

УДК 534-18+ 519.688

Д. Е. Сыресин<sup>1,2</sup>, Т. В. Жарников<sup>2</sup>, И. Б. Петров<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)<sup>2</sup>Московский научно-исследовательский центр «Шлюмберже»

## Метод расчета дисперсионных кривых, волновых полей и упругих параметров среды в скважинах с радиально-неоднородной зоной нарушения

Радиальная неоднородность упругих свойств горной породы вблизи стенки скважины, возникающая вследствие бурения, тектонических напряжений или других факторов, значительно влияет на дисперсионные свойства собственных мод. Данная работа посвящена изучению такого влияния на дисперсионную кривую изгибной моды и соответствующие этой моде радиальные профили компонент тензоров смещений и напряжений. Кроме того, предлагается метод расчета упругих свойств зоны нарушения на основании анализа дисперсионных кривых мод волновода. Возможности предложенных методов проиллюстрированы на примере расчета дисперсионных кривых изгибной дипольной моды и профиля медленности поперечной волны для модели скважины с различными радиально-неоднородными зонами нарушения.

**Ключевые слова:** расчет дисперсионных кривых, радиально-неоднородные среды, матричное уравнение Риккати, радиальное профилирование скважин.

### 1. Введение

Существует целый ряд методов расчета дисперсионных кривых для радиально-неоднородных волноводов. Например, метод трансфер-матрицы позволяет решить эту задачу для радиально-слоистых волноводов [1]. В применении к задачам скважинной акустики он подробно описан и широко применялся в работах Сина [2]. В случае волноводов со свободными границами дисперсионные кривые удобно находить как решение задачи на собственные значения [3, 4]. Для неограниченных волноводов, у которых радиальная зависимость упругих параметров представляется кусочно-непрерывными функциями, одним из наиболее удобных способов вычисления дисперсионных кривых является метод матричного уравнения Риккати [5]. В данной работе он применялся совместно с методом продолжения по параметру, что позволило вычислять и разделять дисперсионные кривые [6].

Неоднородность упругих свойств породы вблизи скважины оказывает значительное влияние на дисперсионные кривые нормальных мод. В задачах акустического каротажа область такой неоднородности получила название *зоны нарушения*. Для характеристики изменения упругих параметров среды в данной зоне часто рассматриваются модели скважин с радиально-неоднородными упругими свойствами. Обычно внутри такой зоны предполагается малое отклонение скоростей продольных и поперечных объемных волн от аналогичных в неповрежденной породе. Это предположение позволяет воспользоваться методами теории возмущений для восстановления профиля подобных скоростей. Идея такого подхода заключается в формулировке и решении линейризованной системы алгебраических уравнений, описывающих зависимость малых изменений собственных частот нормальных мод, вызванных наличием зоны нарушения, от основных параметров, характеризующих возмущения упругих свойств породы вследствие ее повреждения. В методе дипольного радиального профилирования указанный подход позволил вычислять с приемлемой точностью профили упругих параметров в зоне нарушения на основании измеренной дисперсионной кривой изгибной моды в скважине [7, 8]. В отличие от метода, описанного в этих работах, где теория возмущений применялась к уравнениям теории упругости в их интегральном представлении, в данной работе такой метод применяется к матричному уравнению Риккати. В

случае радиально-неоднородных сред использование данного метода упрощает постановку обратной задачи и ускоряет ее решение.

## 2. Методы расчета дисперсионных кривых и упругих свойств в радиально-неоднородных средах

В цилиндрической системе координат (радиус-вектор  $\bar{r} = (r, \theta, z)$ ) удобно представить зависимость фурье-представлений для векторов смещений  $\bar{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  и нормальных напряжений  $\bar{\sigma} = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})$  от координат  $\theta, z$  и времени  $t$  в виде  $e^{i(\nu\theta + kz - \omega t)}$ . Символы  $k$  и  $\nu$  обозначают волновое число вдоль оси  $z$  и азимутальное волновое число соответственно, а  $\omega$  — круговую частоту. Применяя такое представление решения управляющих уравнений, можно показать, что эволюция матрицы акустического импеданса среды  $\mathbf{Z}(r)$ , определяемой как  $\bar{\sigma}(r) = \mathbf{Z}(r)\bar{u}$ , подчиняется матричному уравнению Риккати [5]:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dr} + \mathbf{Z}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{Z} + \mathbf{P} = 0. \quad (1)$$

