

УДК 533.65.013.622

Д.А. Кравченко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Оптимизация законов движения машущего крыла, создающего силу тяги при полете летательного аппарата с постоянной скоростью

Рассматривается задача оптимизации траектории движения машущего крыла, создающего только силу тяги, при полете летательного аппарата с постоянной скоростью в горизонтальном направлении. Критерием оптимизации является минимум потребляемой энергии при заданном значении горизонтальной составляющей аэродинамических сил, действующих на крыло и наличии ограничений на траекторию крыла.

Ключевые слова: машущее крыло, оптимальное управление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, минимизация потребляемой энергии.

I. Введение

Задача о машущем полете привлекает внимание учёных во всем мире на протяжении длительного времени интересными научными, коммерческими и военными перспективами. Такие беспилотные летательные аппараты (БЛА) ввиду предполагаемой маневренности, незаметности и возможной экономичности могли бы выполнять задачи, связанные с работой в труднодоступных пространствах, в неблагоприятной среде, а также задачи разведки и промышленного мониторинга.

В связи с этим в настоящее время активно ведутся работы по созданию летательных аппаратов (ЛА) с машущими крыльями различных компоновок, с различными функциональными характеристиками для различных поставленных задач.

Существует большое количество теоретических исследований и экспериментальных данных, касающихся аэродинамики и динамики полета этих аппаратов, а также ряд экспериментальных аппаратов. В работах [1, 2] были представлены исследования малых колебаний профиля в идеальной жидкости с целью получить качественное представление о движении машущего крыла. В них принимается модель бесконечно тонкой вихревой пелены, сходящей с профиля. Также рассматривалось движение крыла, колеблющегося с конечными амплитудами, учитывалось влияние вязко-

сти потока [3]. Существует также большое количество численных расчётов. Они описывают как движение профиля [4], так и трёхмерное обтекание крыла [5]. Различным образом моделируется вихревой след за профилем, с тем чтобы проследить влияние нелинейности и нестационарности потока [4]. Однако на данный момент в литературе наиболее полно освещены вопросы нахождения аэродинамических характеристик крыла, сил и моментов, действующих на него, как правило, при заданных законах движения крыла. Поэтому представляет интерес вопрос о том, как задать эти законы, чтобы рассматриваемые величины имели наиболее оптимальное значение. Кроме того, большинство работ посвящено движению профиля, тогда как влияние индуктивного сопротивления может оказаться существенным. В литературе показано [1–3], что существуют режимы, на которых влияние нестационарности не очень значительно. Исследования в данной работе проведены именно для таких режимов.

II. Постановка задачи

Рассматривается задача минимизации потребляемой энергии машущего крыла при движении летательного аппарата в горизонтальном направлении с постоянной скоростью. Значение горизонтальной составляющей аэродинамических сил задано, не накладывается никаких ограничений на их вертикальную составляющую.

Задача рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ (ось Ox — горизонтальна, её положительное направление противоположно направлению движения летательного аппарата, ось Oy направлена вертикально вверх).

Принимаются следующие допущения:

1) движение крыла плоское, то есть любые две точки крыла движутся в параллельных плоскостях (параллельных плоскости Oxy);

2) аэродинамические характеристики крыла в каждый момент времени зависят только от скорости и ориентации крыла в этот момент времени, то есть считается, что влияние эффектов нестационарности на потребление энергии при машущем движении незначительно;

3) крыло абсолютно жёсткое (не меняет форму под воздействием нагрузок), а его масса и момент инерции равны нулю (то есть скорость крыла и его ориентация в пространстве могут меняться мгновенно).

Поскольку в принятых предположениях движение крыла определяется только его положением и ориентацией в пространстве, его можно полностью описать тремя переменными x, y, C_y , где x, y — координаты крыла в направлении осей Ox, Oy , соответственно, C_y — коэффициент подъёмной силы крыла.

