УДК 517.982.252

Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой

Рассматриваются опорные условия сильной и слабой выпуклости относительно несимметричной полунормы. Получены теорема о диаметре эпсилон-проекции на множество, удовлетворяющее опорному условию слабой выпуклости, теорема о существовании и единственности проекции точки из чебышевского слоя такого множества, а также теорема о том, что для пары, состоящей из множеств, удовлетворяющих опорным условиям сильной и слабой выпуклости соответственно и находящихся достаточно близко друг к другу, существует и единственна пара ближайших (в смысле несимметричной полунормы) точек.

Ключевые слова: сильная и слабая выпуклость, метрическая проекция.

1. Введение

Хорошо известна важная роль выпуклого анализа при исследовании задач оптимизации и аппроксимации. В последнее время развивается параметрически выпуклый анализ, который в отличие от классического выпуклого анализа рассматривает выпуклость не только как качественное понятие, но и путем введения характеристик сильной и слабой выпуклости придает этому понятию количественный характер. Анализ количественных характеристик (параметров) выпуклости приводит к более детальному исследованию задач и позволяет применять данные методы не только к выпуклым, но и к невыпуклым (слабо выпуклым) объектам. Исследованию различных классов сильно и слабо выпуклых множеств посвящены работы [1], [2], [5], [7] – [9], в которых сильная и слабая выпуклость множества определяется через норму банахова пространства. В работе [3] показано, что методы параметрически выпуклого анализа можно развить и для так называемой несимметричной нормы, при этом роль шара играет несимметричный квазишар. В настоящей работе мы отказываемся не только от симметричности, но и от ограниченности квазишара, что позволяет применять развиваемые здесь методы к надграфикам функций, которые являются неограниченными множествами. Здесь под квазишаром понимается выпуклое замкнутое множество, для которого ноль является внутренней точкой. Функция Минковского такого квазишара представляет собой несимметричную полунорму и используется в определениях опорных условий сильной и слабой выпуклости.

2. Определения и обозначения

Пусть E – банахово пространство. Через $\operatorname{int} X$, ∂X и $\overline{X}$ будем обозначать соответственно внутренность, границу и замыкание множества $X \subset E$. Значения функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$ будем обозначать $\langle p, x\rangle$.

Определение 2.1. *Суммой Минковского* множеств $X \subset E$ и $Y \subset E$ называется множество

$$X + Y = \left\{ x + y \;\middle|\; x \in X,\ y \in Y \right\}.$$

Определение 2.2. *Диаметром* множества $X \subset E$ называется величина

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} \|x - y\|.$$

Определение 2.3. *Шаром* радиуса $d \geqslant 0$ с центром в точке $a \in E$ называется множество

$$B_d(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leqslant d\}.$$

Определение 2.4. *Квазишаром* M в банаховом пространстве E называется выпуклое замкнутое множество $M \subset E$, для которого $0 \in \operatorname{int} M$.

Заметим, что квазишар M является шаром относительно некоторой нормы, эквивалентной исходной норме пространства E, тогда и только тогда, когда он ограничен относительно исходной нормы E и симметричен, т.е. $-M = M$.

Определение 2.5. *Функцией Минковского* квазишара M называется функция $\mu_M : E \to [0; +\infty)$ такая, что

$$\mu_M(x) = \inf \left\{t > 0 \middle| \, x \in tM\right\} \qquad \forall \, x \in E.$$

Определение 2.6. Функция $\mu : E \to \mathbb{R}$ называется *несимметричной полунормой*, если она *положительно однородна*:

$$\mu(\lambda x) = \lambda \mu(x) \qquad \forall \, x \in E \quad \forall \, \lambda \geqslant 0$$

и *субаддитивна*:

$$\mu(x + y) \leqslant \mu(x) + \mu(y) \qquad \forall \, x, y \in E.$$

Замечание 2.1. Известно, что функция $\mu : E \to [0, +\infty)$ является несимметричной полунормой тогда и только тогда, когда она является функцией Минковского некоторого квазишара.

Определение 2.7. Пусть $M \subset E$ – квазишар. *M-расстоянием* от множества $X \subset E$ до множества $Y \subset E$ называется величина

$$\varrho_M(X, Y) = \inf_{x \in X, \; y \in Y} \mu_M(x - y).$$

В частности, M-расстояние от точки $x \in E$ до множества $Y \subset E$ определяется формулой

$$\varrho_M(x, Y) = \inf_{y \in Y} \mu_M(x - y).$$

Замечание 2.2. Непосредственно из определений следует, что

$$\varrho_M(x, Y) = \inf \left\{t > 0 \middle| \, x \in Y + tM\right\} = \inf \left\{t > 0 \middle| \, Y \bigcap (x - tM) \neq \emptyset\right\}.$$