Выражения для матричных коэффициентов  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{P}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \varsigma & i\nu\varsigma & i\delta\varsigma \\ i\nu & -1 & 0 \\ i\delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 2\mu\varsigma\lambda^{-1} & i\nu & i\delta \\ i\nu\varsigma & 2 & 0 \\ i\delta\varsigma & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \rho\omega^2\mathbf{I} - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} E & i\nu E & 2i\delta\varsigma\mu \\ -i\nu E & \nu^2 E + \delta^2\mu & \delta\nu\mu(1 + 2\varsigma) \\ -2i\delta\varsigma\mu & \delta\nu\mu(1 + 2\varsigma) & \delta^2 E + \nu^2\mu \end{pmatrix},$$

где символ  $\mathbf{I}$  есть единичная матрица, и введены следующие обозначения:  $\varsigma = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}$ ,  $E = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$  и  $\delta = kr$ . Здесь  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  — радиальные профили параметров Ламэ и плотности среды соответственно. В качестве одного из возможных начальных условий для уравнения (1) удобно рассматривать матричный импеданс упругой полости  $\mathbf{Z}_F(r_2)$  на внешней границе  $r = r_2$  зоны нарушения. Решением возникающей при этом задачи Коши на внутренней границе  $r = r_1$  является матрица  $\mathbf{Z}(r_1)$ . Рассматривая жидкость, заполняющую скважину, в качестве импедансной нагрузки на границе  $r = r_1$ , характеризуемой матрицей  $\mathbf{Z}_L(r_1)$ , приходим к дисперсионному уравнению:

$$\det[\mathbf{Z}(r_1) - \mathbf{Z}_L(r_1)] = 0. \quad (3)$$

Матрицы  $\mathbf{Z}_F(r_2)$  и  $\mathbf{Z}_L(r_1)$  имеют смысл матричных импедансов цилиндрической полости в упругой среде с радиусом  $r_2$  и жидкого цилиндра радиусом  $r_1$ . Они могут быть точно вычислены для любых заданных значений  $k, \nu$  и  $\omega$ . Корни уравнения (3) удобно вычислять и разделять методом продолжения по параметру [6], корректируя решение на каждом шаге с помощью метода Давиденко [9]. Для любых значений  $k, \nu$  и  $\omega$ , удовлетворяющих уравнению (3), радиальный профиль матрицы  $\mathbf{Z}(r)$  внутри неоднородного слоя вычисляется по формуле (1). Его подстановка в уравнение движения и закон Гука приводит к следующим эволюционным уравнениям для векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{u}$ :

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = [\mathbf{\Lambda}(r)\mathbf{Z}(r) + \mathbf{Q}(r)]\bar{u}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dr} = -[\mathbf{P}(r)\mathbf{Z}^{-1}(r) + \mathbf{S}(r)]\bar{\sigma}. \quad (4b)$$

Чтобы избежать рассмотрения решения уравнений (1) в точках неограниченного роста элементов матрицы импеданса ( $Z_{ij} \rightarrow \infty$ ), удобно воспользоваться преобразованием Кэли  $\mathbf{K}(r)$ :

$$\mathbf{K}(r) = (ia\mathbf{I} - \mathbf{Z}(r))(ia\mathbf{I} + \mathbf{Z}(r))^{-1}, \quad (5)$$

