы условия и характер сходимости равномерных аттракторов конечно-разностных схем к истинному аттрактору системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами. Неявная схема формально обладает свойством глобального притяжения, однако на каждом шаге по времени она приводит к решению нелинейных алгебраических систем. Существование и единственность решения таких систем представляет собой отдельную проблему. В рассматриваемом случае мы не можем гарантировать единственность решения при произвольном начальном условии, следовательно, не можем установить существование глобального аттрактора неявной схемы. Явная разностная схема наиболее удобна для программирования, но она не обладает свойством глобального притяжения. Тем не менее удается показать, что при достаточно малых шагах дискретизации возникает локальный аттрактор схемы, область притяжения которого бесконечно расширяется при стремлении шага сетки к нулю. Дополнительные сложности были связаны с тем, что система Лоренца приводится к диссипативному виду при помощи линейной замены, в которую входят переменные коэффициенты системы. Разработанная методика исследования аттракторов может быть применена к широкому классу задач, содержащих явные функции времени.

Литература

1. *Chepyshov V.V., Vishik M.I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. – 1994. – V. 73. – P. 279–333.

2. *Капитанский Л.В., Костин И.Н.* Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, вып. 1. – С. 114–140.

3. *Ипатова В.М.* Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 6. – С. 47–56.

4. *Ипатова В.М.* Обобщение теоремы об аттракторах семейств полупроцессов // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. тр. / Моск. физ.-техн. ин-т. – М.: МФТИ, 2009. – С. 84–93.

5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.

6. *Холодов В.С.* Равномерный аттрактор, порождаемый неавтономной системой Лоренца // Альманах современной науки и образования. – 2010. – № 7(38). – С. 76–80.

Поступила в редакцию 06.10.2010