Определение 2.8. Пусть $M \subset E$ – квазишар. *M-проекцией* точки $x \in E$ на множество $Y \subset E$ называется множество

$$P_M(x, Y) = Y \bigcap (x - \varrho_M(x, Y) M).$$

Также при $\varepsilon > 0$ определим ε-M-проекцию точки $x \in E$ на множество $Y \subset E$:

$$P_M^{\varepsilon}(x, Y) = Y \bigcap \Big(x - (\varrho_M(x, Y) + \varepsilon) M\Big).$$

Определение 2.9. Будем говорить, что множество $X \subset E$ удовлетворяет *опорному условию сильной выпуклости* относительно квазишара $M \subset E$, если

$$X - x \subset M - \frac{y - x}{\varrho_M(y, X)} \qquad \forall \, y \in E \setminus X \; \forall \, x \in P_M(y, X).$$

Определение 2.10. Будем говорить, что множество $Y \subset E$ удовлетворяет *опорному условию слабой выпуклости* относительно квазишара $M \subset E$, если

$$Y \bigcap \left(y + \frac{x - y}{\varrho_M(x, Y)} - \operatorname{int} M\right) = \emptyset \qquad \forall \, x \in E \setminus Y \; \forall \, y \in P_M(x, Y).$$

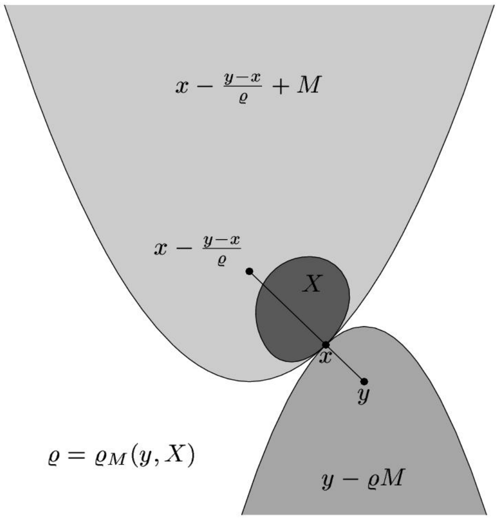

Рис. 1. Опорное условие сильной выпуклости

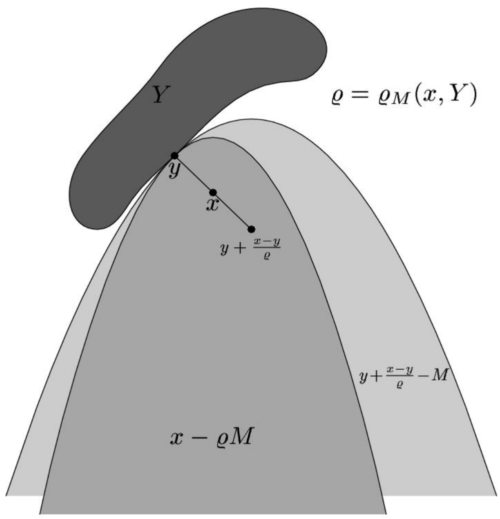

Рис. 2. Опорное условие слабой выпуклости

Замечание 2.3. Если $x \in E \backslash Y$, $y \in P_M(x, Y)$, то $0 \neq x - y \in \varrho_M(x, Y)M$ и, следовательно, $\varrho_M(x, Y) > 0$. Таким образом, в определениях 2.9 и 2.10 знаменатели не обращаются в ноль.

Определение 2.11. Множество $X \subset E$ называется *параболичным*, если для любого вектора $b \in E$ множество $\left(b + \frac{1}{2}X\right) \setminus X$ ограничено.

Определение 2.12. Множество $X \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если

$$\delta_X^d(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, d > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

где

$$\delta_X^d(\varepsilon) = \sup\left\{\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \;\Big|\; B_\delta\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset X \quad \forall\, x, y \in X \cap B_d(0): \quad \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}. \tag{1}$$

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. *Пусть $M \subset E$ – квазишар, $Y \subset E$. Тогда*

(i) $\varrho_M(x_1, Y) - \varrho_M(x_2, Y) \leqslant \mu_M(x_1 - x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in E$;

(ii) для любого вектора $x \in E$ такого, что $\varrho_M(x, Y) > 0$, справедливо соотношение

$$x \notin Y + \varrho_M(x, Y)\,\mathrm{int}\, M.$$

Если дополнительно для числа $\sigma > 0$ выполнено включение $B_\sigma(0) \subset M$ (такое σ существует, т.к. $0 \in \mathrm{int}\, M$), то

(iii) функция $\varrho_M(\cdot, Y)$ удовлетворяет условию Липшица на E с константой $\frac{1}{\sigma}$ и

(iv) для любых положительных чисел ε_1, ε_2 и векторов $x_1, x_2 \in E$ таких, что $\|x_1 - x_2\| \leqslant \sigma\varepsilon_2$, справедливо включение $P_M^{\varepsilon_1}(x_1, Y) \subset P_M^{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}(x_2, Y)$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения M-расстояния и субаддитивности функции Минковского. Если $B_\sigma(0) \subset M$, то $\mu_M(x) \leqslant \frac{\|x\|}{\sigma}$ для любого вектора $x \in E$.