где размерность константы  $a$  совпадает с размерностью матрицы импеданса  $\mathbf{Z}(r)$ . Данная константа может выбираться произвольно, например, она может определяться как  $a = \omega \rho(r_a) C_t(r_a)$ , где  $C_t(r_a)$  и  $\rho(r_a)$  – локальная скорость поперечных волн и плотность среды в точке  $r = r_a$ . Норма матрицы  $\mathbf{K}(r)$  ограничена для физически допустимых вещественных величин  $k$ ,  $\nu$  и  $\omega$ . После применения преобразования Кэли уравнение (1) принимает вид матричного уравнения Риккати для матрицы  $\mathbf{K}(r)$ . Входящие в него матричные коэффициенты линейно выражаются через матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{P}$ . Чтобы избежать возникновения сингулярности решений уравнений (4), следует произвести следующие замены:

$$\bar{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}) \bar{M}_u, \quad \bar{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}) \bar{M}_\sigma. \quad (6)$$

В результате оба уравнения (4) принимают идентичный вид:

$$2 \frac{d\bar{M}_j}{dr} = [(ia\mathbf{A} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{K}) + (\mathbf{Q} + ia^{-1}\mathbf{P})(\mathbf{I} + \mathbf{K})] \bar{M}_j, \quad (7)$$

где индекс  $j = [u, \sigma]$ .

Обычно отличие упругих параметров зоны нарушения и породы вдали от скважины не превышает 20%, что позволяет применить методы теории возмущений к матричному уравнению Риккати для вычисления профиля упругих параметров зоны нарушения. Дисперсионной кривой нормальной моды в невозмущенной среде соответствуют корни уравнения (3):  $k_i$ ,  $\nu_i$  и  $\omega_i$ . При заданных величинах  $k_i$  и  $\nu_i$  изменение упругих свойств волновода приведет к сдвигу корня  $\omega_i$ . Представим возмущенные упругие параметры среды  $\lambda^P(r)$ ,  $\mu^P(r)$  и  $\rho^P(r)$  внутри зоны нарушения, а также возмущенное решение уравнения Риккати (1)  $\mathbf{Z}^P(r)$  и частоты  $\omega_i^P$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^P(r) &= \mu(r) + \Delta\mu(r), & \lambda^P(r) &= \lambda(r) + \Delta\lambda(r), \\ \rho^P(r) &= \rho(r) + \Delta\rho(r), & \omega_i^P &= \omega_i + \Delta\omega_i, & \mathbf{Z}^P(r) &= \mathbf{Z}(r) + \Delta\mathbf{Z}(r). \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать возмущения  $\Delta\mu(r)$ ,  $\Delta\lambda(r)$ ,  $\Delta\rho(r)$ ,  $\Delta\omega_i$  и  $\Delta\mathbf{Z}_{ij}(r)$  малыми. Подставляя выражения (8) в матричное уравнение Риккати (1) и раскладывая его по степеням параметра малости, легко показать, что для матрицы  $\Delta\mathbf{Z}(r)$  в первом порядке теории возмущений получается эволюционное уравнение

$$\frac{d\Delta\mathbf{Z}}{dr} + \mathbf{M}_1\Delta\mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Z}\mathbf{M}_2 + \omega_i(2\rho\Delta\omega_i + \omega_i\Delta\rho)\mathbf{I} + \Delta\mu\mathbf{M}_3 = 0, \quad (9)$$

где обозначено:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{Z}\mathbf{A} + \mathbf{S}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{Q}, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_3 = \Delta\mu \frac{\rho\omega^2\mathbf{I} - \mathbf{P}}{\mu} + \mathbf{Z}\mathbf{A}_2\mathbf{Z} + 2 \frac{\mu\Delta\lambda - \lambda\Delta\mu}{(2\mu + \lambda)^2} (2\mu\mathbf{Q}_2^\dagger\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2^\dagger\mathbf{Z}),$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & i\nu & ikr \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{(2\mu + \lambda)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu^2} \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{P}$  рассчитываются для среды с невозмущенными параметрами по формулам (2), а символ  $\dagger$  означает эрмитово сопряжение. Если возмущения упругих параметров внутри неоднородного слоя являются непрерывными функциями  $r$ , то их можно представить в виде степенных рядов:

$$\Delta\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left( \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)^n, \quad \Delta\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)^n, \quad \Delta\rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left( \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)^n \quad (11)$$

