

Раздел II

Проблема Борсука

УДК 514.174.5

В. В. Буланкина

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
 Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ
 им. М. В. Ломоносова

О разбиении плоских множеств на пять частей без расстояния $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

В 1933 году К. Борсук предложил разбивать множества диаметра 1 на части меньшего диаметра, и сейчас эта задача Борсука — одна из самых популярных в комбинаторной геометрии. В 1956 году Х. Ленц уточнил задачу Борсука, поставив вопрос о минимальном диаметре части в разбиении множества на данное число частей. А в 2010 году В.П. Филимонов заменил вопрос о минимальном диаметре на вопрос о минимальном расстоянии, которого нет среди точек каждой из частей. Филимонов показал тогда же, что при разбиении на пять частей всегда можно избежать расстояния $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\dots$. Нам удалось доказать, что то же самое верно для расстояния $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.517\dots$. При этом мы разработали новую технику для изучения бесконечных универсальных покрывающих систем, что интересно само по себе.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр, запрещенное расстояние, разбиение, универсальная покрывающая система.

1. Введение

Результат, которому посвящена эта статья, относится к комбинаторной геометрии, а именно, к области исследований, порожденной двумя классическими задачами: знаменитой проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (1933) и задачей Нельсона–Эрдеша–Хадвигера о хроматических числах (1950) (см. [1–7]). Если обозначить через $\chi'(n, x, a)$ минимальное число частей, на которые можно так разбить произвольное множество диаметра a в \mathbb{R}^n , чтобы внутри каждой из частей (и их замыканий) не было точек на расстоянии $x \in [0, a]$, то задача об изучении этой функции при $x \rightarrow 0$ является аналогом задачи Нельсона–Эрдеша–Хадвигера, а при $x \rightarrow a$ — аналогом проблемы Борсука.

Далее речь пойдет о задаче в постановке, рассмотренной в работе [8] для двумерной плоскости и множеств единичного диаметра ($n = 2, a = 1$), а также в работе [9] для \mathbb{R}^3 ($n = 3, a = 1$). Обозначим через Φ произвольное ограниченное (неодноточечное) множество на плоскости. Полагая

$$\text{diam } \Phi = \sup \{ \rho(X, Y) : X, Y \in \Phi \},$$

где $\rho(X, Y)$ — стандартная евклидова метрика, определим функции

$$\begin{aligned} d'(\Phi, k) &= \inf \{ x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_k, \quad \forall i \quad \forall X, Y \in \Phi_i \quad \rho(X, Y) \neq x \}, \\ \chi'(\Phi, x) &= \min \{ k \in \mathbb{N} : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_k, \quad \forall i \quad \forall X, Y \in \Phi_i \quad \rho(X, Y) \neq x \}. \end{aligned}$$

Здесь $d'(\Phi, k)$ — точная нижняя грань положительных вещественных чисел с тем свойством, что Φ может быть покрыто такими множествами Φ_1, \dots, Φ_k , для которых расстояние между любыми двумя точками каждого Φ_i не равно x , а $\chi'(\Phi, x)$ — минимальное натуральное число k с тем же свойством.

В свою очередь $d'(k) = \sup d'(\Phi, k)$, $\chi'(x) = \max \chi'(\Phi, x)$, где супремум и максимум берутся по всем множествам Φ единичного диаметра на плоскости.

Заметим, что из оценок элементов последовательности $d'(k)$ очевидным образом получаются оценки функций $\chi'(x)$ в соответствующих точках (см. [8]). В. П. Филимоновым впервые были введены последовательности $d'(\Phi, k)$ и $d'(k)$, ранее в работах [10–13] исследовали величины

$$d(\Phi, k) = \inf \{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_k, \quad \forall i \quad \text{diam } \Phi_i \leq x\}, \quad d(k) = \sup d(\Phi, k).$$

Полный обзор результатов этих исследований, а также ряд улучшенных оценок для $d(k)$ и подробные описания свойств последовательностей $d'(k)$, $d(k)$ и функций $\chi'(x)$, $\chi(x)$ можно найти в [8]. В частности, для нас будет важно, что последовательность $d'(k)$ невозрастающая и справедливы соотношения:

$d'(k) = 1, k = 1, 2$	$d'(4) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$	$d'(6) \leq 0.5577$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq d'(3) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	$d'(5) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$	$d'(k) = 0, k \geq 7$

Основной результат настоящей работы состоит в улучшении верхней оценки для $d'(5)$.
Справедлива

Теорема 1. *Имеет место неравенство $d'(5) \leq \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.*

Таким образом, если прежняя оценка для $d'(5)$ имела вид $d'(5) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57\dots$, то новая оценка значительно сильнее: $d'(5) \leq \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.51\dots$. Заметим, что поскольку нам известно, что $d'(k)$ — невозрастающая последовательность, то оценка для $d'(6)$ также будет улучшена.

Дальнейшая структура работы будет следующая: в разделе 2 мы определим универсальные покрывающие системы и покажем, как с помощью них доказывается теорема 1; в разделе 3 мы построим разбиения покрывающей системы и тем самым завершим доказательство теоремы.

2. Универсальные покрывающие системы

2.1. Определение и построение универсальной покрывающей системы

Система множеств \mathbf{U} называется *универсальной покрывающей системой* (УПС) в \mathbb{R}^2 , если

$$\forall \Phi \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{diam } \Phi = 1, \quad \exists U \in \mathbf{U}, \quad \exists O : \quad \Phi \subseteq O(U),$$

где O — некоторое движение плоскости.

Для любого k верно (см. [8]) неравенство

$$d'(k) \leq \sup \{d'(U, k) : U \in \mathbf{U}\}. \tag{1}$$

Зафиксируем произвольное число d на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Рассмотрим два круга

$$D = D(d) = \{(x, y) : x^2 + (y - d)^2 \leq d^2\}$$

и

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Через S и S_1 будем обозначать окружности, служащие границами D и D_1 .

Зафиксируем, далее, произвольную точку $Q = (a, b)$, принадлежащую множеству

$$L(d) = S \cap D_1 \cap \{(x, y) : x \leq 0, y \geq d\}.$$

Обозначим через

$$D_2 = D_2(Q) = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1\}$$

круг радиуса 1 с центром в точке Q , а через S_2 — окружность, отвечающую D_2 .