Пусть скорость ЛА равна V_∞ , горизонтальная и вертикальная компоненты скорости крыла в системе отсчёта, связанной с ЛА, равны соответственно u и v (рис. 1). Тогда полная скорость крыла V равна

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (1)$$

а его эффективная скорость V_{ef} (полная скорость крыла в системе отсчёта, связанной с землей)

$$V_{ef} = \sqrt{(V_\infty - u)^2 + v^2}.$$

Подъёмная сила крыла направлена перпендикулярно эффективной скорости крыла и равна $Y = C_y \rho V_{ef}^2 S / 2$, а сила сопротивления направлена против направления скорости и равна $X = C_x \rho \frac{V_{ef}^2}{2} S$, где C_x — коэффициент сопротивления крыла, ρ — плотность воздуха, S — площадь крыла. Считаем, что поляра крыла описывается зависимостью $C_x = C_{x0} + AC_y^2$, где C_{x0} ,

A — некоторые константы. Следовательно, горизонтальная составляющая аэродинамических сил, действующих на крыло, равна:

$$\begin{aligned} C_y \rho \frac{V_{ef}^2}{2} S \left(\frac{v}{V_{ef}} \right) + C_x \rho \frac{V_{ef}^2}{2} S \frac{V_\infty - u}{V_{ef}} = \\ = C_y \rho \frac{V_{ef}}{2} S v + C_x \rho \frac{V_{ef}}{2} S (V_\infty - u) = F, \end{aligned} \quad (2)$$

где F — некоторая заданная величина.

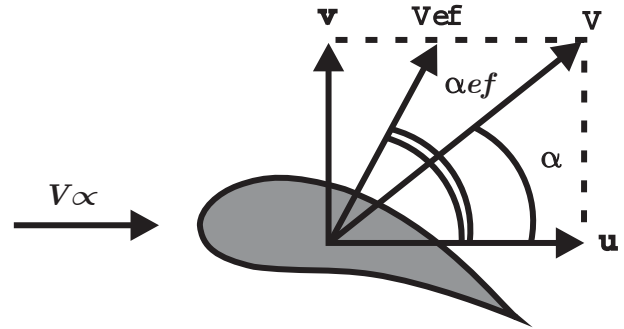


Рис. 1. Скорость крыла в системах отсчёта, связанных с ЛА и землей

Мощность, необходимая для преодоления силы сопротивления, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} W = F_v V = (Y \cos(\gamma - \varphi) - X \sin(\gamma - \varphi)) V = \\ = \left(-C_x \rho \frac{V_{ef}^2}{2} S \frac{u^2 + v^2 - u V_\infty}{V V_{ef}} + \right. \\ \left. + C_y \rho \frac{V_{ef}^2}{2} S \frac{v V_\infty}{V V_{ef}} \right) V, \end{aligned}$$

где α_{ef}, γ — эффективный угол атаки и угол наклона траектории к горизонту, соответственно; $\varphi = \pi/2 - \alpha_{ef}$. Отсюда

$$W = \frac{\rho S}{2} V_{ef} (C_y V_\infty v - C_x (u^2 + v^2 - V_\infty u)),$$

а энергия, израсходованная за время движения T , равна

$$E = \int_0^T W dt.$$

Считаем, что коэффициент сопротивления зависит только от C_y . Также предполагаем, что направление и модуль скорости крыла могут мгновенно изменяться на конечную величину (то есть инерционные свойства крыла не учитываются в силу равенства нулю его массы и момента инерции).

Пусть движение некоторой характерной точки крыла (рис. 2) в плоскости Oxy ограничено некоторой замкнутой линией

$$\Phi(x,y) \leq 0, \quad (3)$$

где x,y — координаты этой точки. Будем считать, что положение крыла в пространстве описывается координатами этой характерной точки. Следует ожидать, что при больших значениях T крыло может касаться границы Φ или даже двигаться вдоль нее.

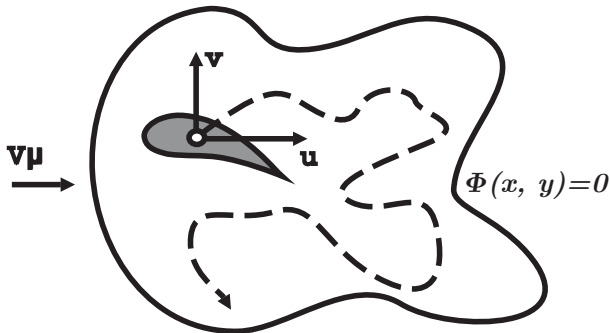


Рис. 2. Движение характерной точки крыла в заданных ограничениях

Решается задача поиска оптимального управления крылом при помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина [6]. В качестве управляющих переменных выбраны C_y , u и v .

