УДК 336.761.6

В.Е. Зямалов[1,2], *С.С. Студников*[3,2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2] Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

[3] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Формирование инвестиционного портфеля частного инвестора на основе теории сожалений

Теория ожидаемой полезности является инструментом, повсеместно используемым для описания поведения экономических агентов в ситуации неопределённости. Однако существуют свидетельства того, что эта теория не вполне корректно описывает поведение реальных экономических агентов. В данной статье строится модель, которая описывает формирование инвестиционного портфеля инвестора с учётом подобной некорректности.

Ключевые слова: инвестиции, неопределённость, нерациональность, теория ожидаемой полезности, теория сожалений.

Основной предпосылкой многих экономических моделей является идея о том, что действия экономических агентов рациональны. Обычно о рациональности говорят с точки зрения теории ожидаемой полезности, которая определяется небольшим числом аксиом, сформулированных в работах фон Неймана и Моргенштерна [1, 2].

Однако действия агентов часто нерациональны и нарушают их. Канеман и Тверски в своей работе приводят эмпирический пример подобных нарушений [4].

Теория сожалений, разработанная с целью объяснения установленных ранее фактов, нашла довольно широкое применение при описании процессов формирования различных инвестиционных портфелей. Например, Мишено и Солник [6] применили эту теорию при описании инвестиционного выбора при оперировании с валютными активами. Моэрман, Митчелл и Фолькман использовали её для описания выбора оптимального пенсионного плана [7]. Вагнер при помощи данной теории построил эффективное множество инвестиционных портфелей, но его подход кажется авторам излишне сложным [8]. В данной статье авторы предлагают максимально близкий к исходной теории способ описания искажений при формировании инвестиционного портфеля с минимальным количеством дополнительных предположений. Следует отметить, что Голье и Саланье получили похожие результаты, но в своей работе они основывались не на теории сожалений, а на теории Эрроу–Дебре [3].

I. Теория сожалений

Теория сожалений была предложена Лумесом и Сагденом в 1982 году [5]. В целом она строится на схожих предположениях с теорией ожидаемой полезности, и, с одной стороны, её можно рассматривать как расширение данной теории. Тем самым теорию сожалений корректно применять тогда, когда корректно применять теорию ожидаемой полезности.

Предположим, что мы находимся в ситуации, при которой существует N различных состояний природы, каждое из которых может реализоваться с вероятностью p_j, причём $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$.

Рассмотрим две функции. Первая названа авторами «безальтернативной» функцией полезности $C(x)$. Значение этой функции имеет смысл полезности, которую получит агент от некоторого блага при условии, что у него не было права его выбирать. Вторая функция представляет собой так называемую функцию «удовлетворения-сожаления». Эта функция показывает, насколько увеличится или уменьшится полезность некоторого блага в зависимости от безальтернативной полезности другого — отвергнутого — блага.

Понятия безальтернативной полезности и «удовлетворения-сожаления» объединяются воедино в «модифицированной» функции полезности. Представим, что агент выбирает между двумя альтернативами: A_i и A_k. Допустим также, что агент выбрал альтернативу A_i и, кроме того, реализовалось j-е состояние природы. Тогда агент получит некоторый выигрыш x_{ij}. При этом если бы он выбрал альтернативу A_k, то он бы получил выигрыш x_{kj}. Для краткости будем обозначать $C(x_{ij}) = c_{ij}$.

Введём модифицированную функцию полезности:

$$m_{ij}^k = M(x_{ij}; x_{kj}).$$

Функция назначает некоторое числовое значение каждой паре альтернатив. Отличие значений c_{ij} и m_{ij}^k может быть проинтерпретировано как изменение полезности под влиянием сожаления о неправильно сделанном выборе или удовлетворения от правильного решения. Отсюда можно предположить, что если $c_{ij} = c_{kj}$, то $m_{ij}^k = c_{ij}$. Приняв допущение, что отличие значений c_{ij} и m_{ij}^k зависит только от безальтернативных полезностей сравниваемых альтернатив и не зависит от каких-либо иных характеристик, можно сделать следующие предположения:

$$\frac{\partial m_{ij}^k}{\partial \mathrm{c}_{ij}} > 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial m_{ij}^k}{\partial \mathrm{c}_{kj}} \leqslant 0.$$

