УДК 517.977.8

П. Е. Двуреченский, Г. Е. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с нефиксированным временем окончания

Разработан метод вычисления квазиоптимальных стратегий в нелинейной дифференциальной игре на нефиксированном отрезке времени с целевым множеством. В двумерном случае игровые множества достижимости вычисляются с помощью алгоритма, близкого к алгоритму построения конволюты суммы Минковского двух многоугольников. Проведены детальные оценки погрешностей алгоритма.

Ключевые слова: дифференциальная игра, оптимальная стратегия.

Основы теории дифференциальных игр с нулевой суммой заложены в работах Р. Айзекса [1], Л.С. Понтрягина [2], Н.Н. Красовского [3] и др. В настоящее время разработаны различные алгоритмы, вычисляющие цену игры и оптимальные стратегии управления [4] – [6]. Для линейных дифференциальных игр с выпуклым целевым множеством современные методы используют алгоритмы вычисления игровых множеств достижимости через опорные функции этих множеств. Если дифференциальная игра нелинейна, то игровые множества достижимости становятся невыпуклыми и аппарат опорных функций неприменим.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения квазиоптимальной (или ε-оптимальной) стратегии управления для нелинейной дифференциальной игры на нефиксированном отрезке времени с целевым множеством. Алгоритм использует конструкцию игровых множеств достижимости, похожую на конструкцию, используемую в [7]. В двумерном случае эти множества могут быть построены с помощью алгоритма, близкого к алгоритму построения суммы Минковского двух многоугольников с использованием конволюты [9] – [10]. Настоящая работа продолжает работу [8], в которой этот подход применяется для построения ε-оптимальной стратегии управления для игры на фиксированном интервале времени.

Чрезвычайно высокая вычислительная сложность алгоритмов, используемых в теории дифференциальных игр, делает актуальной задачу анализа эффективности этих алгоритмов. Для анализа эффективности алгоритмов важно оценить их погрешности. В настоящей работе получены оценки параметра ε, определяющего близость ε-оптимальной стратегии к оптимальной в зависимости от параметров дискретизации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) + b(x(t), v(t)), \tag{1}$$

где $t \in [0, \vartheta]$ – время, число ϑ определяет максимальную продолжительность игры, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, управление первого игрока $u(t)$ и второго игрока $v(t)$ подчинены ограничениям

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q. \tag{2}$$

Предполагается, что заданы компактные множества $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ и непрерывные функции $a : \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ и $b : \mathbb{R}^n \times Q \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, вектограммы $a(x, P) = \{a(x, u) : u \in P\}$,

$b(x,Q) = \{b(x,v) : v \in Q\}$ выпуклы при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть также задано компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$, которое будем называть *целевым* или *терминальным*.

Пусть задан отрезок $[t_0, t_1] \subset [0, \vartheta]$ и пусть для какой-то начальной позиции $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и каких-то измеримых управлений $u : [t_0, t_1] \to P$, $v : [t_0, t_1] \to Q$ абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ почти всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ удовлетворяет уравнению (1). Если существует момент времени $t \in [t_0, t_1]$ такой, что $x(t) \in M$, то будем говорить, что на отрезке $[t_0, t_1]$ имеет место поимка. Иначе, то есть если $x(t) \notin M$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, то будем говорить, что на отрезке $[t_0, t_1]$ имеет место уклонение. Цель первого игрока состоит в минимизации числа $\vartheta_0 \in [0, \vartheta]$ такого, что на отрезке $[0, \vartheta_0]$ обеспечена поимка. Цель второго игрока — обеспечить уклонение на отрезке $[0, \vartheta]$ или, если это невозможно, максимизировать время $\vartheta_0 \in [0, \vartheta]$ такое, что на отрезке $[0, \vartheta_0]$ обеспечено уклонение.

Расстоянием от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| . \tag{3}$$

Будем говорить, что на отрезке $[t_0, t_1] \subset [0, \vartheta]$ имеет место *ε-поимка*, если существует такой момент времени $t \in [t_0, t_1]$, что $\varrho(x(t), M) \leq \varepsilon$.

Будем предполагать, что функции $a : \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ и $b : \mathbb{R}^n \times Q \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям Липшица:

$$\begin{aligned} \|a(x_1, u_1) - a(x_2, u_2)\| \leqslant L_a^x \|x_1 - x_2\| + L_a^u \|u_1 - u_2\| \\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad u_1, u_2 \in P; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \|b(x_1, v_1) - b(x_2, v_2)\| \leqslant L_b^x \|x_1 - x_2\| + L_b^v \|v_1 - v_2\| \\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad v_1, v_2 \in Q; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\|a(x, u)\| \leqslant C_a \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P; \tag{6}$$

$$\|b(x, v)\| \leqslant C_b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in Q. \tag{7}$$

Обозначим

$$C = C_a + C_b, \quad L = L_a^x + L_b^x. \tag{8}$$

2. Стратегии и законы управления

Пусть задан отрезок $[t_0, t_1] \subset [0, \vartheta]$. Множеством $\mathcal{U}[t_0, t_1]$ *допустимых реализаций управления* первого игрока называется множество всех измеримых функций $u : [t_0, t_1] \to P$. Множеством $\mathcal{V}[t_0, t_1]$ допустимых реализаций управления второго игрока называется множество всех измеримых функций $v : [t_0, t_1] \to Q$.