III. Решение задачи

Поскольку в задаче существуют ограничения на фазовые переменные, то следует учитывать [6] кинематические соотношения:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v.$$

Поскольку в уравнение границы не входит управление, то для гамильтониана следует использовать условие [6]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}u + \frac{\partial\Phi}{\partial y}v = 0. \quad (4)$$

С учётом (1)–(4) минимизируемая функция Гамильтона H имеет вид [6]:

$$H = P_x u + P_y v + P_F \left(F - C_y \rho \frac{V_{ef}}{2} S v - C_x \rho \frac{V_{ef}}{2} S (V_\infty - u) \right) + \frac{\rho S}{2} V_{ef} (C_y V_\infty v + C_x (V_\infty u - u^2 - v^2)) +$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} u + \frac{\partial\Phi}{\partial y} v \right),$$

где P_x, P_y — сопряженные переменные для u и v , P_F — множитель Лагранжа для условия (2), μ — множитель Лагранжа для граничного условия (3), причём $\mu > 0$ на границе, $\mu = 0$ внутри границы.

Задача распадается на два случая: движение внутри ограничения и движение по границе.

Рассмотрим первый случай.

Поскольку гамильтониан явно не зависит от времени, то H будет постоянной [6].

Условие оптимальности по C_y даёт

$$\frac{\partial H}{\partial C_y} = 0 \Rightarrow -P_F \left(v + \frac{dC_x}{dC_y} (V_\infty - u) \right) + v V_\infty + \frac{dC_x}{dC_y} (V_\infty u - u^2 - v^2) = 0. \quad (5)$$

Внутри границы $\mu = 0$ и условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow P_x + P_F \frac{\rho S}{V_{ef}} (C_y v (V_\infty - u) + C_x (v^2 + 2(V_\infty - u)^2)) + \frac{\rho S}{V_{ef}} C_y v V_\infty (V_\infty - u) - \frac{\rho S}{V_{ef}} C_x (3u^3 + 3uv^2 - 7u^2 V_\infty - 2v^2 V_\infty + 5u V_\infty^2 - V_\infty^3) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \Rightarrow P_y - P_F \frac{\rho S}{V_{ef}} (C_y (2v^2 + (V_\infty - u)^2) + C_x v (V_\infty - u)) + C_y \frac{\rho S}{V_{ef}} V_\infty (2v^2 + (V_\infty - u)^2) - \frac{\rho S}{V_{ef}} C_x (3v^3 - 5uv V_\infty + 3u^2 v + 2v V_\infty^2) = 0. \quad (7)$$

Соотношения (2), (5), (6), (7) представляют собой систему уравнений для движения внутри ограничений.

Поскольку внутри ограничений гамильтониан явно не зависит от x, y , то P_x, P_y в этой области будут постоянными [6]. Таким образом, имеется четыре алгебраических уравнения относительно четырёх переменных P_F, C_y, u, v при фиксированных P_x, P_y . Решением этой системы будут один (или несколько) наборов

фиксированных значений P_F, C_y, u, v . Это означает, что внутри ограничений эти переменные сохраняют постоянное значение, то есть крыло должно двигаться по прямой линии с постоянной скоростью и постоянными значениями аэродинамических сил.

В общем случае нужно «срассить» решение на ограничении и внутри него, но, так как решение на границе существенно зависит от её формы, которая задается приводом крыла или другими конструкционными особенностями, а также ввиду того, что рассматриваемая система уравнений существенно нелинейна, сделать это аналитически в общем виде может оказаться невозможным. Поэтому рассмотрим некоторые характерные частные случаи.

1. Отсутствуют ограничения на траекторию, координаты в конечный момент не фиксированы. Тогда P_x и P_y равны нулю [6], а уравнения (6), (7) приводятся к виду

$$\begin{aligned} P_F(C_y v(V_\infty - u) + C_x(v^2 + 2(V_\infty - u)^2)) + \\ + C_y v V_\infty (V_\infty - u) - C_x(3u^3 + 3uv^2 - 7u^2 V_\infty - \\ - 2v^2 V_\infty + 5u V_\infty^2 - V_\infty^3) = 0 \\ P_F(C_y(2v^2 + (V_\infty - u)^2) + C_x v(V_\infty - u)) - \\ - C_y V_\infty(2v^2 + (V_\infty - u)^2) + \\ + C_x(3v^3 - 5uv V_\infty + 3u^2 v + 2v V_\infty^2) = 0, \end{aligned}$$

что даёт следующее условие:

$$-\frac{C_x}{C_y} = \frac{u - V_\infty}{v}.$$

Используя его, а также уравнения (2), (5), запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\rho S}{2} V_{ef} (C_y v + C_x (V_\infty - u)) &= F, \\ \frac{3}{2} v (V_\infty - u) + AC_y ((V_\infty - u)^2 - 2v^2) &= 0, \\ V_\infty - u &= v \frac{C_x}{C_y}. \end{aligned}$$