Первое из них означает, что при прочих равных условиях модифицированная полезность растёт с увеличением безальтернативной полезности выбранной альтернативы — эффект удовлетворения. Второе означает, что при прочих равных условиях модифицированная полезность не возрастает с увеличением безальтернативной полезности отвергнутой альтернативы — эффект сожаления. Последнее неравенство следует рассматривать как нестрогое, так как возможен случай, при котором агент в принципе не будет испытывать сожаления.

Для того чтобы сделать выбор между двумя альтернативами, следует перейти к функции ожидаемой модифицированной полезности:

$$E_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_j m_{ij}^k.$$

Агент предпочтёт альтернативу A_i альтернативе A_k, если значение E_i^k будет больше, чем значение E_k^i.

Предположим, что степень удовлетворения-сожаления зависит только от разности безальтернативных полезностей выбранной и отвергнутой альтернатив. Тогда

$$m_{ij}^k = c_{ij} + R(c_{ij} - c_{kj}),$$

где $R(x)$ — функция удовлетворения-сожаления, которая ввиду вышеизложенных предположений о поведении функции модифицированной полезности обладает следующими свойствами: $R(0) = 0$, $R'(x) \geqslant 0\ \forall x$.

Тогда условие выбора для агента примет следующий вид

$A_i \succeq A_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{N} p_j [c_{ij} - c_{kj} + R(c_{ij} - c_{kj}) - R(c_{kj} - c_{ij})] \geqslant 0$.

Удобно ввести возрастающую и нечётную функцию $Q(x) = x + R(x) - R(-x)$. Тогда условие выбора примет вид

$A_i \succeq A_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{N} p_j Q(c_{ij} - c_{kj}) \geqslant 0$.

Можно сделать три предположения относительно внешнего вида функции $Q(x)$ [5]:

1. $Q(x)$ — линейная или, что эквивалентно, $R''(x) = R''(-x)$ для любого $x > 0$.

2. $Q(x)$ — вогнутая для всех положительных x или, что эквивалентно, $R''(x) < R''(-x)$ для любого $x > 0$.

3. $Q(x)$ — выпуклая для всех положительных или, что эквивалентно, $R''(x) > R''(-x)$ для любого $x > 0$.

На первый взгляд, кажется, что нет никаких причин предпочитать какое-либо из этих трёх предположений другим. Однако авторы отмечают, что все случаи отклонения от рационального поведения, приведённые в работе Каннемана и Тверски, удачно описываются моделью, удовлетворяющей третьему предположению; также существуют теоретические причины ожидать того, что третье предположение будет чаще удовлетворяться, нежели остальные [5].

II. Модификация модели

Исходная модель, построенная в рамках теории сожаления, используется только для обоснования выбора между двумя альтернативами. Однако эту модель можно применить и для обоснования выбора из некоторой группы альтернатив. Допустим, что есть некоторая альтернатива A^*, с которой при выборе происходит сравнение всех альтернатив. Например, если альтернативы представляют собой инвестиционные портфели, то альтернатива A^* может представлять собой вложение денежных средств в банковский депозит.

Рассмотрим некоторое непрерывное пространство из активов и портфелей. Портфель характеризуется в этом пространстве набором чисел w_1, ..., w_K, являющихся весами активов, входящих в состав портфеля; таким образом, считая невозможными короткие продажи, $0 \leqslant w_k \leqslant 1\ \forall k$, $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$. Далее введём в рассмотрение безальтернативную функцию полезности $C(w_1, ..., w_K)$, которая принимает значения $c_1(w_1, ..., w_K)$, ..., $c_N(w_1, ..., w_K)$ в зависимости от реализовавшегося состояния природы. Данная функция сопоставляет некоторому активу или портфелю число, которое и принимается за безальтернативную полезность. Будем считать, что полезность актива A^* равна c^*.