Позиционной стратегией первого игрока называется произвольная функция $u^{\mathrm{str}} : \mathbb{R}^n \to P$. Пусть $T = \{\tau_i\}_{i=0}^{I}$ – разбиение отрезка $[t_0, t_1] \subset [0, \vartheta] : t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_I = t_1$. Пара (u^{str}, T), составленная из позиционной стратегии первого игрока u^{str} и разбиения T отрезка $[t_0, t_1]$, называется *законом управления* первого игрока на отрезке $[t_0, t_1]$. *Движением*, соответствующим начальному состоянию $x(t_0) = x_0$, закону управления (u^{str}, T) и допустимой реализации управления $v \in \mathcal{V}[t_0, t_1]$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, определяемую из пошагового уравнения

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u^{\mathrm{str}}(x(\tau_i))) + b(x(t), v(t)), \tag{9}$$

которое должно выполняться при почти всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ и всех $i \in \overline{0, I-1}$. При этом начальная позиция для отрезка $[\tau_0, \tau_1]$ равна x_0, а начальная позиция $x(\tau_i)$ для отрезка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ совпадает с конечной позицией $x(\tau_i)$ отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

В силу принятых предположений при заданных начальной позиции $x(t_0) = x_0$, разбиении T, позиционной стратегии первого игрока u^{str} и допустимой реализации управления $v \in \mathcal{V}[t_0, t_1]$ движение $x(\cdot)$ существует и единственно. Обозначим его следующим образом:

$$x_u^{\mathrm{mot}}(t, t_0, x_0, T, u^{\mathrm{str}}, v) = x(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]. \tag{10}$$

Аналогично определяются позиционная стратегия второго игрока v^{str} и движение $x_v^{\mathrm{mot}}(t, t_0, x_0, T, u, v^{\mathrm{str}})$, соответствующее начальной позиции $x(t_0) = x_0$, разбиению T, допустимой реализации управления первого игрока $u \in \mathcal{U}[t_0, t_1]$ и стратегии второго игрока v^{str}.

Будем говорить, что закон управления (u^{str}, T) *гарантирует ε-поимку* на отрезке $[t_0, t_1]$ для начального состояния x_0, если для любой реализации управления $v \in \mathcal{V}[t_0, t_1]$ существует момент времени $t \in [t_0, t_1]$ такой, что выполняется

$$\varrho\left(x_u^{\mathrm{mot}}(t, t_0, x_0, T, u^{\mathrm{str}}, v), M\right) \leq \varepsilon. \tag{11}$$

Закон управления (v^{str}, T) *гарантирует уклонение* на отрезке $[t_0, t_1]$ для начального состояния x_0, если для любой реализации управления $u \in \mathcal{U}[t_0, t_1]$ выполняется

$$x_v^{\mathrm{mot}}(t, t_0, x_0, T, u, v^{\mathrm{str}}) \notin M \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1]. \tag{12}$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$ и законы управления $(u^{\mathrm{str}}, T_u), (v^{\mathrm{str}}, T_v)$ первого и второго игроков на отрезке $[0, \vartheta]$. Пара законов $\left((u^{\mathrm{str}}, T_u), (v^{\mathrm{str}}, T_v)\right)$ называется *ε-оптимальной*, если для любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\varrho(x_0, M) > \varepsilon$, выполняется альтернатива:

1) существует момент времени $\vartheta_0 \in [0, \vartheta]$ такой, что закон управления (u^{str}, T_u) гарантирует ε-поимку на отрезке $[0, \vartheta_0]$, а закон управления (v^{str}, T_v) гарантирует уклонение на отрезке $[0, \vartheta_0]$, либо

2) закон управления (v^{str}, T_v) гарантирует уклонение на отрезке $[0, \vartheta]$

3. Алгоритм вычисления стратегии управления

Зафиксируем натуральное число I и рассмотрим равномерное разбиение $T = \{\tau_i\}_{i=0}^{I}$ отрезка $[0, \vartheta]$, где $\tau_i = i\tau$, $i \in \overline{0, I}$. Шаг $\tau = \vartheta / I$ разбиения T будем также называть *параметром дискретизации по времени.*

Для любого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ определим множества

$$AS = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists\, u \in P : \quad x + \tau a(x, u) \in S\}, \tag{13}$$

$$BS = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall\, v \in Q : \quad x + \tau b(x, v) \in S\}. \tag{14}$$

Таким образом, определены операторы A и B, которые будем называть *одношаговыми операторами достижимости.*

Суммой и *разностью Минковского* множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ называются соответственно множества

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}, \qquad X \overset{*}{-} Y = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x + Y \subset X\}. \tag{15}$$

Для любого числа $R > 0$ через $\mathfrak{B}_R$ обозначим замкнутый шар с центром в нуле и радиусом R: $\mathfrak{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \leqslant R\}$.

Пусть Σ – *класс аппроксимирующих множеств*, то есть подмножеств $\mathbb{R}^n$, с которыми работают алгоритмы и которые с достаточной точностью аппроксимируют игровые множества достижимости (о них речь пойдет ниже). Примером класса Σ может служить класс многоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Предположим, что построены алгоритмы, которые для каждого множества $S \in \Sigma$ с некоторыми погрешностями вычисляют множества AS, BS. Учитывая эти погрешности, будем предполагать, что реально для каждого множества $S \in \Sigma$ вычисляются множества $\tilde{A}S$, $\tilde{B}S$ класса Σ, удовлетворяющие условиям

$$A(S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}) \subset \tilde{A}S \subset A(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}), \tag{16}$$

$$B(S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) \subset \tilde{B}S \subset B(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}), \tag{17}$$

где числа ε_A, ε_B определяют погрешности этих алгоритмов. В случае, если класс Σ состоит из многоугольников в $\mathbb{R}^2$ с длиной сторон, не превосходящей h, в качестве алгоритмов вычисления множеств AS, BS для $S \in \Sigma$ могут быть использованы алгоритмы, построенные в [8]. При этом оценки их погрешностей $\varepsilon_A = 4h + L_a^x C_a \tau^2$, $\varepsilon_B = 4h + L_b^x C_b \tau^2$ останутся справедливыми для рассматриваемой здесь задачи.