Докажем утверждение (ii). Предположим противное: существует точка $x \in (x - \varrho_M(x, Y)\,\mathrm{int}\, M) \cap Y$. Тогда $\frac{x - x}{\varrho_M(x, Y)} \in \mathrm{int}\, M$. Следовательно, существует число $t \in (0, \varrho_M(x, Y))$ такое, что $\frac{x - x}{t} \in M$. Поэтому $x \in Y + tM$ и $\varrho_M(x, Y) \leqslant t < \varrho_M(x, Y)$. Противоречие.

Применяя утверждение (i), получаем утверждение (iii).

Докажем утверждение (iv). Так как $\pm(x_2 - x_1) \in \varepsilon_2 B_\sigma(0) \subset \varepsilon_2 M$, то справедливо неравенство $\max\{\mu_M(x_2 - x_1), \mu_M(x_1 - x_2)\} \leqslant \varepsilon_2$. Отсюда и из утверждения (i) следует, что

$\varrho_M(x_1, Y) \leqslant \varrho_M(x_2, Y) + \varepsilon_2$. Поэтому для любого вектора $y \in P_M^{\varepsilon_1}(x_1, Y)$ справедливы неравенства $\mu_M(x_2 - y) \leqslant \varepsilon_2 + \mu_M(x_1 - y) \leqslant \varepsilon_2 + \varrho_M(x_1, Y) + \varepsilon_1 \leqslant \varrho_M(x_2, Y) + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$. Следовательно, $y \in P_M^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(x_2, Y)$.

□

Лемма 3.2. *Любое замкнутое выпуклое множество $Y \subset E$ удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно любого квазишара $M \subset E$.*

Доказательство. Пусть заданы точки $x_0 \in E \setminus Y$ и $y_0 \in P_M(x_0, Y)$. Обозначим $\varrho_0 = \varrho_M(x_0, Y)$, $z_0 = \frac{x_0 - y_0}{\varrho_0}$. Так как $y_0 \in P_M(x_0, Y)$, то $x_0 - y_0 \in \varrho_0 M$, т.е. $z_0 \in M$. Согласно лемме 3.1 (*ii*) имеем $x_0 \notin Y + \varrho_0 \operatorname{int} M$. Следовательно, $Y \cap (x_0 - \varrho_0 \operatorname{int} M) = \emptyset$. В силу теоремы об отделимости существует функционал $p \in E^*$ такой, что

$$\langle p, y\rangle < \langle p, x_0\rangle - \varrho_0\langle p, z\rangle \qquad \forall\, y \in Y \quad \forall\, z \in \operatorname{int} M.$$

Следовательно,

$$\langle p, y\rangle \leqslant \langle p, x_0\rangle - \varrho_0\langle p, z_0\rangle = \langle p, y_0\rangle \qquad \forall\, y \in Y, \tag{2}$$

$$\langle p, y_0\rangle < \langle p, x_0\rangle - \varrho_0\langle p, z\rangle \qquad \forall\, z \in \operatorname{int} M,$$

то есть

$$\langle p, z\rangle < \langle p, z_0\rangle \qquad \forall\, z \in \operatorname{int} M. \tag{3}$$

Складывая неравенства (2) и (3), получаем

$$\langle p, y + z\rangle < \langle p, y_0 + z_0\rangle \qquad \forall\, y \in Y \quad \forall\, z \in \operatorname{int} M.$$

Поэтому $y_0 + z_0 \notin Y + \operatorname{int} M$, а значит, $Y \bigcap \left(y_0 + \frac{x_0 - y_0}{\varrho_M(x_0, M)} - \operatorname{int} M\right) = \emptyset$. Используя определение 2.10, получаем требуемое утверждение. □

Для любого множества $Y \subset E$ определим

$$\gamma_M(Y) = \sup_{x \in E} \varrho_M(x, Y),$$

$$S_M(Y) = \{x \in E :\ 0 < \varrho_M(x, Y) < \gamma_M(Y)\},$$

$$T_M(Y) = \{x \in E :\ \text{множество } P_M(x, Y) \text{ одноэлементно}\}.$$

В работе [4] рассматривается более сильное условие параболичности. Однако доказательство теоремы 1.2 работы [4] остается справедливым, если условие параболичности понимать в смысле определения 2.11. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.1. Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл, множество $Y \subset E$ замкнуто. Тогда множество $T_M(Y)$ всюду плотно в $S_M(Y)$, т.е. $S_M(Y) \subset \overline{T_M(Y)}$.