с коэффициентами  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  и  $\gamma_n$ . Для рассматриваемых моделей ограничимся первыми  $N$  членами разложения. Тогда уравнение (3) для возмущенной среды, выполняемое для чисел  $k_i$ ,  $\nu_i$  и  $\omega_i^P$ , примет следующий вид:

$$\det \left[ \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_L + \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{Z}}{\partial \Delta \omega_i} - \frac{\partial \mathbf{Z}_L}{\partial \omega} \right) \Delta \omega_i + \sum_{\varepsilon=\alpha,\beta,\gamma} \sum_{n=0}^N \frac{\partial \Delta \mathbf{Z}}{\partial \varepsilon_n} \varepsilon_n \right] = 0. \quad (12)$$

После ряда алгебраических преобразований сдвиг собственной частоты  $\Delta \omega_i$  можно выразить через возмущения параметров слоя:

$$\Delta \omega = - \frac{\sum_{\varepsilon=\alpha,\beta,\gamma} \sum_{n=0}^N \left[ C \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{Z}}{\partial \varepsilon_n}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_L \right) \varepsilon_n \right]}{D \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{Z}}{\partial \Delta \omega_i}, \frac{\partial \mathbf{Z}_L}{\partial \omega}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_L \right)}, \quad (13)$$

где вещественные функции  $C(\mathbf{X})$  и  $D(\mathbf{X})$  можно представить в виде линейной комбинации элементов матриц  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \varepsilon_n$ ,  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \Delta \omega_i$ ,  $\partial \mathbf{Z}_L / \partial \omega$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Z}_L$ , рассчитанных на внутренней границе неоднородного слоя  $r = r_1$ . Значения производных  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \varepsilon_n$  или  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \Delta \omega_i$  могут быть вычислены из решений уравнений, полученных из уравнения (9) путем его дифференцирования по  $\varepsilon_n$  или  $\Delta \omega_i$  соответственно. При их решении учитываются начальные условия в точке  $r = r_2$ , согласно которым  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \varepsilon_n = 0$ , а значение  $\partial \Delta \mathbf{Z} / \partial \Delta \omega_i$  может быть найдено либо аналитически, либо численно. Значение производной  $\partial \mathbf{Z}_L / \partial \omega$  в точке  $r = r_1$  рассчитывается через явное аналитическое выражение для матрицы  $\mathbf{Z}_L$ .

Далее описанный выше подход будет применен для расчета дисперсионных кривых изгибной моды ( $\nu = 1$ ) и соответствующих ей волновых полей в скважинах при наличии зоны нарушения с различными упругими свойствами. Полученные кривые используются для вычисления профиля медленности поперечных волн внутри неоднородной зоны.

### 3. Результаты расчетов и их обсуждение

Упругие свойства и геометрия рассматриваемых моделей представлены в табл. 1. Жидкость, заполняющая скважину, и внешняя порода однородные, а медленности продольных и поперечных волн  $S_l(r)$  и  $S_t(r)$  внутри неоднородного слоя меняются в указанных интервалах. Плотность породы внутри данного слоя будем считать равной плотности вдали от скважины. Внутренний и внешний радиусы зоны нарушения  $r_1$  и  $r_2$  равны 0.1 м и 0.4 м соответственно.

Т а б л и ц а 1

Геометрические и упругие параметры скважины с зоной нарушения

Слои	$S_t$ , мс/м	$S_l$ , мс/м	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$r$ , м
Жидкость	—	0.67	1000	[0, 0.1]
Зона нарушения	[0.97, 0.87]	[0.4, 0.36]	2000	[0.1, 0.4]
Внешняя среда	0.87	0.36	2000	[0.4, $\infty$ ]

Для изучения влияния типа радиальной неоднородности внутри слоя была выбрана степенная зависимость параметров Ламэ  $\lambda(r)$  и  $\mu(r)$  от радиуса:

$$\mu(r) = \Delta \mu \left( \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)^\eta + \mu^0, \quad \lambda(r) = \Delta \lambda \left( \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)^\eta + \lambda^0. \quad (14)$$