Предположим, что построен алгоритм, который для любых множества $S \subset \Sigma$ и вектора $x \in \tilde{A}S$ позволяет определить вектор $\tilde{u} = \tilde{u}(x, S) \in P$ такой, что

$$x + \tau a(x, \tilde{u}) \in S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}. \tag{18}$$

Также предположим, что построен алгоритм, который для любых множества $S \subset \Sigma$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\tilde{B}S)$ позволяет определить вектор $\tilde{v} = \tilde{v}(x, S) \in Q$ такой, что

$$x + \tau b(x, \tilde{v}) \in (\mathbb{R}^n \setminus S) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_v}. \tag{19}$$

Здесь числа ε_u и ε_v определяют погрешности соответствующих алгоритмов. Для класса Σ, состоящего из многоугольников в $\mathbb{R}^2$ с длиной сторон, не превосходящей h, такие алгоритмы также построены в [8].

Зафиксируем некоторые векторы $u_* \in P$, $v_* \in Q$ и положим $\tilde{u}(x, S) = u_*$ при $x \notin \tilde{A}S$, $\tilde{v}(x, S) = v_*$ при $x \in \tilde{B}S$. Тем самым определены функции

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^n \times \Sigma \to P, \qquad \tilde{v} : \mathbb{R}^n \times \Sigma \to Q. \tag{20}$$

Обозначим

$$\Delta_u^0 = \tau^2 \left(LC + L_b^x C_a \right), \qquad \Delta_v^0 = \tau^2 \left(\frac{LC}{2} + L_a^x C_b \right), \tag{21}$$

$$\Delta_u = \Delta_u^0 + \varepsilon_B + (1 + \tau L_b^x)\varepsilon_u, \qquad \Delta_v = \Delta_v^0 + \varepsilon_A + (1 + \tau L_a^x)\varepsilon_v. \tag{22}$$

Пусть имеются алгоритмы, которые для любого множества $S \in \Sigma$ вычисляют множества $D_u S \in \Sigma$, $D_v S \in \Sigma$ такие, что

$$S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u + \varepsilon_D} \subset D_u S \subset S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u}, \qquad S + \mathfrak{B}_{\Delta_v} \subset D_v S \subset S + \mathfrak{B}_{\Delta_v + \varepsilon_D}, \tag{23}$$

где число ε_D определяет погрешность этих алгоритмов. Будем также предполагать монотонность по включению операторов D_u и D_v, то есть

$$D_u S_1 \subset D_u S_2, \qquad D_v S_1 \subset D_v S_2 \qquad \forall\ S_1, S_2 \in \Sigma : \ S_1 \subset S_2. \tag{24}$$

Зафиксируем положительное число ε.

Определим множества $M_0^u \in \Sigma$, $M_0^v \in \Sigma$ так, что

$$M + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \varepsilon_M} \subset M_0^u \subset M + \mathfrak{B}_{\varepsilon}, \tag{25}$$

$$M + \mathfrak{B}_{\tau C} \subset M_0^v \subset M + \mathfrak{B}_{\tau C + \varepsilon_M}. \tag{26}$$

Здесь число $\varepsilon_M \in (0, \varepsilon)$ определяет погрешность начальной аппроксимации.

Двигаясь в сторону увеличения индекса i и используя описанные выше алгоритмы, вычислим наборы *игровых множеств достижимости* $\{M_i^u\}_{i=0}^I$, $\{M_i^v\}_{i=0}^I$:

$$M_{i+1}^u = (\tilde{A}\tilde{B}D_u M_i^u) \cup M_i^u, \qquad i \in \overline{0, I-1}, \tag{27}$$

$$M_{i+1}^v = (\tilde{B}\tilde{A}D_v M_i^v) \cup M_i^v, \qquad i \in \overline{0, I-1}. \tag{28}$$

Отметим, что из этих определений следуют включения

$$M_i^u \subset M_{i+1}^u, \qquad M_i^v \subset M_{i+1}^v \qquad \forall\, i \in \overline{0, I-1}. \tag{29}$$

Используя функции (20) и игровые множества достижимости, определим позиционные стратегии управления. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n \setminus M_0^u$ положим

$$i(x) = \max\{i \in \overline{0, I-1} :\ x \notin M_i^u\}, \tag{30}$$

а для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus M_1^v$ обозначим

$$j(x) = \max\{j \in \overline{0, I-1} :\ x \notin M_{j+1}^v\}. \tag{31}$$

Теперь для любого $x \in \mathbb{R}^n$ определим

$$u^{\mathrm{str}}(x) = \begin{cases} u_*, & x \in M_0^u, \\ \tilde{u}\Big(x,\ \tilde{B}D_u M_{i(x)}^u\Big), & x \in \mathbb{R}^n \setminus M_0^u, \end{cases} \tag{32}$$

$$v^{\mathrm{str}}(x) = \begin{cases} v_*, & x \in M_1^v, \\ \tilde{v}\Big(x,\ \tilde{A}D_v M_{j(x)}^v\Big), & x \in \mathbb{R}^n \setminus M_1^v. \end{cases} \tag{33}$$