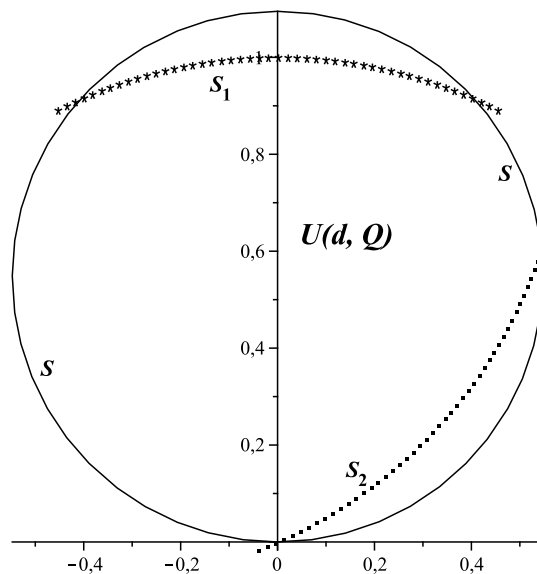


Рис. 1. Образец покрывки из УПС

Теперь определим (рис. 1)

$$U(d, Q) = D \cap D_1 \cap D_2$$

и ПОЛОЖИМ

$$\mathbf{U} = \left\{ U(d, Q) : d \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], Q \in L(d) \right\} = \bigcup_d \bigcup_Q \{U(d, Q)\}.$$

Лемма 1. Семейство множеств \mathbf{U} образует УПС в \mathbb{R}^2 .

2.2. Доказательство леммы 1

Доказательство леммы 1 почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для \mathbb{R}^3 из [9]. Пусть Φ — произвольное множество единичного диаметра в \mathbb{R}^2 . Без ограничения общности можно считать, что Φ замкнуто. Обозначим через d минимальное число, при котором $D = D(d)$ покрывает Φ . Разумеется, $d \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Будем использовать известную теорему Хелли (см. [14]).

В случае, который мы рассматриваем, Φ — ограниченное и замкнутое множество в \mathbb{R}^2 (то есть компакт). Если бы для любых $z_1, z_2, z_3 \in \Phi$ существовал круг меньшего чем d радиуса, покрывающий z_1, z_2, z_3 , то по теореме Хелли этот круг покрывал бы все точки Φ . Поскольку по предположению это не так, то существуют точки $z_1, z_2, \dots, z_i \in \Phi$, $i \in \{2, 3\}$, которые не могут быть покрыты кругом радиуса меньше, чем d . Иными словами, D — наименьший круг, который содержит z_1, z_2, \dots, z_i , и ясно, что $\{z_1, z_2, \dots, z_i\} \subset S$.

Без ограничения общности можно считать, что $z_1 = (0, 0) \in S$. Поскольку любая точка множества Φ удалена от z_1 на расстояние, не превосходящее единицы, круг D_1 покрывает Φ .

Понятно, что еще по крайней мере одна точка из $\{z_1, z_2, \dots, z_i\}$ должна лежать в полуплоскости $\{(x, y) : y \geq d\}$ (иначе круг D для $\{z_1, z_2, \dots, z_i\}$ не наименьший). Также без ограничения общности можно считать, что эта точка совпадает с некоторой $Q \in L(d)$, а значит, $D_2 = D_2(Q)$ покрывает Φ .

В итоге, существует движение O , число $d \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и точка $Q \in L(d)$, при которых

$$O(\Phi) \subseteq D(d) \cap D_1 \cap D_2(Q) = U(d, Q).$$

Лемма доказана.

Итак, мы знаем, что \mathbf{U} — это УПС. Если теперь мы разобьем каждое множество из \mathbf{U} на пять частей без расстояния $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, то теорема 1 будет доказана.

3. Построение разбиения

3.1. Трафарет

Мы хотим воспользоваться неравенством (1) и леммой 1. Построим разбиение произвольного множества $U \in \mathbf{U}$ на пять частей. Наш план следующий: полагаем $r_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и для $D(r_0)$ указываем разбиение на пять частей, которое затем будем использовать в качестве трафарета для разбиения произвольной покрывающей $U(d, Q)$.

Через A_i , $i = 1, \dots, 6$, на рис. 2 обозначены точки, которые могли бы быть вершинами правильного шестиугольника, вписанного в $D(r_0)$. Точка O — центр круга $D(r_0)$. Условимся обозначать через $MN(K)$ дугу MN , точки которой принадлежат $D(r_0)$ и лежат на окружности радиуса r_0 с центром в точке K . Например, $A_1A_3(O)$, $B_2B_6(B_3)$ и т.д. Радиус пока не меняется, а потому мы не будем его включать в обозначения.

Начнем разбиение с двух дуг $OA_4(A_2)$ и $OA_5(A_3)$. Затем на них фиксируем точки B_2, B_1 , симметричные относительно оси A_1OA_6 и отстоящие друг от друга на расстоянии r_0 .

Точки B_1, B_2 являются центрами еще для двух пар дуг: $A_3B_3(B_1)$ и $A_2B_3(B_2)$; $B_2B_4(B_1)$ и $B_1B_5(B_2)$.

Наконец, последние две дуги $B_1B_7(B_3)$ и $B_2B_6(B_3)$ завершают разбиение. Трафарет готов. Мы разбиваем его на 5 частей, как показано на рис. 2. Границы разделим, когда

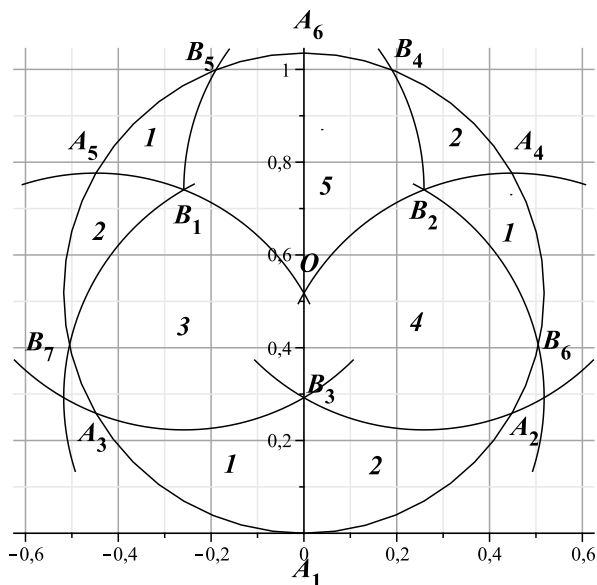


Рис. 2. Трафарет

будем строить разбиение каждой покрывки из УПС. В дальнейшем будем обозначать трафарет через T .