Отсюда получим решение

$$C_y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{1 - 4AC_{x_0} - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}}},$$

$$v = \pm A \sqrt{\frac{2F}{\rho S}} \times$$

$$\times \left(\frac{128}{27} \frac{1 - 4AC_{x_0} - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}}}{(1 - 8AC_{x_0} - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}})^3} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$u = V_\infty - A \sqrt{\frac{F}{2\rho S}} (1 - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}}) \times$$

$$\times \left(\frac{27}{128} (1 - 4AC_{x_0} - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}}) \times \right.$$

$$\left. \times (1 - 8AC_{x_0} - \sqrt{1 - 32AC_{x_0}})^3 \right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Поскольку направление вертикальной компоненты скорости и подъёмной силы зависит только от выбранного в формулах знака и не зависит от конкретных значений входящих в них величин, очевидно, что решение симметрично относительно v и C_y . Также легко заметить, что u имеет одинаковый знак в обоих случаях.

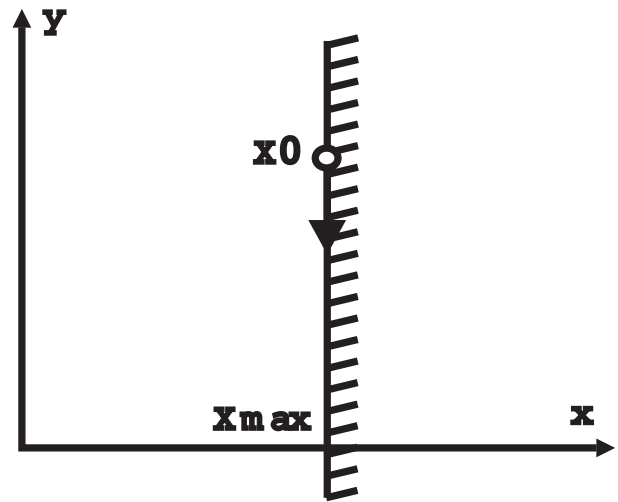


Рис. 3. Движение крыла в ограничении $x \leq x_{\max}$ с начальным условием $x_0 = x_{\max}$

2. Крыло может двигаться в ограничении $x \leq x_{\max}$ (рис. 3). На координату y ограничения не накладываются, а координата крыла в начальный момент времени равна x_{\max} . В этом случае P_y тождественно равна нулю, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$. Если движение заканчивается внутри области ограничений, то крыло должно двигаться в направлении от ограничений. Но так как в этом случае конечное значение P_x будет равно нулю, решение аналогично предыдущему

случаю и крыло должно иметь составляющую скорости по направлению к ограничению. Полученное противоречие показывает, что такое движение реализоваться не может и, следовательно, движение заканчивается на ограничении, а скорость u равна нулю на протяжении всего полета. Тогда система уравнений сводится к виду:

$$\begin{aligned} P_F \left(v + \frac{dC_x}{dC_y} V_\infty \right) - v V_\infty + \frac{dC_x}{dC_y} v^2 &= 0, \\ P_F(C_y(2v^2 + V_\infty^2) + C_x v V_\infty) - \\ - C_y V_\infty(2v^2 + V_\infty^2) + C_x(3v^3 + 2v V_\infty^2) &= 0, \\ F - C_y \rho \frac{\sqrt{v^2 + V_\infty^2}}{2} S v - \\ - C_x \rho \frac{\sqrt{v^2 + V_\infty^2}}{2} S V_\infty &= 0. \end{aligned}$$

В качестве примера исследовалось численное решение этой системы для следующего набора параметров: $C_{x0} = 0,02$; $A = 0,016$; $\rho = 1,29$ кг/м³; $S = 0,05$ м², $F = 3$ Н, размах крыла — 1 м. Расчёт показал, что КПД крыла при этом будет максимален при $V_\infty = 8$ м/с. В этом случае $C_y = 1,08$, $v = -7,91$ м/с, $W = 25,8$ Вт, $\eta = 0,931$, где η — КПД машущего крыла, определяемый как $\eta = FV_\infty/W$. При $C_{x0} = 0,01$ и неизменных остальных параметрах $C_y = 0,85$, $v = -9,18$ м/с, $W = 25,27$ Вт, $\eta = 0,951$ (максимальное значение по скорости). Для сравнения был взят винт АВ-31 эквивалентного диаметра 1 м [7]. Максимальный КПД этого винта имеет значение $\eta = 0,9$. Таким образом, крыло, совершающее движение вдоль ограничения с постоянной скоростью, по крайней мере, не уступает в эффективности винту. Однако очевидно, что технически рассматриваемый случай не может быть реализован.