Определим числа

$$\Delta_0 = \Delta_u + \Delta_v + 2(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_D), \tag{34}$$

$$\varepsilon_0 = \tau(C + C_b) + 2\varepsilon_M + \Delta_u + \varepsilon_D + (\tau C_b + \Delta_0(I-1))e^{(\vartheta-\tau)L}. \tag{35}$$

Теорема 3.1. *Пусть $i \in \overline{0, I}$, $x_0 \in M_i^u$, стратегия u^{str} определена соотношением* (32). *Тогда закон управления (u^{str}, T) гарантирует ε-поимку на отрезке $[0, \tau_i]$ для начального состояния $x(0) = x_0$.*

Теорема 3.2. *Пусть $i \in \overline{0, I-1}$, $x_0 \notin M_i^v$, стратегия v^{str} определена соотношением* (33). *Тогда закон управления (v^{str}, T) гарантирует уклонение на отрезке $[0, \tau_{i+1}]$ для начального состояния $x(0) = x_0$.*

Теорема 3.3. *Пусть $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$, число τ выбрано так, что $\tau L_b^x < \frac{1}{2}$. Тогда*

$$M_i^v \subset M_i^u \quad \forall\, i \in \overline{0, I-1}. \tag{36}$$

Теорема 3.4. *Пусть стратегии $u^{\mathrm{str}}, v^{\mathrm{str}}$ определены соотношениями* (32), (33). *Пусть число $\varepsilon \geqslant \tau C + 2\varepsilon_M$ выбрано так, что выполняется условие* (36). *Тогда пара законов управления $\big((u^{\mathrm{str}}, T_u), (v^{\mathrm{str}}, T_v)\big)$ является ε-оптимальной.*

4. Доказательство теорем 3.1–3.4

Лемма 4.1. *Для любых множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\delta > 0$ операторы* (13), (14) *удовлетворяют соотношениям*

$$AS + \mathfrak{B}_\delta \subset A(S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta}), \tag{37}$$

$$BS + \mathfrak{B}_\delta \subset B(S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_b^x)\delta}). \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $x \in AS + \mathfrak{B}_\delta$. Тогда существует вектор $y \in AS$ такой, что $\|y - x\| \leqslant \delta$. В силу равенства (13) существует вектор $u \in P$ такой, что $y + \tau a(y, u) \in S$. Отсюда в силу соотношения (4) получаем включение $x + \tau a(x, u) \in S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta}$. Следовательно, $x \in A(S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta})$, что доказывает включение (37). Включение (38) доказывается аналогично. □

Лемма 4.2. *Пусть* $\tau L_b^x < 1$. *Тогда для любых множества* $S \subset \mathbb{R}^n$ *и числа* $\delta > 0$ *оператор* (14) *удовлетворяет включению*

$$BS \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\delta/(1-\tau L_b^x)} \subset B(S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_\delta).$$

Доказательство. Пусть $x \in BS \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\delta/(1-\tau L_b^x)}$. Тогда для любых $v \in Q$, $z \in \mathfrak{B}_{\delta/(1-\tau L_b^x)}$ имеем $x+z+\tau b(x+z,v) \in S$. Зафиксируем произвольные $v \in Q, y \in \mathfrak{B}_\delta$. Рассмотрим отображение $F(z) = \tau b(x,v)+y-\tau b(x+z,v)$. Так как $\tau L_b^x < 1$, то это отображение является сжимающим. Следовательно, существует его неподвижная точка $z_0 = \tau b(x,v)+y-\tau b(x+z_0,v)$. При этом $\|z_0\| = \|\tau b(x,v)+y-\tau b(x+z_0,v)\| \le \delta + \tau L_b^x \|z_0\|$, откуда получаем, что $z_0 \in \mathfrak{B}_{\delta/(1-\tau L_b^x)}$. Таким образом, получаем, что $x+\tau b(x,v)+y = x+z_0+\tau b(x+z_0,v) \in S$. Отсюда, в силу произвольности выбора $v \in Q$ и $y \in \mathfrak{B}_\delta$, следует, что $x \in B(S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_\delta)$. □

Для любых $t_0 \in [0,\vartheta], t_1 \in [t_0,\vartheta], x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}[t_0,t_1], v \in \mathcal{V}[t_0,t_1]$ обозначим

$$\chi(t,t_0,x_0,u,v) = x(t) \quad \forall\, t \in [t_0,t_1],$$

где $x : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n$ – решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = a(x(t),u(t)) + b(x(t),v(t)),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Проводя рассуждения, близкие к доказательству леммы 5.1 из [7], получаем следующую лемму.

Лемма 4.3. *Пусть заданы числа* $\tau \in (0,\vartheta), t_0 \in [0,\vartheta-\tau]$, *вектор* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $u \in \mathcal{U}[t_0,t_0+\tau], v \in \mathcal{V}[t_0,t_0+\tau]$. *Пусть*

$$x_u = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\tau} a(x_0,u(t))dt, \tag{39}$$

$$x_1 = \chi(t_0+\tau,t_0,x_0,u,v). \tag{40}$$

Тогда существует вектор $v_0 \in Q$ *такой, что вектор*

$$x_{uv} = x_u + \tau b(x_u,v_0) \tag{41}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|x_{uv} - x_1\| \le \Delta_u^0, \tag{42}$$

где число Δ_u^0 *определено равенством* (21).

Аналогичная лемма верна для векторов x_v, x_{vu}, определенных аналогично.

Лемма 4.4. *Пусть* $x_0 \in M_{i+1}^u \setminus M_i^u$, *стратегия* u^{str} *определяется соотношением* (32), $i \in \overline{0,I-1}$, $v \in \mathcal{V}[0,\tau]$, $x_1 = x_u^{\mathrm{mot}}(\tau,0,x_0,T,u^{\mathrm{str}},v)$. *Тогда* $x_1 \in M_i^u$.