Лемма 3.3. *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $Y \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно квазишара RM. Пусть $\gamma_M(Y) > 0$. Тогда $\gamma_M(Y) \geqslant R$.*

Доказательство. Так как $\sup_{x \in E} \varrho_M(x, Y) = \gamma_M(Y) > 0$, то найдется точка $x_0 \in E$ такая, что $\varrho_M(x_0, Y) > 0$. Зафиксируем точку $y_0 \in Y$. Тогда $\varrho_M(y_0, Y) = 0$. Поскольку согласно лемме 3.1 (*iii*) функция $\varrho_M(\cdot, Y)$ непрерывна, то на отрезке $[x_0, y_0]$ найдется точка x_1 такая, что $0 = \varrho_M(y_0, Y) < \varrho_M(x_1, Y) < \varrho_M(x_0, Y) \leqslant \gamma_M(Y)$. Следовательно, $x_1 \in S_M(Y)$. Согласно предложению 3.1 и в силу замкнутости Y существует точка $x \in T_M(Y) \setminus Y$. Следовательно, найдется $y \in P_M(x, Y)$. Обозначая $b = y + R\frac{x - y}{\varrho_M(x, Y)}$, в силу определения 2.10 имеем $Y \cap (b - R \operatorname{int} M) = \emptyset$. Следовательно, $\varrho_M(b, Y) \geqslant R$. Поэтому $\gamma_M(Y) \geqslant \varrho_M(b, Y) \geqslant R$.
□

Далее нам понадобится следующий аналог леммы 2.1 работы [4], доказательство которого аналогично доказательству леммы 2.1 из [4].

Предложение 3.2. Пусть множество $M \subset E$ выпукло и параболично, пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $x_1, x_2 \subset E$. Тогда множество $(\lambda_1 M + x_1) \setminus (\lambda_2 M + x_2)$ ограничено.

Лемма 3.4. *Пусть квазишар $M \subset E$, векторы $x, y \in E$ и число $d > 0$ удовлетворяют неравенствам $0 < \|x\| \leqslant d \cdot \mu_M(x), 0 < \|y\| \leqslant d \cdot \mu_M(y)$.* Тогда

$$\frac{\min\{\mu_M(x), \mu_M(y)\}}{d} \cdot \delta_M^d \left(\left\| \frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)} \right\| \right) \leqslant \mu_M(x) + \mu_M(y) - \mu_M(x+y), \qquad (4)$$

где величина $\delta_M^d(\cdot)$ определена формулой (1).

Доказательство. Обозначим

$$a = \frac{x}{\mu_M(x)}, \qquad b = \frac{y}{\mu_M(y)}, \qquad c = \frac{a+b}{2}, \qquad \delta = \delta_M^d(\|a-b\|).$$

Так как $a, b \in M \cap B_d(0)$, то $\|c\| \leqslant d$. Используя равенство (1), получаем включение $B_\delta(c) \subset M$. Поэтому $c\left(1 + \frac{\delta}{d}\right) \in M$ и, следовательно, $\mu_M(c) \leqslant \frac{1}{1+\frac{\delta}{d}}$. Поскольку $\delta = \delta_M^d(\|a-b\|) \leqslant \frac{\|a-b\|}{2} \leqslant d$, то справедливо неравенство

$$\mu_M(c) \leqslant 1 - \frac{\delta}{2d}. \qquad (5)$$

Обозначим $\mu_1 = \mu_M(x)$, $\mu_2 = \mu_M(y)$. Без потери общности можно считать, что $\mu_2 \leqslant \mu_1$. Далее используем выпуклость и положительную однородность функции μ_M и учитываем, что $\mu_M(a) = 1$:

$$\mu_M(x+y) = \mu_M((\mu_1-\mu_2)a+\mu_2(a+b)) \leqslant (\mu_1-\mu_2)\cdot\mu_M(a)+\mu_2\cdot\mu_M(a+b) = \mu_1-\mu_2+2\mu_2\cdot\mu_M(c).$$

Используя оценку (5), получаем

$$\mu_M(x+y) \leqslant \mu_1 + \mu_2 - \frac{\mu_2\delta}{d} = \mu_1 + \mu_2 - \frac{\delta}{d}\min\{\mu_1, \mu_2\}.$$

□

Лемма 3.5. *Пусть в банаховом пространстве E заданы ограниченно равномерно выпуклый квазишар M и ограниченные последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ такие, что*

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_M(x_k) \leqslant \mu_1, \qquad \limsup_{k\to\infty} \mu_M(y_k) \leqslant \mu_2, \qquad \liminf_{k\to\infty} \mu_M(x_k+y_k) \geqslant \mu_1 + \mu_2,$$

где $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{x_k}{\mu_1} - \frac{y_k}{\mu_2} \right\| = 0.$$

Доказательство. Поскольку в силу субаддитивности функции Минковского

$$\mu_M(x_k+y_k) \leqslant \mu_M(x_k) + \mu_M(y_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