Величины  $\lambda^0$ ,  $\mu^0$ ,  $\Delta \lambda$  и  $\Delta \mu$  выбирались таким образом, чтобы удовлетворить равенствам  $S_t = 0.97$  мс/м,  $S_l = 0.4$  мс/м при  $r = r_1$  и  $S_t = 0.87$  мс/м,  $S_l = 0.36$  мс/м при  $r = r_2$ . Параметр  $\eta$  определяет тип неоднородности упругих свойств в рассматриваемом слое. Так,

при  $\eta = 0$  или  $\eta \rightarrow \infty$  такой слой является однородным, однако в первом случае он соответствует условию отсутствия зоны нарушения в скважине, а во втором характеризует ступенчатое изменение упругих свойств среды при переходе через границу  $r = r_2$ . Дисперсионные кривые, вычисленные с помощью уравнений (1) – (3) при различных значениях параметра  $\eta$  ( $\eta = 0, 0.33, 1, 3$  и  $\infty$ ), представлены на рис. 1.

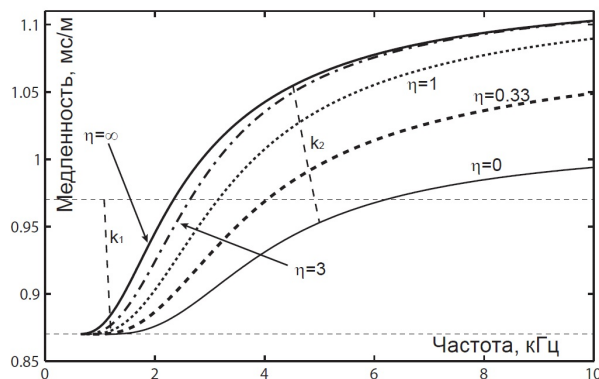


Рис. 1. Дисперсионные кривые изгибной моды в скважинах с различными неоднородными зонами нарушения

Параметры  $\eta = 0$  и  $\eta \rightarrow \infty$  соответствуют предельным случаям возможных изменений упругих параметров внутри зоны нарушения. Кривые, рассчитанные для  $\eta = 0$  и  $\eta \rightarrow \infty$ , ограничивают область, в которой располагаются кривые, построенные для остальных значений этого параметра. Наиболее сильное влияние параметра  $\eta$  наблюдается в области высоких и промежуточных частот. В области низких частот зависимости обладают схожим поведением и асимптотикой. Такое поведение объясняется тем, что моды в скважине сосредоточены в окрестности ее стенки. Для волн, длина которых меньше ширины зоны нарушения, скорость распространения определяется упругими параметрами среды только вблизи стенки скважины. В случае низких частот длина волны стремится к бесконечности, и зона нарушения оказывает малое влияние на скорость распространения мод по сравнению с породой вдали от скважины.

Перейдем теперь к рассмотрению влияния неоднородности зоны нарушения на радиальные профили векторных волновых полей  $\bar{u}(r)$  и  $\bar{\sigma}(r)$ . Параметр неоднородности  $\eta$  влияет на распределение напряжений внутри породы и на глубину проникновения нормальных мод, которую удобно оценить из условия зависимости энергии, переносимой модой, от радиальной координаты  $r$ . Так, радиальную зависимость суммы потенциальной и кинетической энергии упругих колебаний, приходящуюся на единицу объема среды, можно представить как функцию Гамильтона