Доказательство. Определим функцию $u \in \mathcal{U}[0,\tau]$ формулой

$$u(t) = u^{\mathrm{str}}(x_0) \quad \forall\, t \in [0,\tau]. \tag{43}$$

Тогда справедливо равенство (40), где $t_0 = 0$. Из включения $x_0 \in M_{i+1}^u \setminus M_i^u$ и равенства (27) получаем $x_0 \in \tilde{A}\tilde{B}D_u M_i^u$. В силу равенства (30) и включений (29) имеем $i(x_0) = i$. Отсюда и из соотношений (18), (32) следует включение $x_0+\tau a(x_0,u^{\mathrm{str}}(x_0)) \in \tilde{B}D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}$. Поэтому согласно равенству (43) получаем, что вектор x_u, определяемый формулой (39), удовлетворяет включению

$$x_u \in \tilde{B}D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}. \tag{44}$$

В силу леммы 4.3 существует вектор $v_0 \in Q$ такой, что для вектора $x_{uv} = x_u + \tau b(x_u, v_0)$ справедливо неравенство (42). Согласно включениям (17) и (38) имеем $\tilde{B} D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u} \subset B(D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u} \subset B(D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u(1+\tau L_b^x)})$. Отсюда, из определения (14) оператора B и (41), (44) получаем

$$x_{uv} = x_u + \tau b(x_u, v_0) \in D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u(1+\tau L_b^x)}.$$

Далее, учитывая (42), (22), (23), получаем

$$x_1 \in D_u M_i^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u(1+\tau L_b^x)} + \mathfrak{B}_{\Delta_u^0} \subset M_i^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_B + \varepsilon_u(1+\tau L_b^x) + \Delta_u^0} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B + \varepsilon_u(1+\tau L_b^x) + \Delta_u^0} \subset M_i^u$$

. □

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4.4, получаем следующую лемму.

Лемма 4.5. *Пусть* $x_0 \in M_{j+2}^v \setminus M_{j+1}^v$, $j \in \overline{0, I-2}$ *или* $j = I-1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M_I^v$. *Пусть стратегия* v^{str} *определяется соотношением* (33), $u \in \mathcal{U}[0,\tau]$, $x_1 = x_v^{\text{mot}}(\tau, 0, x_0, T, u, v^{\text{str}})$. *Тогда* $x_1 \notin M_j^v$.

Лемма 4.6. *Пусть* $x_0 \in M_{i+1}^u \setminus M_i^u$, *стратегия* u^{str} *определяется соотношением* (32), $i \in \overline{0, I-1}$, $v \in \mathcal{V}[0, \tau_{i+1}]$. *Тогда существует индекс* $j \in \overline{0, i+1}$ *такой, что* $x_u^{\text{mot}}(\tau_j, 0, x_0, T, u^{\text{str}}, v) \in M_0^u$.

Доказательство. Будем доказывать утверждение по индукции. При $i = 0$ утверждение верно по лемме 4.4. Зафиксируем $m \in \overline{0, I-1}$. По предположению индукции утверждение верно для всех $i \in \overline{0, m-1}$. Нужно доказать, что оно будет верным и для $i = m$. Пусть $x_0 \in M_{m+1}^u \setminus M_m^u$, $v \in \mathcal{V}[0, \tau_{m+1}]$. Требуется доказать, что

$$\exists\, j \in \overline{0, m+1} : x_u^{\text{mot}}(\tau_j, 0, x_0, T, u^{\text{str}}, v) \in M_0^u. \tag{45}$$

Обозначим $v_{[0,\tau]}$ сужение функции $v : [0, \tau_{m+1}] \to Q$ на отрезок $[0, \tau]$. Тогда по лемме 4.4 $x_1 = x_u^{\text{mot}}(\tau, 0, x_0, T, u^{\text{str}}, v_{[0,\tau]}) \in M_m^u$. Если $x_1 \in M_0^u$, то соотношение (45) выполнено при $j = 1$. Если $x_1 \notin M_0^u$, то из включений (29) следует, что существует такой номер $s \in \overline{0, m-1}$, что $x_1 \in M_{s+1}^u \setminus M_s^u$. Тогда по предположению индукции утверждение леммы выполнено для $x_0 = x_1, i = s$. То есть существует такой номер $k \in \overline{0, s+1} \subset \overline{0, m}$, что

$$x_u^{\text{mot}}(\tau_k, 0, x_1, T, u^{\text{str}}, \tilde{v}) \in M_0^u,$$

где $\tilde{v}(t) = v(t + \tau)$ для $t \in [0, \tau_k]$. Отсюда в силу отсутствия явной зависимости от времени в уравнении динамики (1) и равенства $x_1 = x_u^{\text{mot}}(\tau, 0, x_0, T, u^{\text{str}}, v_{[0,\tau]})$ получаем, что

$$x_u^{\text{mot}}(\tau_{k+1}, 0, x_0, T, u^{\text{str}}, v) \in M_0^u,$$

и соотношение (45) выполнено при $j = k+1$. □

Лемма 4.7. *Пусть* $i \in \overline{0, I-1}$, $x_0 \notin M_{i+1}^v$. *Пусть стратегия* v^{str} *определяется соотношением* (33). *Тогда для любой функции* $u \in \mathcal{U}[0,\tau]$ *выполнено соотношение* $x_v^{\text{mot}}(\tau, 0, x_0, T, u, v^{\text{str}}) \notin M_i^v$