то в силу условий леммы получаем, что существуют следующие пределы:

$$\lim_{k\to\infty} \mu_M(x_k) = \mu_1, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_M(y_k) = \mu_2, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_M(x_k+y_k) = \mu_1 + \mu_2. \qquad (6)$$

Без потери общности будем считать, что $\mu_M(x_k) \geqslant \frac{\mu_1}{2}$, $\mu_M(y_k) \geqslant \frac{\mu_2}{2}$ для любых $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу ограниченности последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ выражение

$$d = \sup_{k\in\mathbb{N}} \max\left\{ \frac{\|x_k\|}{\mu_M(x_k)}, \frac{\|y_k\|}{\mu_M(y_k)} \right\}$$

конечно. Применяя лемму 3.4, получаем, что

$$\frac{\min\{\mu_1,\mu_2\}}{2d}\cdot\delta_M^d\left(\left\|\frac{x_k}{\mu_M(x_k)}-\frac{y_k}{\mu_M(y_k)}\right\|\right)\leqslant \mu_M(x_k)+\mu_M(y_k)-\mu_M(x_k+y_k)\to 0 \quad (k\to\infty).$$

Отсюда в силу ограниченной равномерной выпуклости множества M имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x_k}{\mu_M(x_k)}-\frac{y_k}{\mu_M(y_k)}\right\|=0.$$

Используя ограниченность последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ и соотношения (6), получаем требуемое утверждение. □

4. Основные результаты

Теорема 4.1. (О диаметре ε-проекции). *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $Y\subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно квазишара RM. Пусть заданы число $r\in(0,R)$, вектор $b\in E$, последовательность векторов $\{x_k\}\subset b-rM$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\varrho_M(x_k,Y)=\varrho_0\in(0,R-r)$, и бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}P_M^{\varepsilon_k}(x_k,Y)=0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\varepsilon_0=\frac{1}{8}\min\{\varrho_0,R-r-\varrho_0\}. \tag{7}$$

Без потери общности будем считать, что

$$\varepsilon_k\leqslant\varepsilon_0,\qquad |\varrho_M(x_k,Y)-\varrho_0|\leqslant\varepsilon_0\qquad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

В силу леммы 3.3 справедливо неравенство $R\leqslant\gamma_M(Y)$. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства $0<\varrho_0-\varepsilon_0\leqslant\varrho_M(x_k,Y)\leqslant\varrho_0+\varepsilon_0<R\leqslant\gamma_M(Y)$, а значит, и включения $x_k\in S_M(Y)$. Поскольку M – квазишар, то существует число $\sigma>0$ такое, что $B_\sigma(0)\subset M$. Поэтому согласно предложению 3.1 для любого $k\in\mathbb{N}$ существует вектор $z_k\in B_{\sigma\varepsilon_k}(x_k)\cap T_M(Y)$. Из пункта (iii) леммы 3.1 следуют неравенства

$$|\varrho_M(z_k,Y)-\varrho_M(x_k,Y)|\leqslant\varepsilon_k\qquad\forall\, k\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

а из пункта (iv) этой же леммы получаем включения

$$P_M^{\varepsilon_k}(x_k,Y)\subset P_M^{3\varepsilon_k}(z_k,Y)\qquad\forall\, k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

В силу включений (9) для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}P_M^{3\varepsilon_k}(z_k,Y)=0. \tag{10}$$

Так как $R-\varepsilon_0<R\leqslant\gamma_M(Y)$, то найдется вектор $b_1\in E$ такой, что $R-\varepsilon_0<\varrho_M(b_1,Y)$. Согласно лемме 3.1$(ii)$ имеем $b_1\notin Y+\varrho_M(b_1,Y)\operatorname{int}M$. Поэтому $b_1\notin Y+(R-\varepsilon_0)M$, а значит,

$$Y\subset E\setminus\Big(b_1-(R-\varepsilon_0)M\Big). \tag{11}$$

Если $y\in P_M^{3\varepsilon_k}(z_k,Y)$, то

$$y\in z_k-\Big(\varrho_M(z_k,Y)+3\varepsilon_k\Big)M\subset z_k-\Big(\varrho_0+5\varepsilon_k\Big)M\subset x_k-\Big(\varrho_0+6\varepsilon_k\Big)M\subset b-\Big(r+\varrho_0+6\varepsilon_0\Big)M.$$

Поэтому согласно включению (11) имеем

$$P_M^{3\varepsilon_k}(z_k, Y) \subset \Big(b - \Big(r + \varrho_0 + 6\varepsilon_0\Big)M\Big) \setminus \Big(b_1 - (R - \varepsilon_0)M\Big).$$

Поскольку из равенства (7) следует неравенство $r+\varrho_0+6\varepsilon_0 < R-\varepsilon_0$, то в силу предложения 3.2 получаем неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{y\in P_M^{3\varepsilon_k}(z_k,Y)} \|y\| < +\infty. \tag{12}$$