Приведем таблицы с координатами точек O, A_1, \dots, A_6 и B_1, \dots, B_7 :

	x	y
O	0	r_0
A_1	0	0
A_2	$0.5\sqrt{3}r_0$	$0.5r_0$
A_3	$-0.5\sqrt{3}r_0$	$0.5r_0$
A_4	$0.5\sqrt{3}r_0$	$1.5r_0$
A_5	$-0.5\sqrt{3}r_0$	$1.5r_0$
A_6	0	$2r_0$

	x	y
B_1	$-0.5r_0$	$0.5r_0 \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}}\right)$
B_2	$0.5r_0$	$0.5r_0 \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}}\right)$
B_3	0	$0.5r_0 \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)$
B_4	$0.5\sqrt{2} (2 - \sqrt{3})$	$0.5 \left(\sqrt{6} + \sqrt[4]{3^3} - \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$
B_5	$-0.5\sqrt{2} (2 - \sqrt{3})$	$0.5 \left(\sqrt{6} + \sqrt[4]{3^3} - \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$
B_6	$0.25r_0 \sqrt{\left(3 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) \left(5 - \sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)}$	$0.25r_0 \left(3 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)$
B_7	$-0.25r_0 \sqrt{\left(3 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) \left(5 - \sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)}$	$0.25r_0 \left(3 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)$

3.2. Идея разбиения покрышек из УПС с использованием трафарета

В дальнейшем мы будем разбивать покрышки при $r \in [0.5, r_0]$ и при $r > r_0$. В первом случае мы просто целиком поместим покрышку $U(r, Q)$ внутрь $T \cap D_1$ и докажем, что сам трафарет, пересеченный с D_1 , (а вместе с ним и лежащая в нем покрышка) разбивается на 5 частей без расстояния $r_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Во втором случае мы уже будем по существу использовать тот факт, что $U(r, Q)$ не просто вложена в $D \cap D_1$, но равна $D \cap D_1 \cap D_2$. При этом мы будем действовать двумя способами: осуществляя своего рода горизонтальный сдвиг при наложении трафарета на покрышку (параграф 3.4), а также делая более сложный поворот с вертикальным сдвигом (параграф 3.5). Точнее, каждое число $r > r_0$ мы запишем в виде $r = r_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} - r_0\right]$, и рассмотрим два случая: $Q \in L_1(r_0 + \varepsilon)$ и $Q \in L_2(r_0 + \varepsilon)$, где

$$L_1(r_0 + \varepsilon) = L(r_0 + \varepsilon) \cap \{X = (x, y) : y \leq 1.5(r_0 + \varepsilon)\}, \quad L_2(r_0 + \varepsilon) = L(r_0 + \varepsilon) \setminus L_1(r_0 + \varepsilon).$$

Первому случаю мы посвятим параграф 3.4, второму — 3.5.

3.3. Разбиение покрышек $U(d, Q)$, $d \in [0.5, r_0]$

Как уже было сказано в предыдущем параграфе, для таких $U(d, Q)$ (для любого $Q \in L(d)$) достаточно разбить множество $T \cap D_1$, которым они заведомо покрываются. На рис. 2, изображающем трафарет, уже указаны части разбиения (поскольку мы разбиваем не сам трафарет, а множество $T \cap D_1$, то часть 5 и верхние участки частей 1 и 2 на трафарете будут обрезаны дугой окружности S_1 , что, очевидно, нисколько не помешает), и нам лишь остается разбить границы множества. Справа, после буквы через дефис будем указывать номер множества, которому принадлежит точка, обозначенная этой буквой:

$$B_1 - 1; \quad B_2 - 2; \quad B_3 - 3; \quad O - 5; \quad A_1 - 1.$$

Соответственно запись $B_3 A_3(B_1) - 3$ будет означать, что все точки покрышки, лежащие на дуге $B_3 A_3(B_1)$, принадлежат третьему множеству разбиения, а выражение $(B_2 B_6(B_3) \setminus B_2) - 1$ — все точки, кроме B_2 , принадлежат первому множеству разбиения. Тогда

$$(B_1 B_7(B_3) \setminus B_1) - 2; \quad (B_3 A_2(B_2) \setminus B_3) - 4.$$

Для определенности можно считать, что

$$(OB_2(A_2) \setminus B_2) \quad \text{и} \quad (OB_1(A_3) \setminus B_1) - 5; \quad B_2 A_4(A_2) - 2; \quad B_1 A_5(A_3) - 1.$$

Пусть также $[A_1, B_3) - 1; \quad [B_3, O) - 3$.

Необрезанный участок дуги $B_1 B_5(B_2)$ отнесем к первому множеству (включая точку пересечения дуги с S_1 , обозначим ее через M), а необрезанный участок дуги $B_2 B_4(B_1)$ — ко второму множеству (также включая точку пересечения дуги с S_1 , обозначим ее через N). Дугу окружности S_1 между точками M и N , не включая их, отнесем к пятой части $((MN(A_1) \setminus \{M, N\}) - 5)$. Понятно, что если расстояния от точки O до точек дуги $B_4 B_5(O)$ были в точности равны r_0 , то расстояния от точки O до точек вышеуказанной дуги S_1 меньше. Это завершает разбиение множества $T \cap D_1$ на 5 частей без расстояния r_0 (рис. 3).