3. Пусть теперь крыло, двигаясь в прежнем ограничении, в начальный момент времени находится внутри ограничения ($x_0 < x_{\max}$) (рис. 4). Если время движения T не слишком велико, то крыло закончит движение внутри ограничений, и решение будет аналогично решению для случая без ограничений (см. пункт 1). Если же T достаточно велико, то крыло может, по крайней мере, коснуться ограничения. И, повторяя рассуждения пункта 2, можно сделать вывод, что его координата в конечный момент времени будет равна x_{\max} . Тогда возможны два случая: либо

траектория крыла будет прямолинейной, и оно будет все время двигаться внутри ограничений с конечной точкой на ограничении, либо существует ненулевой отрезок времени, когда крыло движется по ограничению. Пусть $\tau = L/u$ — время движения крыла внутри ограничения, $T - \tau$ — время движения по ограничению, u — скорость движения крыла по горизонтали, L — ширина области ограничений по оси Ox , W_1 и W_2 — мощности, затрачиваемые при движении внутри области ограничений и на границе соответственно.

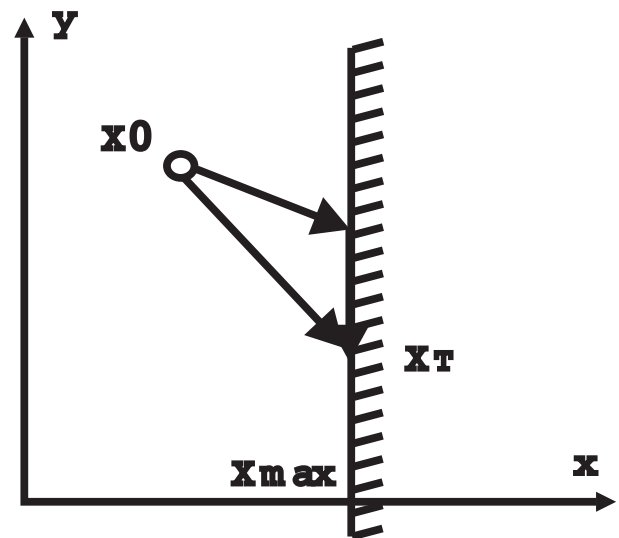


Рис. 4. Движение крыла в ограничении $x \leq x_{\max}$ с начальным условием $x_0 < x_{\max}$

При движении по первому участку мощность была бы минимальной, если бы крыло двигалось с той же скоростью u , что и в пункте 1 для случая без ограничений, но этого не происходит из-за наличия ограничения на координату в конечный момент времени. Однако ясно, что функция $W_1(u)$ имеет минимум в этой точке. Тогда её можно аппроксимировать параболической зависимостью в окрестности этой точки (решение поучится приближённым, но, вероятнее всего, результат останется справедливым и в точном случае):

$$W_1 = W_0 + z(u - u_0)^2,$$

где u_0 — оптимальная скорость для движения без ограничений, $W_0 = W_1(u_0)$, z — производная функции W_1 в этой точке.

Выражение для полной энергии на обоих участках имеет вид

$$\begin{aligned} E &= \tau(W_0 + z(u - u_0)^2) + (T - \tau)W_2 = \\ &= W_2 T + (W_0 + z(u - u_0)^2 - W_2) \frac{L}{u}. \end{aligned}$$

Эта функция имеет минимум в точке

$$u_* = \pm \sqrt{u_0^2 + \frac{W_0 - W_2}{z}}$$

и, учитывая, что

$$W_2 = W_1(u = 0) = W_0 + zu_0^2,$$

получим $u_* = 0$. Движение с такой скоростью противоречит условию, наложенному на координату в конечный момент времени, но можно сделать вывод, что минимальным затратам энергии соответствует случай, когда крыло на протяжении всего времени T движется внутри ограниченной по прямолинейной траектории, оказываясь на ограничении лишь в конечный момент времени. Следует отметить, что и в этом случае при движении в положительном и отрицательном направлении оси y , получим одинаковый результат, то есть решение симметрично.

4. Добавим к прежним ограничениям ограничение слева на координату x . Теперь крыло движется внутри вертикальной полосы $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Но так как в пункте 1 было найдено, что крыло всегда должно иметь составляющую скорости по направлению к правому ограничению, то ограничение слева несущественно и результат, полученный в пункте 3, для этого случая не изменится.