Доказательство. Из условия $x_0 \notin M_{i+1}^v$ и включений (29) следует, что либо существует такой номер $j \in \overline{i, I-2}$, что $x_0 \in M_{j+2}^v \setminus M_{j+1}^v$, либо $x_0 \notin M_I^v$ (в этом случае положим $j = I-1$). Тогда по лемме 4.5 получаем, что

$$x_v^{\text{mot}}(\tau, 0, x_0, T, u, v^{\text{str}}) \notin M_j^v \quad \forall\, u \in \mathcal{U}[0,\tau].$$

Это в совокупности с (29) дает доказываемое утверждение. □

Лемма 4.8. *Для любого $S \subset \mathbb{R}^n$ выполнены включения*

$$S \subset B(S + \mathfrak{B}_{\tau C_b}), \tag{46}$$

$$BS \subset S + \mathfrak{B}_{\tau C_b}. \tag{47}$$

Доказательство. Докажем включение (46). Пусть $y \in S$. Из соотношения (7) следует, что для любого $v \in Q$ справедливо включение $y + \tau b(y, v) \in S + \mathfrak{B}_{\tau C_b}$. Отсюда по определению (14) оператора B следует, что $y \in B(S + \mathfrak{B}_{\tau C_b})$.

Докажем включение (47). Пусть $y \in BS$. По определению (14) оператора B это означает, что для любого $v \in Q$ выполнено включение $y + \tau b(y, v) \in S$. Отсюда и из соотношения (7) получаем $y \in S + \mathfrak{B}_{\tau C_b}$. □

Проводя рассуждения, близкие к доказательству леммы 5.9 из [7], получаем следующую лемму.

Лемма 4.9. *Для любого $S \subset \mathbb{R}^n$ выполнено включение*

$$BD_u S \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\tau C_b} \subset S.$$

Для любого индекса $i \in \overline{0, I-1}$ определим число

$$r_i = (\tau C_b + (I - i - 1)\Delta_0)e^{(I-i-1)\tau L}. \tag{48}$$

Лемма 4.10. *Пусть выполнены неравенства $\tau L_b^x < \frac{1}{2}$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, где ε_0 определено равенством* (35). *Тогда для любого $j \in \overline{0, I-1}$ выполнено включение*

$$M_j^v + \mathfrak{B}_{r_j} \subset BD_u M_j^u. \tag{49}$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение по индукции. Из включений (25), (26) получаем следующую цепочку включений: $M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M} \subset M + \mathfrak{B}_{\tau C + \varepsilon_M} + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M} = M + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \varepsilon_M} \subset M_0^u$. Отсюда, используя соотношения (23), получим включения

$$M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M - \Delta_u - \varepsilon_D} \subset (M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M}) \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u + \varepsilon_D} \subset M_0^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u + \varepsilon_D} \subset D_u M_0^u.$$

Используя (46) для $S = M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M - \Delta_u - \varepsilon_D - \tau C_b}$, получаем включение

$$M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M - \Delta_u - \varepsilon_D - \tau C_b} \subset B(M_0^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \tau C - 2\varepsilon_M - \Delta_u - \varepsilon_D}) \subset BD_u M_0^u. \tag{50}$$

Из равенств (35) и (48) следует, что $r_0 + \tau(C + C_b) + 2\varepsilon_M + \Delta_u + \varepsilon_D = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$. Отсюда и из включения (50) получаем, что доказываемое включение (49) справедливо при $j = 0$.
Пусть теперь включение (49) справедливо при $j = i \in \overline{0, I-2}$, то есть

$$M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i} \subset BD_u M_i^u. \tag{51}$$

Требуется доказать, что включение (49) выполняется и при $j = i + 1$. Используя (51), с учетом леммы 4.2 и включения (17) получаем

$$M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i - \varepsilon_B/(1-\tau L_b^x)} \subset BD_u M_i^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_B/(1-\tau L_b^x)} \subset B(D_u M_i^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) \subset \tilde{B} D_u M_i^u.$$

Отсюда с учетом (23) имеем

$$D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i - \Delta_v - \varepsilon_D - \varepsilon_B/(1-\tau L_b^x)} \subset M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i - \varepsilon_B/(1-\tau L_b^x)} \subset \tilde{B} D_u M_i^u,$$

то есть $D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\rho_i} \subset \tilde{B} D_u M_i^u$, где

$$\rho_i = r_i - \Delta_v - \varepsilon_D - \varepsilon_B/(1 - \tau L_b^x). \tag{52}$$

Учитывая включение (16), получаем

$$A(D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\rho_i-\varepsilon_A}) \subset A(\tilde{B} D_u M_i^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}) \subset \tilde{A}\tilde{B} D_u M_i^u. \quad (53)$$

Из включений (16) и (37) следует, что

$$\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{(\rho_i-2\varepsilon_A)/(1+\tau L_a^x)} \subset A(D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}) + \mathfrak{B}_{(\rho_i-2\varepsilon_A)/(1+\tau L_a^x)} \subset A(D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\rho_i-\varepsilon_A}).$$

Из включений (53), (27) получаем $\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{(\rho_i-2\varepsilon_A)/(1+\tau L_a^x)} \subset \tilde{A}\tilde{B} D_u M_i^u \subset M_{i+1}^u$. Введя обозначение

$$\tilde{r}_i = r_i e^{-\tau L_a^x} - \Delta_v - \varepsilon_D - 2\varepsilon_A - \varepsilon_B/(1-\tau L_b^x), \quad (54)$$