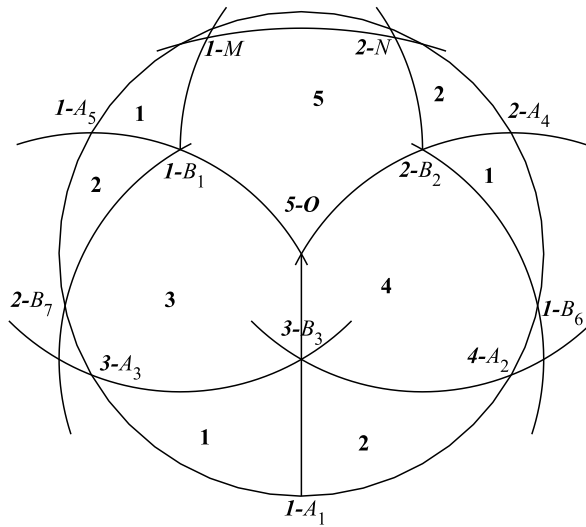


Рис. 3. Разбиение покрывок малого радиуса

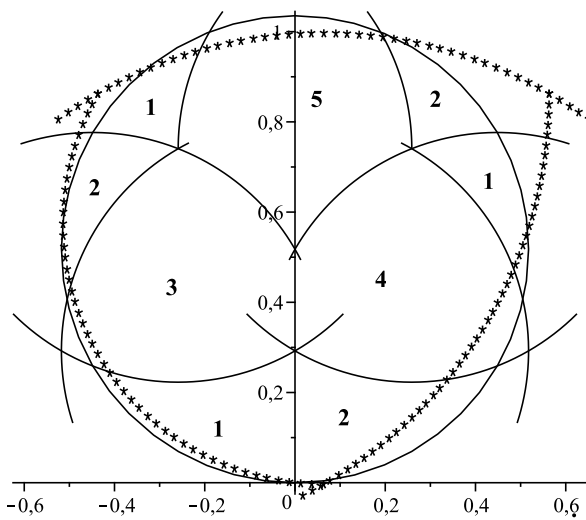


Рис. 4. Горизонтальный сдвиг

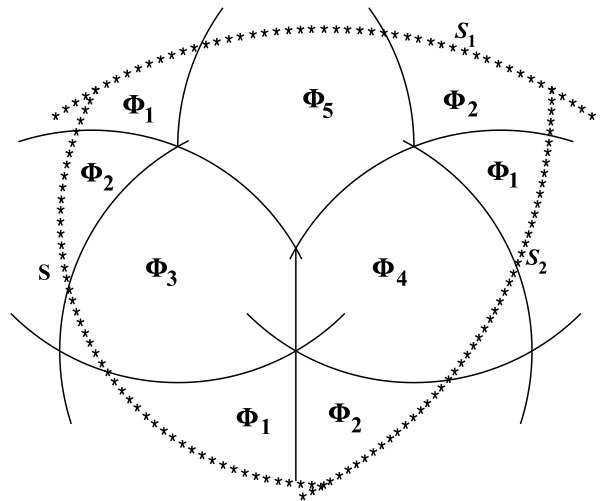


Рис. 5. Разбиение покрывки

3.4. Разбиение покрывок $U(r_0 + \varepsilon, Q)$, $Q \in L_1(r_0 + \varepsilon)$: горизонтальный сдвиг

Итак, пусть теперь $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} - r_0\right]$. Рассмотрим трафарет T и покрывку $U(r_0 + \varepsilon, Q)$, где $Q \in L_1(r_0 + \varepsilon)$.

Сдвинем покрывку вправо на ε (параллельный перенос на вектор $(\varepsilon, 0)$, рис. 4).

Рассмотрим разбиение покрывки на пять частей Φ_1, \dots, Φ_5 (рис. 5), индуцированное разбиением трафарета: часть Φ_5 ограничена дугами $B_1O(A_3)$, $B_2O(A_2)$, $B_1B_5(B_2)$, $B_2B_4(B_1)$ трафарета и частью дуги S_1 покрывки; часть Φ_3 ограничена дугами $B_1O(A_3)$, $B_1B_7(B_3)$, $B_3A_3(B_1)$ и отрезком $[B_3, O]$ трафарета и частью дуги S покрывки; часть Φ_4 ограничена дугами $B_2O(A_2)$, $B_2B_6(B_3)$, $B_3A_2(B_2)$, отрезком $[B_3, O]$ трафарета и частью дуги S_2 покрывки; части Φ_1 и Φ_2 индуцируются первой и второй частями трафарета соответственно (аналогично частям Φ_3 , Φ_4 и Φ_5), что можно увидеть на рис. 5. Заметим, что

на данном рисунке в верхних правых его частях Φ_1 и Φ_2 при некоторых достаточно малых r может появиться дуга окружности S , ограничивающая эти части. Договоримся в дальнейшем пренебрегать этой частью окружности, поскольку очевидно, что если без нее в данных частях не будет расстояния r_0 , то с ней тем более. Границы разбиваем следующим образом: дуги, принадлежащие трафарету, разбиваем согласно разбиению границ множества $T \cap D_1$ (рис. 3); дуги, являющиеся частями дуг S , S_1 и S_2 , относим к тому множеству, которое они ограничивают.

Докажем, что при данном разбиении покрывки ни в одной из частей Φ_1, \dots, Φ_5 не будет расстояния r_0 .

Сначала разберемся с точками третьего множества: докажем, что для любых $X, Y \in \Phi_3$ выполнено $\rho(X, Y) \neq r_0$. На рис. 4 видно, что сдвинутая покрывка лежит правее дуги $A_3B_7(O)$. Если это так, то, конечно, в Φ_3 нет точек на расстоянии r_0 . Докажем, что рисунок правильный. Для этого возьмем любую из интересных нам точек (x, y) покрывки и убедимся в том, что

$$(x + \varepsilon)^2 + (y - r_0)^2 \leq r_0^2, \quad (2)$$

т.е. что в результате сдвига эта точка окажется в нужной части трафарета. Так как для точек (x, y) покрывки выполняется цепочка эквивалентных неравенств

$$\begin{aligned} x^2 + (y - (r_0 + \varepsilon))^2 \leq (r_0 + \varepsilon)^2 &\iff (x + \varepsilon - \varepsilon)^2 + (y - r_0 - \varepsilon)^2 \leq (r_0 + \varepsilon)^2 \iff \\ &\iff (x + \varepsilon)^2 - 2(x + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon^2 + (y - r_0)^2 - 2(y - r_0)\varepsilon + \varepsilon^2 \leq r_0^2 + 2r_0\varepsilon + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

то для того, чтобы выполнялось условие (2), достаточно, чтобы

$$-(x + \varepsilon) - (y - r_0) + \frac{\varepsilon}{2} \geq r_0.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$-(x + y) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0.$$

Положим

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r_0 \leq r \leq r_0 + \varepsilon, \\ y = r(\sin \varphi + 1). \end{cases}$$

Тогда неравенство переписывается в следующем виде:

$$\cos \varphi + \sin \varphi \leq -\left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) \iff \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right).$$

Поскольку

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right),$$

достаточно, чтобы

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right).$$

Множитель в скобках в правой части неравенства мало отличается от 1:

$$1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} < 1.058.$$

Тогда значения φ можно оценить следующим образом:

$$3.202 < \varphi < 4.652; \quad 184^\circ < \varphi < 266^\circ.$$

Иными словами, для выполнения условия (2), достаточно, чтобы точка (x, y) лежала в третьей четверти системы координат с началом в центре круга D , а оно (по доказанному) так и есть.

Теперь проверим, что не возникает проблем с точками пятого множества, т.е. что дуга $A_6B_4(O)$ не будет пересекаться со сдвинутой на ε вправо дугой S_1 покрышки. Уравнение S_1 :

$$(x - \varepsilon)^2 + y^2 = 1,$$

координаты точки B_4 :

$$\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6} + \sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{3} - \sqrt{2}}{2} \right).$$

Если пересечение в точке B_4 , то

$$\varepsilon = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{3} - \sqrt{2}}{2} \right)^2}.$$

Сравним его с $\varepsilon_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. После цепочки преобразований убеждаемся, что $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$. Таким образом, сдвиг покрышки вправо на $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max}]$ для точек пятого множества проблем не создает.