Введём в рассмотрение функцию $R(x)$, удовлетворяющую всем условиям, накладываемым на функцию удовлетворения-сожаления в исходной модели, и рассмотрим задачу агента:

$$\left\{ \begin{array}{lclcll} E & = & \sum_{j=1}^{N} p_j Q(c_j - c^*) & \to & \max_{w_1,\dots,w_K}, & \\ & & \sum_{k=1}^{K} w_k - 1 & = & 0, & \\ & & w_k & \geqslant & 0 & \forall k. \end{array} \right. \tag{1}$$

Функцию E можно рассматривать как измеритель благосостояния инвестора, показывающий его выгоду от вложения в альтернативу A по отношению к выгоде от вложения в альтернативу A^*. Решая задачу (1), получаем следующее выражение для предельной нормы замещения:

$$MRS_{m,n}^{regret} = \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}[1 + R'(c_j - c^*) + R'(c^* - c_j)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[1 + R'(c_j - c^*) + R'(c^* - c_j)]}, \tag{2}$$

где $\frac{\partial c_j}{\partial w_n}$ — производная безальтернативной функции полезности по весу w_n при условии, что реализовалось состояние природы s_j, p_j — вероятность реализации состояния природы s_j. Это выражение имеет смысл предельной нормы замещения для предпочтений агента, подверженного влиянию эффекта сожаления, и показывает, от какого количества актива n готов отказаться агент при увеличении количества актива m на единицу.

При этом если предположить отсутствие нерациональности в действиях агента ($R(x) \equiv 0$) и решить аналогичную (1) задачу, то можно получить следующее условие:

$$MRS_{m,n}^{rational} = \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}}. \tag{3}$$

Здесь используются те же обозначения. Это выражение имеет смысл предельной нормы замещения для предпочтений рационального агента. Проведём сравнение этих условий, вычтя из выражения (2) выражение (3):

$$MRS_{m,n}^{regret} - MRS_{m,n}^{rational} = \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}[\dots]_j}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[\dots]_j} - \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}[...]_j \times \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n} - \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m} \times \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j \times \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_m}[...]_i \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n} - \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial c_i}{\partial w_m} \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j \times \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n} \frac{\partial c_i}{\partial w_m}[...]_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \frac{\partial c_i}{\partial w_m} \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j}{\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j \times \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n}} \vee 0.$$

Здесь $[...]_j = 1 + R'(c_j - c^*) + R'(c^* - c_j)$. Так как знаменатель полученного выражения больше нуля, то можно перейти к рассмотрению:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \frac{\partial c_j}{\partial w_n} \frac{\partial c_i}{\partial w_m}[...]_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j \frac{\partial c_i}{\partial w_m} \frac{\partial c_j}{\partial w_n}[...]_j \vee 0. \tag{4}$$

Проведём замену переменных в (4):

$$p_i \frac{\partial c_i}{\partial w_m} = \alpha_i, \quad p_i \frac{\partial c_i}{\partial w_n} = \beta_i, \quad 1 + R'(c_i - c^*) + R'(c^* - c_i) = l_i.$$

В итоге получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \beta_j [l_i - l_j] \vee 0.$$

Для упрощения выкладок рассмотрим случай двух возможных состояний природы. Будем также считать, что состояния природы проиндексированы в соответствии с увеличением значения $C(x)$:

$$\alpha_1 \beta_2 [l_1 - l_2] - \alpha_2 \beta_1 [l_2 - l_1] \vee 0. \tag{5}$$

Окончательный вывод зависит в конечном счёте от вида функции $R(x)$. Если принять гипотезу Лумеса и Сагдена, то тогда $l_1 - l_2 < 0$. Действительно,

$$l_1 - l_2 < 0,$$

$$R'(c_1 - c^*) + R'(c^* - c_1) - R'(c_2 - c^*) - R'(c^* - c_2) < 0.$$

С учётом того, что состояния природы проиндексированы в соответствии с увеличением значения $C(x)$, получим

$$\frac{R'(c^* - c_1) - R'(c^* - c_2)}{\mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1} < \frac{R'(c_2 - c^*) - R'(c_1 - c^*)}{\mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1},$$

$$\frac{R'(c^* - c_2) - R'(c^* - c_1)}{\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_2} < \frac{R'(c_2 - c^*) - R'(c_1 - c^*)}{\mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1}.$$

