

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи про выразимость предикатов

1. Рассмотрим интерпретацию $\langle \mathcal{P}; M, E, P \rangle$, где \mathcal{P} — множество всех людей, $M(x)$ означает « x является мужчиной», $E(x, y)$ означает « x и y — супруги», $P(x, y)$ означает « x — родитель y ». Выразите в этой интерпретации следующие предикаты (о значении терминов можно проконсультироваться на странице <http://ru.wikipedia.org/wiki/Родство>):

- a) x — отец y ;
- b) x — бабушка y ;
- c) x — племянник¹ y ;
- d) x — свекровь y ;
- e) x — деверь y ;
- f) x и y — свояжи;
- g) x и y — двоюродные сёстры;
- h) x — единокровный брат y ;
- i) x — сводная сестра y .

2. Пусть A — некоторое множество, $M = 2^A$ — множество всех его подмножеств. Выразите в интерпретации $\langle M, \subset \rangle$ следующие предикаты:

- a) $x = \emptyset$;
- b) $x = A$;
- c) $x = y$;
- d) x есть одноэлементное множество;
- e) x есть двухэлементное множество;
- f) $x \cap y = \emptyset$;
- g) $x = y \cap z$;
- h) $x = y \cup z$;
- i) $x = A \setminus y$;
- j) Множества x , y и z пересекаются попарно, но общее пересечение пусто.

3. В интерпретации $\langle \mathbb{R}^2, C \rangle$, где $C(x, y, z)$ выполнено, если расстояние от x до y равняется расстоянию от x до z ($|xy| = |xz|$), выразите следующие предикаты:

- a) $x = y$;
- b) x , y и z лежат на одной прямой;
- c) $x \neq y$, $z \neq t$ и прямые xy и zt параллельны;
- d) $xyzt$ — параллелограмм;
- e) $|xy| = |zt|$;

¹Будьте внимательны: если x — сын y , то ваш предикат должен быть неверен. Обращайте внимание на подобные вещи и в последующих пунктах.

- f) $|xy| \leq |xz|$;
- g) z лежит на отрезке xy ;
- h) $z \neq t$, а x и y лежат по одну сторону от прямой zt ;
- i) $\triangle xyz$ прямоугольный;
- j) $\triangle xyz$ остроугольный;
- k) $\angle xyz = 30^\circ$;
- l) $\angle xyz = 36^\circ$.

4. В интерпретации $\langle \mathbb{R}^2, E \rangle$, где $E(x, y)$ выполнено, $|xy| = 1$, выразите следующие предикаты:

- a) $x = y$;
- b) $|xy| = 2$;
- c) $|xy| = \sqrt{3}$;
- d) $|xy| = \frac{1}{2}$;
- e) $|xy| = \sqrt{2}$;

Говорят, что $f(N) = O(g(N))$, если существует такое число c , что при всех N верно $f(N) < cg(N)$.

5. Докажите, что если для некоторых c и M при всех $N > M$ верно $f(N) < cg(N)$, то $f(N) = O(g(N))$.

6. Выразите следующие предикаты формулами заданной длины. Всюду N является параметром, а не переменной.

- a) $x = y + N$ в интерпретации $\langle \mathbb{N}, S \rangle$, где $S(x) = x + 1$, длина формулы $O(\log N)$.
- b) « x — прапра...прабабушка y » в интерпретации $\langle \mathcal{P}; M, E, P \rangle$, длина формулы $O(\log N)$;
- c) « x — N -юродный брат y » в интерпретации $\langle \mathcal{P}; M, E, P \rangle$, длина формулы $O(\log N)$;
- d) « x есть N -элементное множество» в интерпретации $\langle 2^A, \subset \rangle$, длина формулы $O(\log N)$;
- e) «Множества x_1, x_2, \dots, x_N различны» в интерпретации $\langle 2^A, \subset \rangle$, длина формулы $O(N)$;
- f) «Любые три множества из x_1, x_2, \dots, x_N имеют пустое общее пересечение» в интерпретации $\langle 2^A, \subset \rangle$, длина формулы $O(N)$;
- g) «Точки x_1, x_2, \dots, x_N суть вершины выпуклого N -угольника» в интерпретации $\langle \mathbb{R}^2, C \rangle$, длина формулы $O(N)$;
- h) $|xy| = N$ в интерпретации $\langle \mathbb{R}^2, E \rangle$, длина формулы $O(\log N)$;

7. Используя предикаты \leq , $<$ и $=$, запишите в виде замкнутых формул следующие свойства отношения порядка:

- a) Рефлексивность;
- b) Антисимметричность;
- c) Транзитивность;
- d) Линейность;

- e) Плотность;
- f) Существование минимального элемента;
- g) Существование максимального элемента;
- h) Существование наименьшего элемента;
- i) Существование наибольшего элемента;
- j) Существование верхней грани для любых двух элементов (верхняя грань двух элементов — элемент, больший либо равный каждому из них);
- k) Существование нижней грани для любых двух элементов (нижняя грань двух элементов — элемент, меньший либо равный каждому из них);
- l) Существование точной верхней грани для любых двух элементов (точная верхняя грань — наименьшая из всех верхних граней);
- m) Существование точной нижней грани для любых двух элементов (точная нижняя грань — наибольшая из всех нижних граней).