Вид Φ_4 будет зависеть от расположения точки

$$Q = Q(\varphi) = ((r_0 + \varepsilon) \cos \varphi, (r_0 + \varepsilon)(1 + \sin \varphi)).$$

Положим

$$Q_* = Q(\pi) = (-(r_0 + \varepsilon), (r_0 + \varepsilon)), \quad Q^* = Q\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(r_0 + \varepsilon), \frac{3}{2}(r_0 + \varepsilon)\right).$$

Рассмотрим покрышки

$$U(Q^*) = U(r_0 + \varepsilon, Q^*), \quad U(Q_*) = U(r_0 + \varepsilon, Q_*), \quad U(Q) = U(r_0 + \varepsilon, Q(\varphi)),$$

$$\frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi.$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая

Лемма 2. $U(Q) \subseteq U(Q^*) \cup U(Q_*)$.

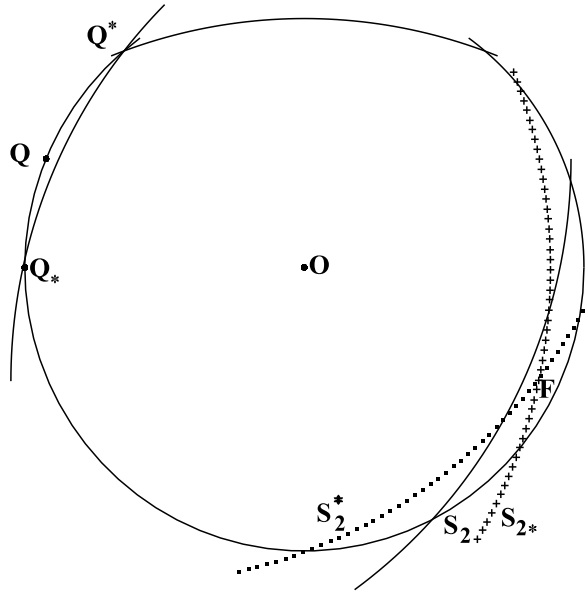


Рис. 6. Расположение покрывок $U(Q)$

Доказательство леммы 2. Пусть S_2^* и S_{2*} — дуги окружностей единичного радиуса с центрами в точках Q^* и Q_* соответственно, лежащие в круге $D(r_0 + \varepsilon)$. Пусть также $F = S_{2*} \cap S_2^*$ (рис. 6). Так как $\rho(Q_*, O) = \rho(Q^*, O) = (r_0 + \varepsilon) < 1$, а $\rho(Q_*, F) = \rho(Q^*, F) = 1$, то единичная окружность с центром в точке F пересекает S в точках Q_* и Q^* , а значит, $\rho(Q, F) > 1$. Следовательно, дуга S_2 окружности единичного радиуса с центром в точке Q пройдет левее точки F (рис. 6). Лемма доказана.

Утверждение леммы 2 позволяет сделать вывод, что дуга $A_2B_6(O)$ будет лежать за границей любой покрывки в том случае, когда она окажется за границей $U(Q_*)$ и $U(Q^*)$.

Очевидно, для четвертого множества покрывки $U(Q_*)$ достаточно проверить, что граница $A_2B_6(O)$ не будет пересекаться сдвинутой на ε вправо дугой S_2 .

Точки S_2 удовлетворяют уравнению

$$(x + (r_0 + \varepsilon))^2 + (y - (r_0 + \varepsilon))^2 = 1,$$

а значит,

$$x + \varepsilon = \sqrt{1 - (y - (r_0 + \varepsilon))^2} - r_0.$$

Мы знаем, что $A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_0, \frac{1}{2}r_0\right)$. Таким образом, достаточно проверить, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r_0 + \varepsilon > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}r_0 - r_0 - \varepsilon\right)^2} - r_0 \iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)r_0 + \varepsilon > \sqrt{1 - \left(\varepsilon + \frac{r_0}{2}\right)^2}.$$

При $\varepsilon > 0$ левая часть неравенства возрастает, а правая убывает. Но даже при $\varepsilon = 0$ верно

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)r_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2},$$

и все в порядке.

С четвертым множеством покрывки $U(Q^*)$ не возникнет проблем, если расстояния от точек A_2 и B_6 до сдвинутой вправо на ε точки Q^* (обозначим её через $Q^*(\varepsilon)$) будут не

меньше единицы:

$$\begin{cases} \rho(Q^*(\varepsilon), A_2) \geq 1, \\ \rho(Q^*(\varepsilon), B_6) \geq 1. \end{cases}$$

Для доказательства приведенных неравенств полезны следующие соотношения, которым удовлетворяют координаты лежащих на окружности S точек A_2 и B_6 :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}r_0 &= r_0 \cos \frac{11\pi}{6} = x(A_2) < x(B_6) = r_0 \cos \varphi < r_0, \\ \frac{1}{2}r_0 &= r_0 \left(1 + \sin \frac{11\pi}{6}\right) = y(A_2) < y(B_6) = r_0(1 + \sin \varphi) < r_0, \\ \frac{11\pi}{6} &\leq \varphi < 2\pi, \\ x^2 + y^2 - 2r_0y &= x^2 + (y - r_0)^2 - r_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Каждое из проверяемых неравенств в координатной форме будет иметь следующий вид:

$$\left(x - \varepsilon + \frac{\sqrt{3}}{2}(r_0 + \varepsilon)\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}(r_0 + \varepsilon)\right)^2 - 1 \geq 0,$$

а с учетом соотношений, указанных выше:

$$(4 - \sqrt{3})\varepsilon^2 + \left((6 - \sqrt{3})r_0 - 3y - (2 - \sqrt{3})x\right)\varepsilon + 3r_0^2 + r_0(\sqrt{3}x - y) - 1 \geq 0, \quad (3)$$

где вместо x, y подставляем координаты соответствующей точки. Заметим, что в левой части неравенства мы получили многочлен второй степени относительно ε , коэффициенты которого при подстановке координат точек A_2 и B_6 положительные, т.к.

$$\begin{aligned} (6 - \sqrt{3})r_0 - 3y - (2 - \sqrt{3})x &> r_0 > 0, \\ 3r_0^2 + r_0(\sqrt{3}x - y) - 1 &= 3r_0^2 + 2r_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_0 \cos \varphi - \frac{1}{2}r_0(1 + \sin \varphi)\right) - 1 = \\ &= 2r_0^2 \left(1 + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 > 2r_0^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех положительных значений ε неравенство (3) выполнено.

Нижние части множеств Φ_1 и Φ_2 , очевидно, без расстояния r_0 . Так нижняя часть множества Φ_1 покрышки целиком лежит в соответствующем множестве трафарета. А точки из нижней части Φ_2 , для которых $x^2 + (y - r_0)^2 > r_0^2$, т.е. выходящие за границы соответствующего множества трафарета, дальше всего от точек B_3 и A_2 , но и эти расстояния, очевидно, меньше r_0 (рис. 4, 2).