Так как $\varrho_M(z_k, Y) < \varrho_0 + 3\varepsilon_0$, то $z_k \in Y + (\varrho_0 + 3\varepsilon_0)M$. Отсюда и из включения (11) следует, что $z_k \notin \Big(b_1 - (R - \varrho_0 - 3\varepsilon_0)M\Big)$. Таким образом, учитывая включения $z_k \in x_k - \varepsilon_0 M \subset b - (r + \varepsilon_0)M$, получаем

$$z_k \in \Big(b - (r + \varepsilon_0)M\Big) \setminus \Big(b_1 - (R - \varrho_0 - 3\varepsilon_0)M\Big).$$

Учитывая неравенство $r+\varepsilon_0 < R-\varrho_0-3\varepsilon_0$ и еще раз применяя предложение 3.2, получаем неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|z_k\| < +\infty. \tag{13}$$

Так как $z_k \in T_M(Y)$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует точка $y_k \in P_M(z_k, Y)$. В силу определения 2.10 имеем

$$(a_k - R\,\mathrm{int}\ M) \cap Y = \emptyset \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где

$$a_k = y_k + \frac{z_k - y_k}{\mu_{RM}(z_k - y_k)} = y_k + R\frac{z_k - y_k}{\mu_M(z_k - y_k)}. \tag{15}$$

Зафиксируем произвольную последовательность $\{y'_k\}$ такую, что

$$y'_k \in P_M^{3\varepsilon_k}(z_k, Y) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Поскольку $y_k \in P_M(z_k, Y)$, то $\mu_M(z_k - y_k) = \varrho_M(z_k, Y)$, и, учитывая соотношения (8) и $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho_M(x_k, Y) = \varrho_0$, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \mu_M(z_k - y_k) = \varrho_0. \tag{17}$$

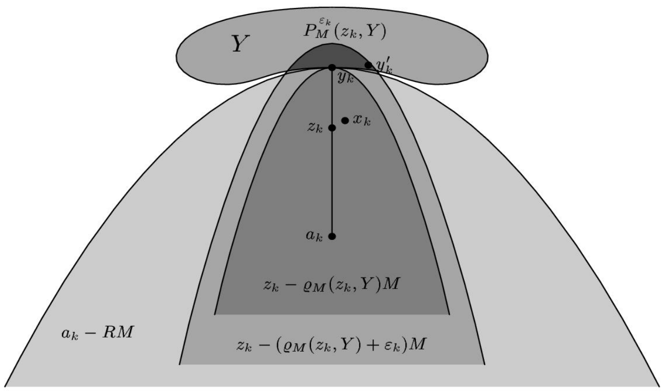

Рис. 3

Из соотношения (14) следует, что $\varrho_M(a_k, Y) \geqslant R$. Поэтому

$$\mu_M(a_k - y'_k) \geqslant R \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Используя соотношения (8), (16), получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_M(z_k - y'_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} \varrho_M(z_k, Y) = \varrho_0. \tag{19}$$

Поскольку согласно соотношению (15) справедливы равенства $\mu_M(a_k-z_k) = R-\mu_M(z_k-y_k)$, то в силу (17) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mu_M(a_k - z_k) = R - \varrho_0. \tag{20}$$

Из соотношений (12), (13), (15), (16), (17) получаем ограниченность последовательностей $\{z_k\}$, $\{y_k\}$, $\{y'_k\}$ и $\{a_k\}$. Отсюда и из соотношений (18) – (20) в силу леммы 3.5 приходим к равенству

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{a_k-z_k}{R-\varrho_0}-\frac{z_k-y'_k}{\varrho_0}\right\|=0. \tag{21}$$

Так как в силу (15) справедливы равенства $\frac{a_k-z_k}{R-\mu_M(z_k-y_k)}=\frac{z_k-y_k}{\mu_M(z_k-y_k)}$, то согласно соотношению (17) имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\frac{a_k-z_k}{R-\varrho_0}-\frac{z_k-y_k}{\varrho_0}\right\|=0$. Отсюда и из равенства (21) следует соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\|y_k-y'_k\|=0,$$

которое в силу произвольности последовательности $\{y'_k\}$, удовлетворяющей соотношению (16), дает требуемое равенство (10). □

Теорема 4.2 (о чебышевском слое). *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $Y\subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно квазишара RM. Пусть задана точка $x\in E$ такая, что $0<\varrho_M(x,Y)<R$. Тогда множество $P_M(x,Y)$ одноэлементно.*

Доказательство. Фиксируем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, монотонно сходящуюся к нулю. В силу теоремы 4.1 справедливо соотношение $\operatorname{diam} P_M^{\varepsilon_k}(x,Y)\to 0$ при $k\to\infty$. Отсюда из замкнутости и вложенности множеств $P_M^{\varepsilon_k}(x,Y)$ получаем, что множество $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}P_M^{\varepsilon_k}(x,Y)$ одноэлементно. Замечая, что $P_M(x,Y)=\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}P_M^{\varepsilon_k}(x,Y)$, получаем доказываемое утверждение. □

Замечание 4.1. В условиях теоремы 4.2 множество $\{x\in E\,|\;0<\varrho_M(x,Y)<R\}$ называется *чебышевским слоем* множества Y. Таким образом, теорема 4 утверждает, что для точек чебышевского слоя существует единственная M-проекция.