$$H(r) = \frac{1}{2}\lambda(r)(\varepsilon_{kk}(r)\varepsilon_{kk}^*(r)) + \mu(r)\varepsilon_{ij}(r)\varepsilon_{ij}^*(r) + \frac{1}{2}\rho(r)\omega^2 u_l u_l^*, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформации. Для расчета этого профиля, а также профиля напряжений  $\bar{\sigma}(r)$  воспользуемся формулами (4) или (7). Положим, что  $\sigma_{rr}(r_1) = 1$ , и рассчитаем волновые поля для значений  $k_i$  и  $\omega_i$ , принадлежащих дисперсионной кривой. Радиальные профили, вычисленные для разных значений  $\eta$ , будем сравнивать при заданных волновых числах  $k_1$  и  $k_2$ , соответствующих промежуточным и низким частотам. Короткие изолинии на рис. 1 соответствуют таким значениям медленности  $S$  и частоты  $f$ , при которых волновое число  $k = (Sf)^{-1}$  неизменно и равно либо  $k_1$ , либо  $k_2$ . Изолинии, обозначенные как  $k_1$  и  $k_2$ , пересекают дисперсионную кривую, вычисленную для скважины без зоны нарушения ( $\eta = 0$ ), на частотах 1.2 кГц и 5 кГц соответственно.

На рис. 2а, 2б показаны профили  $\sigma_{rr}(r)$  и  $H(r)/\max(H(r))$  при  $k = k_1$  и различных значениях  $\eta$ . Профиль значений  $\sigma_{rr}(r)$ , вычисленный для скважины без зоны нарушения ( $\eta = 0$ ), имеет максимум вблизи стенки скважины и затем монотонно затухает вглубь породы. При увеличении параметра  $\eta$  профиль  $\sigma_{rr}$  начинает уширяться, а максимум смещается

вглубь среды. Из зависимости величины  $H(r)/\max(H(r))$  от параметра  $\eta$ , показанной на рис. 2б, видно, что увеличение  $\eta$  ведет к сужению профиля энергии моды. Данный факт свидетельствует об уменьшении глубины проникновения данной моды вглубь породы при усилении неоднородности породы. Максимальное отклонение полученных профилей от распределений, рассчитанных для модели с  $\eta = 0$ , наблюдается в случае  $\eta \rightarrow \infty$ , который соответствует резкому скачку упругих свойств среды в точке  $r = r_2$ . Аналогичный анализ распределений  $\sigma_{rr}(r)$  и  $H(r)/\max(H(r))$  (см. рис. 2в, 2г), проведенный для промежуточных частот ( $k = k_2$ ), показывает слабое влияние параметра  $\eta$  на данные профили. При этом наличие неоднородной зоны нарушения приводит к значительному изменению дисперсионных кривых.

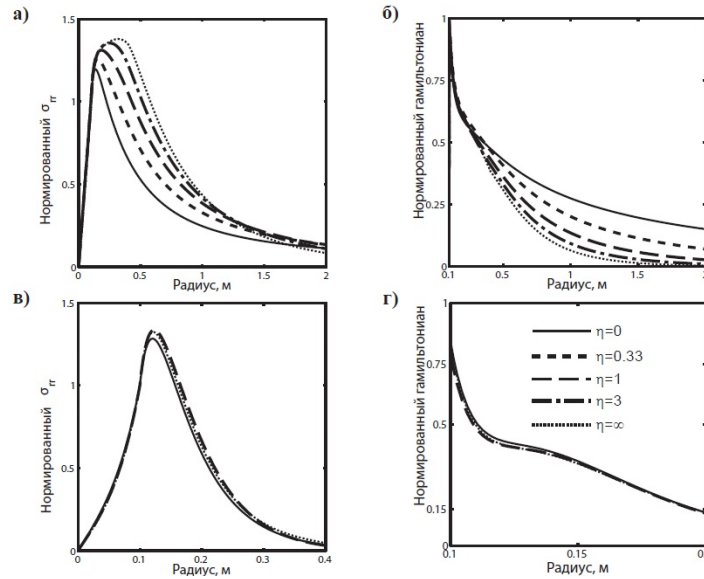


Рис. 2. Нормированные профили напряжений  $\sigma_{rr}$  и функции Гамильтона  $H(r)$ , рассчитанные для волновых чисел  $k_1$  (а, б) и  $k_2$  (в, г) в скважинах с различными типами неоднородности