Верхние части Φ_1, Φ_2 рассмотрим в конце параграфа 3.5.

3.5. Разбиение покрышек $U(r_0 + \varepsilon, Q)$, $Q \in L_2(r_0 + \varepsilon)$: поворот с вертикальным сдвигом

Рассмотрим оставшиеся покрышки $U(r_0 + \varepsilon, Q)$, где $Q = Q(\varepsilon, \varphi)$ — точка с координатами $((r_0 + \varepsilon) \cos \varphi, (r_0 + \varepsilon)(1 + \sin \varphi))$, а ε, φ удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sin \varphi)} - r_0, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}. \quad (4)$$

Каждую покрывку сначала повернем по часовой стрелке так, чтобы оси симметрии трафарета и покрывки совпали (это можно сделать единственным образом). Затем сдвинем покрывку вниз на $2\varepsilon + \delta(\varepsilon)$ (параллельный перенос на вектор $(0, -2\varepsilon - \delta(\varepsilon))$), выбрав величину $\delta(\varepsilon)$, обеспечивающую положение дуги трафарета $B_4B_5(O)$ за границей S покрывки (рис. 7, 2). Очевидно, что величина $\delta(\varepsilon)$ не убывает по ε и не должна быть слишком большой, чтобы не создать проблем для остальных множеств разбиения. Найдем ее из условия, что граница покрывки максимального радиуса пересекает дугу в точке B_4 :

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon) &\leq \delta \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{3} - \sqrt{2}}{2}} - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) < 0.004. \end{aligned}$$

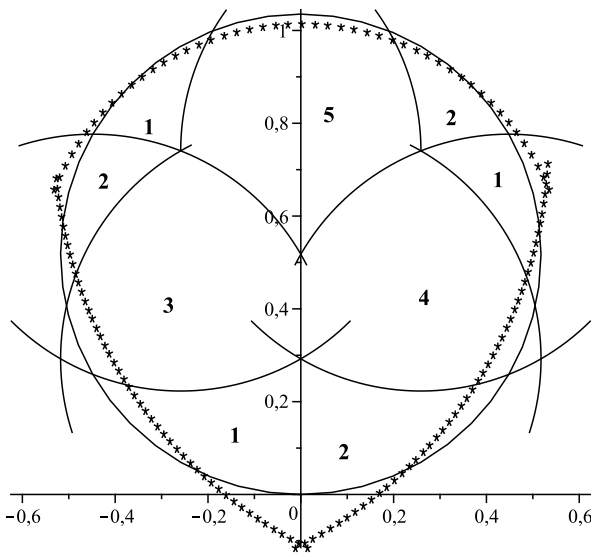


Рис. 7. Поворот с вертикальным сдвигом

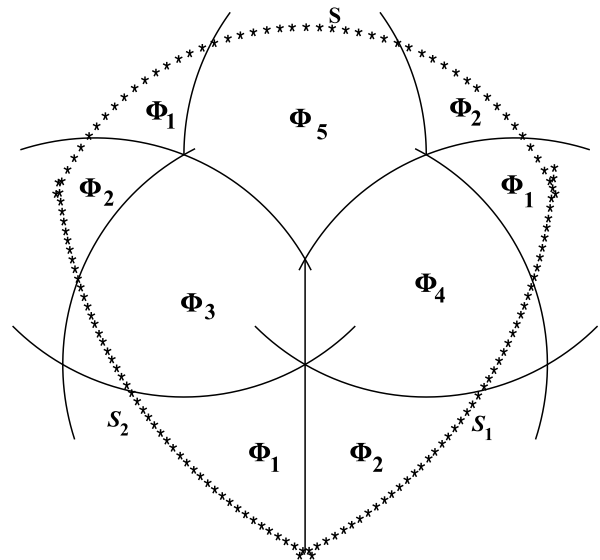


Рис. 8. Разбиение покрывки

Далее индуцируем разбиение на части Φ_1, \dots, Φ_5 (рис. 8) аналогично тому, как мы делали это в параграфе 3.4 для горизонтального сдвига. Понятно, что благодаря сдвигу в пятом множестве расстояния r_0 не будет.

Пользуясь симметричностью покрывки и трафарета, будем проверять только одно из каждой пары симметричных множеств разбиения. Для множества Φ_4 убедимся, что дуга $A_2B_6(O)$ лежит за границей S_1 покрывки. Оценим расстояние от повернутой и сдвинутой точки A_1 покрывки до произвольной точки P на дуге $A_2B_6(O)$ трафарета. Оно должно быть больше 1. Координаты точек удобно представить в виде

$$A_1 = (-a(r_0 + \varepsilon), b(r_0 + \varepsilon) - 2\varepsilon - \delta(\varepsilon)), \quad P = (cr_0, dr_0), \quad a, b, c, d > 0, \quad d < 1 < b < 2.$$

После простых преобразований получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho^2(A_1, P) &= [(a + c)^2 + (d - b)^2] r_0^2 + \\ &+ 2r_0\delta(\varepsilon)(d - b) + 2[(c + a)a + (d - b)(2 - b)] r_0\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + [\delta(\varepsilon) + (2 - b)\varepsilon]^2. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся конкретным видом параметров: $a = -\cos \alpha$, $b = (1 + \sin \alpha)$, α — угол во второй четверти, и убедимся, что третье слагаемое неотрицательное:

$$(c + a)a + (b - d)(b - 2) = a^2 + b^2 - 2b + ac + d(2 - b) > a^2 + b^2 - 2b = \\ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 - 2(1 + \sin \alpha) = 0.$$

Следовательно,

$$\rho^2(A_1, P) > [(a + c)^2 + (d - b)^2] r_0^2 + 2r_0 \delta(\varepsilon)(d - b) > \\ > [(a + c)^2 + (d - b)^2] r_0^2 - 0.008r_0(b - d).$$

Правая часть неравенства не зависит от ε , т.е. можем положить $\varepsilon = 0$ и работать с покрывшей радиуса r_0 .

Тогда

$$A_1 = A_1(\alpha) = (-a(\alpha)r_0, b(\alpha)r_0)$$

и

$$[(a + c)^2 + (d - b)^2] r_0^2 = [(a(\alpha) + c)^2 + (d - b(\alpha))^2] r_0^2 = \rho^2(A_1(\alpha), P) =: \lambda(\alpha, P).$$

Во-первых, уточним интервал изменения угла α :

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{11\pi}{12}, \quad (5)$$

где φ удовлетворяет соотношению (4).