Теорема 4.3 (о ближайших точках). *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $X\subset E$ выпукло, замкнуто и удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара $-rM$, а множество $Y\subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно квазишара RM, где $0<r<R$. Пусть $0<\varrho_M(X,Y)<R-r$. Тогда $\min\limits_{x\in X,\ y\in Y}\mu_M(x-y)$ достигается в единственной паре точек.*

Доказательство. Обозначим $\varrho_0=\varrho_M(X,Y)$, $\varepsilon_0=\frac{1}{2}(R-r-\varrho_0)$. По определению 2.8 существуют последовательности $\{y_k\}\subset Y$ и $\{x_k\}\subset X$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\mu_M(x_k-y_k)=\varrho_0. \tag{22}$$

Обозначим $\varepsilon_k=\mu_M(x_k-y_k)-\varrho_0$. Без потери общности будем считать, что $\varepsilon_k\leqslant\varepsilon_0$ для любого $k\in\mathbb{N}$. В силу теоремы 4.2 и леммы 3.2 для любого индекса $k\in\mathbb{N}$ найдутся точки $y'_k\in P_M(x_k,Y)$ и $x'_k\in P_{-M}(y_k,X)$. Для любого $k\in\mathbb{N}$ обозначим

$$b_k=y'_k+\frac{R}{\mu_M(x_k-y'_k)}(x_k-y'_k),\qquad c_k=x'_k+\frac{r}{\mu_M(x'_k-y_k)}(x'_k-y_k). \tag{23}$$

Из определений 2.9, 2.10 и равенства $\mu_{-M}(y_k-x'_k)=\mu_M(x'_k-y_k)$ следует, что для любого $k\in\mathbb{N}$

$$Y\cap(b_k-R\operatorname{int}M)=\emptyset, \tag{24}$$

$$X\subset -rM+c_k. \tag{25}$$

Следовательно,

$$-y_k\in E\setminus(R\operatorname{int}M-b_1),\qquad -x_k\in rM-c_1\qquad\forall\,k\in\mathbb{N}. \tag{26}$$

Поскольку $\mu_M(x_k - y_k) = \varrho_0 + \varepsilon_k \leqslant \varrho_0 + \varepsilon_0$, то $x_k - y_k \in (\varrho_0 + \varepsilon_0)M$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из соотношений (24) – (26) получаем

$$-x_k \in (rM - c_1) \setminus \Big((R - \varrho_0 - \varepsilon_0)\operatorname{int} M - b_1\Big) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

$$-y_k \in \Big((r + \varrho_0 + \varepsilon_0)M - c_1\Big) \setminus (R\operatorname{int} M - b_1) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Учитывая неравенство $r + \varrho_0 + \varepsilon_0 < R$, в силу предложения 3.2 получаем ограниченность последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$.

Поскольку $\mu_M(x_k - y_k) = \varrho_0 + \varepsilon_k \leqslant \varrho_M(x_k, Y) + \varepsilon_k$, то $y_k \in P_M^{\varepsilon_k}(x_k, Y)$. Отсюда и из включений $y'_k \in P_M(x_k, Y) \subset P_M^{\varepsilon_k}(x_k, Y)$ следует, что

$$\|y_k - y'_k\| \leqslant \operatorname{diam} P_M^{\varepsilon_k}(x_k, Y) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому согласно соотношению (27) и теореме 4.1 получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - y'_k\| = 0. \tag{29}$$

Используя неравенства $\mu_M(x_k - y_k) \leqslant \varrho_M(-y_k, -X) + \varepsilon_k$, получаем включения $\{-x_k, -x'_k\} \subset P_M^{\varepsilon_k}(-y_k, -X)$. В силу леммы 3.2 множество $-X$ удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости относительно квазишара RM. Поэтому согласно соотношению (28) и теореме 4.1 получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x'_k\| = 0. \tag{30}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\tilde{b}_k = y_k + \frac{R}{\varrho_0}(x_k - y_k), \qquad \tilde{c}_k = x_k + \frac{r}{\varrho_0}(x_k - y_k). \tag{31}$$

Из соотношений (22), (23), (29) – (31) с учетом ограниченности последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|b_k - \tilde{b}_k\| = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|c_k - \tilde{c}_k\| = 0. \tag{32}$$