из равенства (52) получаем неравенство $\tilde{r}_i \le (\rho_i - 2\varepsilon_A)/(1+\tau L_a^x)$. Следовательно, $\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{r}_i} \subset M_{i+1}^u$. Используя соотношения (23), из последнего включения получаем

$$\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{r}_i-\Delta_u-\varepsilon_D} \subset M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u+\varepsilon_D} \subset D_u M_{i+1}^u. \quad (55)$$

Введем обозначение

$$\tilde{\tilde{r}}_i = (\tilde{r}_i - \Delta_u - \varepsilon_D - \varepsilon_B)/(1+\tau L_b^x). \quad (56)$$

Используя соотношения (17), (38) и (55), получаем включения

$$\tilde{B}\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i} \subset B(\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) + \mathfrak{B}_{(\tilde{r}_i-\Delta_u-\varepsilon_D-\varepsilon_B)/(1+\tau L_b^x)} \subset B D_u M_{i+1}^u. \quad (57)$$

Так как $\tilde{\tilde{r}}_i \le r_i$, то из включений (24), (29), (51) получаем

$$M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i} \subset M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i} \subset B D_u M_i^u \subset B D_u M_{i+1}^u. \quad (58)$$

Из соотношений (27), (57) и (58) имеем

$$M_{i+1}^v + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i} = ((\tilde{B}\tilde{A} D_v M_i^v) \cup M_i^v) + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i} = (\tilde{B}\tilde{A} D_v M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i}) \cup (M_i^v + \mathfrak{B}_{\tilde{\tilde{r}}_i}) \subset B D_u M_{i+1}^u. \quad (59)$$

Из (48) следует неравенство $r_{i+1} \le r_i e^{-\tau L} - \Delta_0$. В силу равенств (34), (54), (56) и неравенства $\tau L_b^x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $r_i e^{-\tau L} - \Delta_0 \le \tilde{\tilde{r}}_i$. Поэтому $r_{i+1} \le \tilde{\tilde{r}}_i$. Отсюда и из соотношений (59) получаем, что включение (49) выполнено для $j = i+1$. □

Доказательство теоремы 3.1. Если $x_0 \in M_0^u$, то утверждение теоремы следует из соотношений (25). Если $x_0 \notin M_0^u$, то в силу включения $x_0 \in M_i^u$ получаем неравенство $i > 0$ и существование такого номера $m \in \overline{0, i-1}$, что $x_0 \in M_{m+1}^u \setminus M_m^u$. Пусть задана функция $v \in \mathcal{V}[0, \tau_{m+1}]$. Тогда по лемме 4.6 (где положим $i = m$) существует такой номер $j \in \overline{0, m+1}$, что

$$x_u^{\mathrm{mot}}(\tau_j, 0, x_0, T, u^{\mathrm{str}}, v) \in M_0^u. \quad (60)$$

Это означает, что гарантируется ε-поимка на отрезке $[0, \tau_{m+1}] \subset [0, \tau_i]$. □

Доказательство теоремы 3.2. Зафиксируем произвольную функцию $u \in \mathcal{U}[0, \tau_{i+1}]$. Обозначим $x(t) = x_v^{\mathrm{mot}}(t, 0, x_0, T, u, v^{\mathrm{str}})$, $t \in [0, \tau_{i+1}]$. Применяя лемму 4.7, по индукции получаем, что $x(\tau_j) \notin M_{i-j}^v$ при $j \in \overline{0, i}$. Отсюда и из включений (29) следует, что $x(\tau_j) \notin M_0^v$ для любого $j \in \overline{0, i}$. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существует такой момент времени $t \in [0, \tau_{i+1}]$, что $x(t) \in M$. Выберем индекс $j \in \overline{0, i}$ из условия $|t - \tau_j| \le \tau$. Тогда в силу (1), (6), (7) справедливо неравенство $\|x(\tau_j) - x(t)\| \le \tau C$. Отсюда и из включений (26) следует, что $x(\tau_j) \in M + \mathfrak{B}_{\tau C} \subset M_0^v$. Противоречие. □

Доказательство теоремы 3.3. Пусть выполнено неравенство $\varepsilon \ge \varepsilon_0$. Зафиксируем произвольное $i \in \overline{0, I-1}$. По лемме 4.10 выполнено включение $M_i^v + \mathfrak{B}_{r_i} \subset B D_u M_i^u$. Из равенств (48) следует неравенство $r_i \ge \tau C_b$. Поэтому $M_i^v + \mathfrak{B}_{\tau C_b} \subset B D_u M_i^u$. Отсюда получаем, что $M_i^v \subset B D_u M_i^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\tau C_b}$, и с учетом леммы 4.9 справедливо включение $M_i^v \subset M_i^u$.
□

Доказательство теоремы 3.4. Пусть задан вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\varrho(x_0, M) > \varepsilon$. Тогда в силу (25) имеем $x_0 \notin M_0^u$. Если $x_0 \in M_{I-1}^u$, то существует номер $i \in \overline{0, I-2}$ такой, что $x_0 \in M_{i+1}^u \setminus M_i^u$. Так как $x_0 \in M_{i+1}^u$, то по теореме 3.1 закон управления (u^{str}, T) гарантирует ε-поимку на отрезке $[0, \tau_{i+1}]$ для начального состояния $x(0) = x_0$. Так как $x_0 \notin M_i^u$ и, согласно соотношению (36), $M_i^v \subset M_i^u$, то $x_0 \notin M_i^v$ и по теореме 3.2 закон управления (v^{str}, T) гарантирует уклонение на отрезке $[0, \tau_{i+1}]$ для начального состояния $x(0) = x_0$. Таким образом, выполняется первый пункт альтернативы в определении ε-оптимальной пары стратегий.