Во-вторых, заметим (рис. 9), что угол $A_2OA_1(\frac{5\pi}{6})$ равен π , а угол A_2OB_6 больше, чем $\frac{\pi}{12}$. Следовательно, при всех рассматриваемых α, P верно следующее неравенство:

$$\lambda(\alpha, P) \geq \min \left(\lambda \left(\frac{11\pi}{12}, A_2 \right), \lambda \left(\frac{5\pi}{6}, B_6 \right) \right).$$

Используя для оценки координаты точек A_2 и B_6 , приведенные в параграфе 3.1, и учитывая, что $0.008r_0(b - d) \leq 0.008$, получим

$$\rho^2(A_1, P) > \lambda(\alpha, P) - 0.008r_0(b - d) > 1.047 - 0.008 > 1.$$

Рассмотрим нижнюю правую часть Φ_2 (рис. 10).

Пусть $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right]$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (5). Положим

$$K_\varepsilon = (0, -2\varepsilon - \delta(\varepsilon)), \quad P_\varepsilon = P_\varepsilon(\alpha) = (x, y),$$

где числа x, y принадлежат интервалу $(0, r_0)$ и являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{r_0}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{r_0}{2} \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}} \right) \right)^2 = r_0^2, \\ (x - (r_0 + \varepsilon) \cos \alpha)^2 + (y - (r_0 + \varepsilon)(1 + \sin \alpha) + 2\varepsilon + \delta(\varepsilon))^2 = 1. \end{cases}$$

Первому уравнению системы удовлетворяют точки, лежащие на дуге $B_3A_2(B_2)$, а второму — точки границы S_1 (рис. 8).

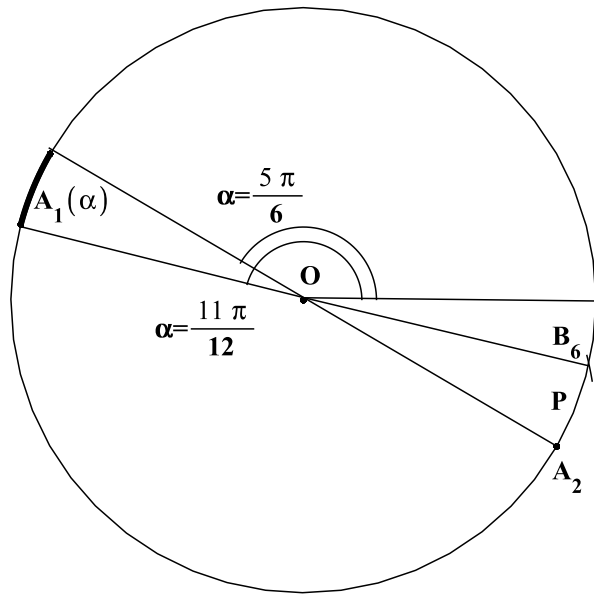


Рис. 9. Варианты расположения точки A_1 после поворота покрышки

При фиксированном ε точка K_ε дальше от точки P_ε , если угол α больше (рис. 11, 12). Используя соотношения (4), (5), получим, что меньшему $\varphi(\varepsilon)$ соответствует большее $\alpha(\varepsilon)$, для которого справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon + r_0)^2 &= \frac{1}{2(1 + \sin \varphi)} \iff 1 + \sin \varphi = \frac{1}{2(\varepsilon + r_0)^2} \iff 1 + \sin \left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha \right) = \frac{1}{2(\varepsilon + r_0)^2} \iff \\
 &\iff 1 + \cos 2\alpha = \frac{1}{2(\varepsilon + r_0)^2} \iff 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2(\varepsilon + r_0)^2} \implies \\
 &\implies \cos \alpha = -\frac{1}{2(r_0 + \varepsilon)}, \quad 1 + \sin \alpha = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4(r_0 + \varepsilon)^2}}.
 \end{aligned}$$

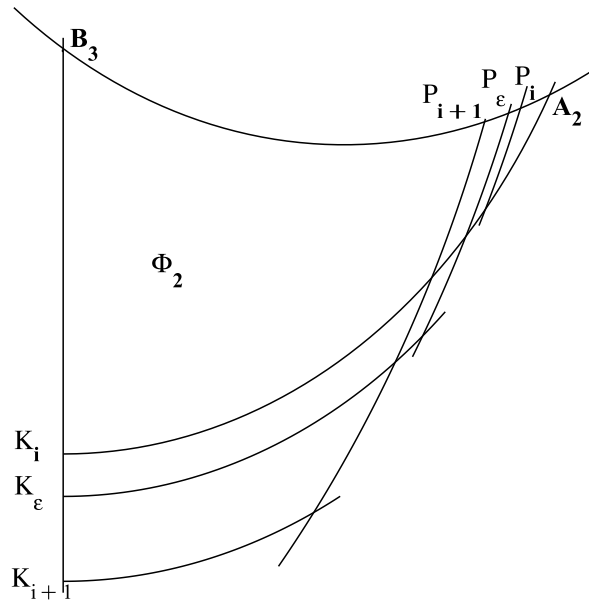
И система для координат точки P_ε примет вид

$$\begin{cases} \left(x - \frac{r_0}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{r_0}{2} \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}} \right) \right)^2 = r_0^2, \\ \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - (r_0 + \varepsilon) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4(r_0 + \varepsilon)^2}} \right) + 2\varepsilon + \delta(\varepsilon) \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Далее через K_i и P_i обозначим точки, соответствующие K_ε и P_ε при $\varepsilon = \varepsilon_i$, $i = 0, \dots, 5$. В таблице для

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0.25\varepsilon_5, \quad \varepsilon_2 = 0.5\varepsilon_5, \quad \varepsilon_3 = 0.75\varepsilon_5, \quad \varepsilon_4 = 0.8\varepsilon_5$$

приведены результаты расчетов координат точек K_i и P_i , выполненных с округлениями,

Рис. 10. Множество Φ_2 правое нижнее

увеличивающими расстояния, т. е. $\rho(K_\epsilon, P_\epsilon) \leq \rho(K_i, P_i)$ при $\epsilon = \epsilon_i$.

Округленные координаты точек K_i, P_i

K_0	(0, -0.004)	P_0	(0.417, 0.248)
K_1	(0, -0.034)	P_1	(0.398, 0.242)
K_2	(0, -0.064)	P_2	(0.384, 0.239)
K_3	(0, -0.094)	P_3	(0.372, 0.236)
K_4	(0, -0.1)	P_4	(0.369, 0.235)
K_5	(0, -0.124)	P_5	(0.361, 0.233)

Оценка расстояний $\rho(K_i, P_j)$

	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	P_0
K_0						0.49
K_1					0.49	0.51
K_2				0.49	0.51	
K_3			0.5	0.51		
K_4		0.5	0.51			
K_5	0.51	0.515				

Данные таблицы используются следующим образом: если $\epsilon_i \leq \epsilon \leq \epsilon_{i+1}$, то $\rho(P_\epsilon, K_\epsilon) \leq \rho(P_i, K_{i+1})$, $i = 0, \dots, 4$ (рис. 10).