5. Добавим теперь ограничения сверху и снизу по координате y (рис. 5). Тогда крыло будет двигаться в прямоугольнике $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$. В этом случае нужно было бы решать задачу с самого начала с учётом ограничений. Однако легко заметить, что при отражении траектории крыла, полученной в пункте 3, от горизонтальной границы минимум исследуемой функции не изменится, то есть любое другое решение будет, по крайней мере, не лучше. Следовательно, траекторию в виде ломаной линии с точками излома на границе можно считать одним из оптимальных решений.

Заметим, что при отражении траектории от горизонтальной границы подъёмная сила Y меняет знак. Следовательно, при достаточно большом времени движения T средняя величина подъёмной силы, действующей на крыло, равна нулю.

Отметим также, что при больших значениях времени полёта T каждый отрезок

этой ломаной линии будет практически параллелен правой границе, поэтому КПД крыла будет практически таким же, как в случае 2. Однако в моменты излома траектории будут формироваться дополнительные вихри, которые будут уменьшать КПД машущего крыла. В связи с этим сравнение винта и машущего крыла требует более тщательных исследований. Как показывает вышеприведённый пример для случая 2, КПД винта и крыла имеют высокие значения, весьма близкие друг к другу. В связи с этим не следует говорить о преимуществах машущего крыла по сравнению с винтом с точки зрения экономии энергии, по крайней мере, для рассматриваемой постановки задачи.

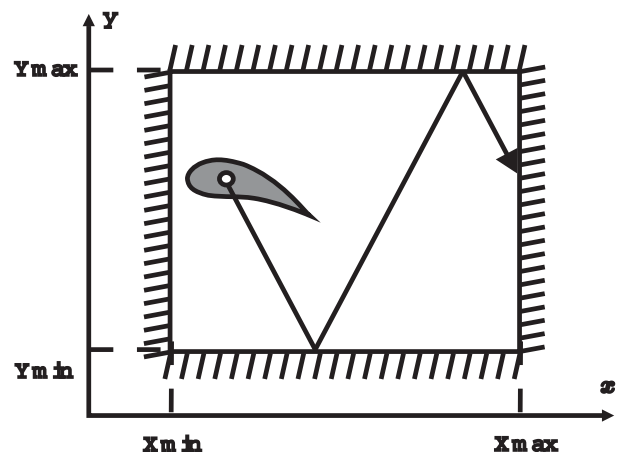


Рис. 5. Движение крыла в ограничении $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$

IV. Выводы

1. Приведен краткий анализ ранее выполненных работ, из которого можно заключить, что существуют режимы, на которых влияние нестационарности незначительно. Также можно заметить, что вопросу оптимизации движения крыла в литературе уделяется недостаточно внимания.

2. Предложен метод отыскания решения задачи на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина.

3. Получены оптимальные траектории движения машущего крыла, обеспечивающие минимизацию потребляемой энергии при заданном значении горизонтальной составляющей силы, действующей на крыло, для движения без ограничений и для ряда вариантов ограничений.

4. Полученные решения симметричны.

5. Внутри ограничений крыло должно двигаться по прямой линии с постоянной скоростью и постоянным значением C_y .

6. При наличии ограничений в виде прямоугольной области траектория представляет собой ломаную линию с точками излома на границе. При достаточно большом времени T среднее значение вертикальной составляющей аэродинамических сил равно нулю.

7. Максимальные значения КПД для машущего крыла в рамках рассматриваемой модели и воздушного винта тех же размеров практически одинаковы.

Литература

1. *Garrick I.E.* Propulsion of flapping and oscillating airfoil // NASA. — 1936. — Report № 567.
2. *Theodorsen T.* General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter // NASA. — 1935. — Report № 469.
3. *Голубев В.В.* Труды по аэродинамике. — М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957.
4. *Jones K.D., Platzer M.F.* An experimental and numerical investigation of flapping-wing propulsion // AIAA. — 1999.
5. *Hall K.C., Hall S.R.* A Rational Engineering Analysis of the Efficiency of Flapping Flight // AIAA. — 2001.
6. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
7. *Липин А.В., Остроухов С.П., Серохвостов С.В., Устинов М.В., Шустов А.В., Флакман Я.Ш.* Экспериментальное исследование зависимости характеристик воздушного винта от числа Рейнольдса // Ученые записки ЦАГИ. — 2007. — Т. XXVIII, № 3–4.

Поступила в редакцию 24.04.2008.