Из соотношений (24), (25) имеем

$$\mu_M(b_k - y_n) \geqslant R \qquad \forall\, k, n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_M(c_k - x_n) \leqslant r \qquad \forall\, k, n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая липшицевость функции Минковского и соотношения (32), получаем

$$\liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M\left(\tilde{b}_k - y_n\right) \geqslant R, \tag{33}$$

$$\limsup_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M\left(\tilde{c}_k - x_n\right) \leqslant r. \tag{34}$$

Следовательно, в силу субаддитивности функции Минковского имеем

$$\liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M\left(\tilde{b}_k - \tilde{c}_k - y_n + x_n\right) \geqslant R - r. \tag{35}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $f_k = x_k - y_k$, $g_k = \tilde{b}_k - \tilde{c}_k$. Тогда из равенств (31) получаем $g_k = \frac{R-r-\varrho_0}{\varrho_0} f_k$. Из соотношений (22) и (35) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mu_M(f_k) = \varrho_0, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_M(g_k) = R - r - \varrho_0, \qquad \liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M(g_k + f_n) \geqslant R - r.$$

Кроме того, последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_n\}$ ограничены. Отсюда в силу леммы 3.5 получаем равенство $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \left\| \frac{f_k}{\varrho_0} - \frac{g_n}{R-r-\varrho_0} \right\| = 0$, то есть $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_k - f_n\| = 0$. Следовательно, последовательность $\{f_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится к некоторому вектору $f_0 \in E$, причем $\mu_M(f_0) = \varrho_0$.

Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ обозначим $h_{kn} = \tilde{b}_k - \tilde{c}_k - y_n + x_n$, $e_{kn} = \tilde{c}_k - x_n$. Тогда

$$h_{kn} = g_k + f_n = \frac{R - r - \varrho_0}{\varrho_0} f_k - f_n \to \frac{R-r}{\varrho_0} f_0 \qquad (k, n \to \infty). \tag{36}$$

Используя соотношения (33), (34), получаем

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M(h_{kn}) = R - r, \qquad \limsup_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M(e_{kn}) \leqslant r, \qquad \liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \mu_M(h_{kn} + e_{kn}) \geqslant R.$$

Еще раз применяя лемму 3.5, приходим к соотношению $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \left\| \frac{h_{kn}}{R-r} - \frac{e_{kn}}{r} \right\| = 0$. Используя соотношение (36) и сходимость $f_k \to f_0$ при $k \to \infty$, получаем соотношение $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \left\| \frac{f_k}{\varrho_0} - \frac{e_{kn}}{r} \right\| = 0$. Поскольку $\frac{f_k}{\varrho_0} - \frac{e_{kn}}{r} = \frac{x_n - x_k}{r}$, то доказано соотношение $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \|x_k - x_n\| = 0$, которое означает фундаментальность последовательности $\{x_k\}$. Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому $x_0 \in E$. Поэтому $y_k = x_k - f_k \to y_0$ при $k \to \infty$, где $y_0 = x_0 - f_0$. Так как множества X и Y замкнуты, то $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Используя соотношение (22), получаем $\mu_M(x_0 - y_0) = \varrho_0 = \varrho_M(X, Y) = \inf\limits_{x\in X,\ y\in Y} \mu_M(x - y)$, то минимум $\min\limits_{x\in X,\ y\in Y} \mu_M(x - y)$ достигается на паре точек (x_0, y_0). Предположим, что минимум $\min\limits_{x\in X,\ y\in Y} \mu_M(x - y)$ достигается также на паре точек (x_0', y_0'). Рассмотрим последовательности

$$x_k = \begin{cases} x_0, & k \text{ четно}, \\ x_0', & k \text{ нечетно}, \end{cases} \qquad y_k = \begin{cases} y_0, & k \text{ четно}, \\ y_0', & k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Так как в силу доказанного последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ сходятся, то $x_0 = x_0'$, $y_0 = y_0'$. Тем самым доказана единственность. □

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Литература

1. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Известия РАН. Серия математическая. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 23–66.

2. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. – М.: Физматлит, 2006.

3. *Иванов Г.Е.* Перестановочность операций суммы и разности Минковского для множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2008. – С. 32–55.

4. *Иванов Г. Е.* Аппроксимативные свойства множеств относительно функции Минковского // Проблемы фундаментальной и прикладной математики. – М.: МФТИ, 2009. – С. 76–105.

5. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007.

6. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.

7. *Borwein J. M., Strojwas H. M.* Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, I. Theory // Canad. J. Math. – V. 38. – 1986. – P. 431–452.

8. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Propoerty // J. Convex Anal. – V. 2, N 1, 2. – 1995. – P. 117–144.

9. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. – V. 8, N 2. – 1983. – P. 231–259.

Поступила в редакцию 07.02.2012.