Осталось объяснить, почему в Φ_2 не будет точек, для которых расстояние до точки B_3 равно r_0 . Покажем, что Φ_2 лежит внутри круга $D(r_0, B_3)$ с центром в B_3 и радиусом r_0 и не имеет точек на его границе. Для этого найдем координаты точки пересечения границы $D(r_0, B_3)$ с окружностью, ограничивающей покрывку максимального радиуса,

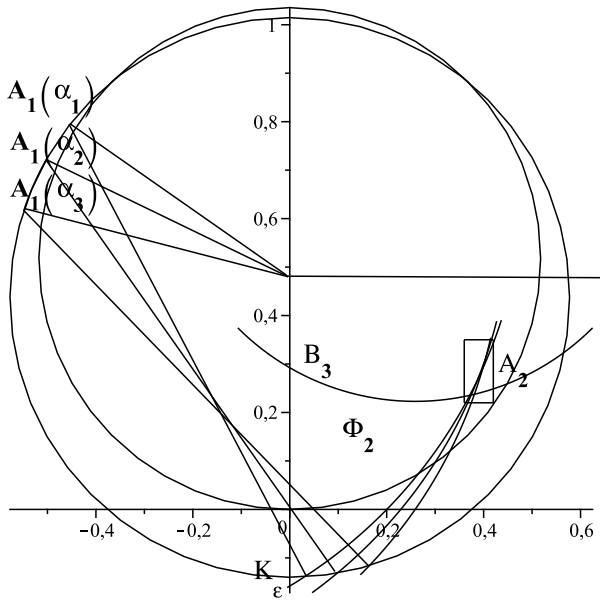


Рис. 11. Граница $S_1(\alpha)$, $\frac{5\pi}{6} \leq \alpha \leq \alpha(\varepsilon)$

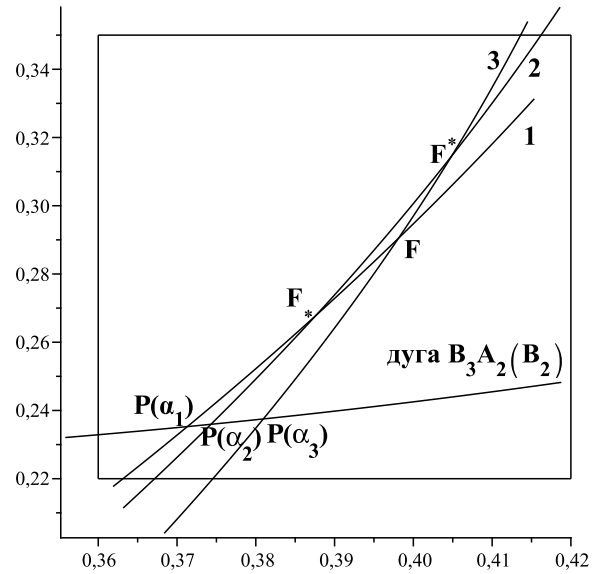


Рис. 12. Точки $P(\alpha)$, $\frac{5\pi}{6} \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$

т.е. решение системы

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \left(1 + \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} \right) \right)^2 = 2 - \sqrt{3}, \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right) + 0.004 \right)^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Полученная точка $P = (0.503 \dots, 0.171 \dots)$ лежит правее точки $P_0 = (0.417 \dots, 0.248 \dots)$ (заметим, что во втором уравнении системы мы взяли вместо числа $\delta \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)$ его оценку 0.004 и тем самым сдвинули окружность покрывки ниже, а точку пересечения P левее), также $\rho(B_3, K_5) < 0.417 < r_0$. Следовательно, $\Phi_2 \subset D(r_0, B_3)$.

Что касается «мелких» верхних частей разбиения Φ_1 и Φ_2 , то, очевидно, достаточно рассмотреть только правые множества. Заметим, что Φ_1 для всех покрывок, рассмотренных в параграфах 3.4 и 3.5, накрывается множеством постоянной ширины r_0 (так называемым треугольником Рело), ограниченным дугами $OB_2(A_2)$, $B_3A_2(B_2)$, $A_2B_2(E)$, где E — правая точка пересечения дуг $OB_2(A_2)$, $B_3A_2(B_2)$. А Φ_2 всегда лежит в круге диаметра r_0 с центром в точке C , являющейся серединой отрезка B_4R , где $R = (x, y) = (0.610 \dots, 0.750 \dots)$ — точка пересечения дуги $OB_2(A_2)$ и окружности S , ограничивающей сдвинутую вправо покрывку максимального радиуса:

$$\begin{cases} (x - 0.5\sqrt{3}r_0)^2 + (y - 0.5r_0)^2 = r_0^2, \\ \left(x - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - r_0 \right) \right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3}, \\ y > 0.5r_0. \end{cases}$$

То, что $\Phi_2 \subset D(0.5r_0, C)$, следует из неравенств $\rho(B_4, R) < r_0$, $\rho(B_2, C) < 0.5r_0$, которые мы проверили стандартными вычислениями.

Автор благодарит профессора А. М. Райгородского за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука.— М.: МЦНМО, 2006.
2. *Райгородский А. М.* Хроматические числа.— М.: МЦНМО, 2003.
3. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001.— Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.
4. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Math. Intelligencer. — 2004. — V. 26, N 3. — P. 4–12.
5. *Сойфер А.* Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // Матем. просвещение.— 2004.— Вып. 8.
6. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике.— М.: МЦНМО, 2007.
7. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники.— Сер. «Современная математика». — 2007. — Т. 23. — С. 147–164.
8. *Филлимонов В. П.* О покрытии плоских множеств // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 127–160.
9. *Купавский А. Б., Райгородский А. М.* О разбиении трехмерных множеств на пять частей меньшего диаметра // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 2. — С. 208–219.
10. *Lenz H.* Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleineren Durchmesser // Jahresbericht d. DMV Bd. — 1956. — V. 58. — P. 87–97.
11. *Lenz H.* Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers // Arch. Math.— 1956.— V. VII. — P. 34–40.
12. *Хадвигер Г., Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия плоскости.— М.: Наука, 1965.
13. *Dembiński M., Lassak M.* Covering plane sets of three times less diameter // Demonstratio Math. — 1985. — V. XVIII. — P. 517–525.
14. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли.— М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию 04.06.2011