Введём следующее обозначение:

$$\mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1 = \Delta.$$

Тогда получим

$$\frac{R'(c^* - c_1 - \Delta) - R'(c^* - c_1)}{-\Delta} < \frac{R'(c_1 + \Delta - c^*) - R'(c_1 - c^*)}{\Delta}.$$

Так как значения c_1 и c_2 были взяты произвольно, то тогда если $\Delta \to 0$, то $R''(c^* - c_1) < R''(c_1 - c^*)$.

Зная это, из формулы (5) получим

$$\alpha_1 \beta_2 \wedge \alpha_2 \beta_1,$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \wedge \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

$$MRS^1_{m,n} \wedge MRS^2_{m,n}.$$

Здесь $MRS^1_{m,n}$ — предельная норма замещения, рассчитанная для безальтернативной функции полезности. Следовательно, если $MRS^1_{m,n} < MRS^2_{m,n}$, то $MRS^{regret}_{m,n} > MRS^{rational}_{m,n}$. То есть в состоянии равновесия агент будет покупать несколько больше актива m, нежели в случае рациональности, и наоборот.

Естественно, что более точное описание зависит от конкретного вида функций $C(w_1, ..., w_K) = \mathrm{C}(r_j(w_1, ..., w_K))$ и $R(x)$, где $r_j(w_1, ..., w_K)$ — доходность инвестиционного портфеля в состоянии природы j. Пусть функция безальтернативной полезности $C(r_j)$ обладает следующим свойством: $C'(r_j) > 0$. Тогда, зная, что $r_j(w_1, ..., w_K) = \sum_{i=1}^{K} w_i r_i^j$, имеем

$$\frac{\partial c_j}{\partial w_n} = \mathrm{C}'(r_j)\frac{\partial r}{\partial w_n}\bigg|_{r = r_j} = \mathrm{C}'(r_j) r_n^j.$$

Здесь r_n^1 — доходность актива n в состоянии природы 1. Пусть $MRS^1_{m,n} < MRS^2_{m,n}$. Тогда

$$\frac{\mathrm{C}'(r_1) r_m^1}{\mathrm{C}'(r_1) r_n^1} < \frac{\mathrm{C}'(r_2) r_m^2}{\mathrm{C}'(r_2) r_n^2},$$

$$\frac{r_n^2}{r_n^1} < \frac{r_m^2}{r_m^1}.$$

Таким образом, агент будет склоняться в сторону актива с большим темпом прироста доходности при переходе от худшего состояния природы к лучшему.

Построенная модель показывает, что если поведение экономического агента будет подчиняться теории сожалений, то будут наблюдаться устойчивые сдвиги при формировании его инвестиционного портфеля.

Литература

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ.; под ред. А.А. Конюса. — М.: Издательство «Прогресс», 1975. — 606 с.

2. *Нейман Дж. фон., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение / пер. с англ.; под ред. и с доб. Н.Н. Воробьёва. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1970. — 708 с.

3. *Gollier C., Salanié. B.* Individual decisions under risk, risk sharing and asset prices with regret // Tolouse School of Economics, 2006. — P. 25.

4. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. — 1979. — V. 42, N 2. — P. 263–292.

5. *Loomes G., Sugden R.* Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty // The Economic Journal. — 1982. — V. 92, N 368. — P. 805–824.

6. *Michenaud S., Solnik B.* Applying Regret Theory to Investment Choices: Currency Hedging Decisions // Journal of International Money and Finance. — 2009. — V. 27. — P. 677–694.

7. *Muermann A., Mitchell O.S., Volkman J.M.* Regret, Portfolio Choice, and Guarantees in Defined Contribution Schemes // Insurance: Mathematics and Economics. — 2008. — V. 42. — P. 1050–1061.

8. *Wagner N.* On a model of portfolio selection with benchmark // Journal of Asset Management. — 2002. — V. 3. — P. 55–65.

Поступила в редакцию 28.11.2010.