Пусть теперь $x_0 \notin M_{I-1}^u$. Тогда согласно (36) имеем $x_0 \notin M_{I-1}^v$. Отсюда по теореме 3.2 закон управления (v^{str}, T) гарантирует уклонение на отрезке $[0, \vartheta]$ для начального состояния $x(0) = x_0$, то есть реализуется второй пункт альтернативы. □

5. Примеры классов аппроксимирующих множеств

Покажем, что теоремы 3.1–3.4 могут быть использованы для получения оценок погрешностей алгоритма, изложенного в работе [7]. Поскольку при доказательстве теорем 3.1–3.4 не использовался конкретный вид нормы, то, в частности, так же как и в работе [7], в качестве нормы в $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть max-норму: $\|x\| = \max_{i \in \overline{1,n}} |x_i|$. При этом шаром $\mathfrak{B}_R$ будет куб с центром в нуле и с ребрами длиной $2R$. Пусть $\mathfrak{C}$ – кубическая сетка в $\mathbb{R}^n$ с шагом h. Каждому сеточному множеству $S \subset \mathfrak{C}$ сопоставим телесное множество $\mathcal{E}(S) \subset \mathbb{R}^n$, равное объединению кубов в $\mathbb{R}^n$ с ребрами длины h и центрами в точках множества S. Будем рассматривать класс аппроксимирующих множеств $\Sigma = \{\mathcal{E}(S) : \ S$ – ограниченное подмножество $\mathfrak{C}\}$. Используя обозначения [7], введем для любого $S \in \Sigma$ множества

$$\tilde{A}S = \mathcal{E}(F_u(S \cap \mathfrak{C})), \qquad \tilde{B}S = \mathcal{E}(F_v(S \cap \mathfrak{C})).$$

Легко получить (в обозначениях [7]), что $\varepsilon_A = \tau K_u \delta + (1 + \tau L_u)h/2$, $\varepsilon_B = \tau K_v \delta + (1 + \tau L_v)h/2$. Для погрешностей расчета управлений выполняются оценки $\varepsilon_u = (1 + \tau L_u)h/2, \varepsilon_v = (1 + \tau L_v)h/2$. При $\varepsilon_D = 3h/2$ выполненяются включения (23) для операторов

$$D_u S = \mathcal{E}(S \cap \mathfrak{C} \overset{*}{-} \mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}_{\Delta_u + \varepsilon_D}), \qquad D_v S = \mathcal{E}(S \cap \mathfrak{C} + \mathfrak{B}^{\mathfrak{C}}_{\Delta_v + \varepsilon_D}).$$

Для $\varepsilon_M = h$ выполняются включения (25), (26) для множеств M_0^u, M_0^v, определенных следующим образом:

$$M_0^u = \mathcal{E}((M + \mathfrak{B}_{\varepsilon - h/2}) \cap \mathfrak{C}), \qquad M_0^v = \mathcal{E}((M + \mathfrak{B}_{\tau C + h/2}) \cap \mathfrak{C}).$$

Подставляя эти оценки в формулу (35), получим, что при стремлении τ, h, δ к нулю погрешность ε_0 по порядку величины совпадает с результатом работы [7]. Из полученной оценки, так же как и в [7], следует, что для получения достаточно малой погрешности необходимо выбирать достаточно малыми параметры h, τ, δ, причем так, чтобы отношение h/τ было достаточно малым.

Для класса аппроксимирующих множеств Σ, состоящего из многоугольников в $\mathbb{R}^2$ с длиной сторон, не превосходящей h, при реализации операторов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ можно использовать алгоритмы, построенные в [8]. При этом в случае евклидовой нормы для погрешностей $\varepsilon_M, \varepsilon_D, \varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ вспомогательных алгоритмов, использующих конволюту, будут справедливы следующие оценки:

$$\varepsilon_M = h, \qquad \varepsilon_D = \max\left\{\frac{h^2}{8\Delta_u}, \frac{h^2}{8\Delta_v}\right\}, \qquad \varepsilon_A = 4h + \tau^2 L_a^x C_a, \qquad \varepsilon_B = 4h + \tau^2 L_b^x C_b,$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{(\varepsilon_A + h/2)^2 + h^2/4}, \qquad \varepsilon_v = \sqrt{(\varepsilon_B + h/2)^2 + h^2/4}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Литература

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967.
2. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сборник. – 1980. – Т. 112, № 3. – С. 307–330.
3. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985.
4. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
5. *Patsko V.S., Botkin N.D., Kein V.M., Turova V.L., Zarkh M.A.* Control of an aircraft landing in windshear // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1994. – V. 83, N 2. — P. 237–267.
6. *Patsko V.S., Turova V.L.* Numerical solution of two-dimensional differential games: Preprint / IMM UrO RAN. Ekaterinburg, 1995. — 78 p.
7. *Иванов Г.Е.* Алгоритм решения нелинейной игровой задачи быстродействия // Фундаментальные и задачи проблемы современной математики: сб. науч. трудов / М.: МФТИ. — 2011. — С. 49–76.
8. *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с использованием конволюты // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 61–67.
9. *Wein R.* Exact and efficient construction of planar Minkowski sums using the convolution method // Proc. 14th European Symposium on Algorithms (ESA), LNCS. – 2006. – V. 4186. – P. 829–840.
10. *Flato E.* Robust and efficient construction of planar Minkowski sums // Master's thesis. School of Computer Science. Tel-Aviv University. — 2000.

Поступила в редакцию 30.01.2012.