Применим теперь теорию возмущений к рассмотренным моделям скважин с неоднородной зоной нарушения, для которых параметры Ламэ  $\lambda(r)$  и  $\mu(r)$  зависят от координаты  $r$  по формуле (14). Величины  $\lambda^0$  и  $\mu^0$  соответствуют скважине без зоны нарушения (невозмущенная модель). Данные параметры характеризуют упругие свойства внешней среды и могут быть найдены экспериментально. Известно, что для скважин в породах, аналогичных рассматриваемым в данной работе, вариации параметра  $\lambda(r)$  оказывают слабое влияние на дисперсионные кривые [7]. По этой причине будем считать величину данного параметра постоянной ( $\lambda(r) = \lambda^0$ ) внутри зоны нарушения. Тогда только функция  $\Delta\mu(r)$  будет характеризовать возмущение упругих свойств. Дисперсионная кривая изгибной моды, рассчитанная для невозмущенной среды, показана пунктирной линией на рис. 3, а аналогичная кривая, заданная для неоднородной (возмущенной) зоны нарушения, изображена сплошной линией. Для вычисления упругих параметров этой зоны, предположим, что возмущения  $\Delta\mu(r)$  определяются разложением (11), где рассматриваются члены до  $N = 3$ .

Рассмотрим несколько точек  $(k_i, \omega_i^P)$ , показанных кружками на рис. 3 и лежащих на заданной дисперсионной кривой. Для каждого  $k_i$  можно найти соответствующие значения частот (квадратики на рис. 3), принадлежащих кривой, рассчитанной для невозмущенной среды. Рассчитанную разность этих частот  $\Delta\omega_i$ , согласно уравнению (13), можно представить в виде

$$\Delta\omega = A_i^1\alpha_1 + A_i^2\alpha_2 + A_i^3\alpha_3. \quad (16)$$

Комбинация таких уравнений, полученных для трех волновых чисел  $k_l$ ,  $k_m$  и  $k_n$ , дает систему линейных уравнений, решением которой являются коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Их

подстановка в разложение (11) позволяет рассчитать профиль параметра  $\mu(r)$  или медленности  $S_t(r)$ . Для повышения точности такие профили могут быть усреднены для всех возможных комбинаций волновых чисел  $k_l$ ,  $k_m$  и  $k_n$ .

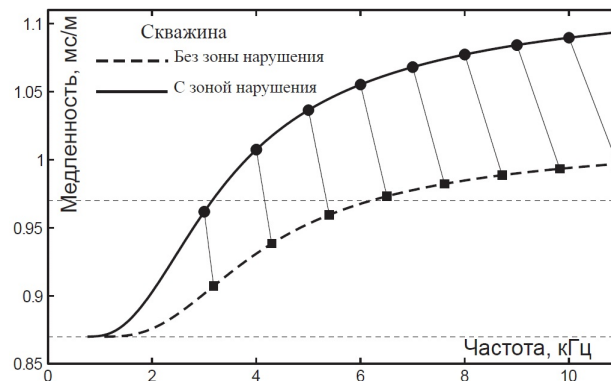


Рис. 3. Дисперсионные кривые для невозмущенной среды (пунктирная линия) и возмущенной среды (сплошная линия)

На рис. 4 показаны результаты восстановления профилей медленности  $S_t(r)$  внутри неоднородного слоя (пунктирные линии) и их сравнение с реальными моделями (сплошные линии), параметры для которых задаются формулой (14), где  $\eta = 0.33, 1$  или  $3$ . Абсолютная ошибка  $S_t(r)$  не превосходит 1% для  $\eta = 1$  и  $3$ . Для  $\eta = 0.33$  ошибка увеличивается вблизи стенки скважины, что объясняется недостаточным количеством членов, используемых в разложении (11), для аппроксимации резкого возрастания медленности. Отметим, что предложенный метод расчета упругих свойств зоны нарушения может быть реализован в рамках итерационного процесса, в котором величины, найденные на некотором шаге, используются в качестве параметров невозмущенной среды на следующем шаге.

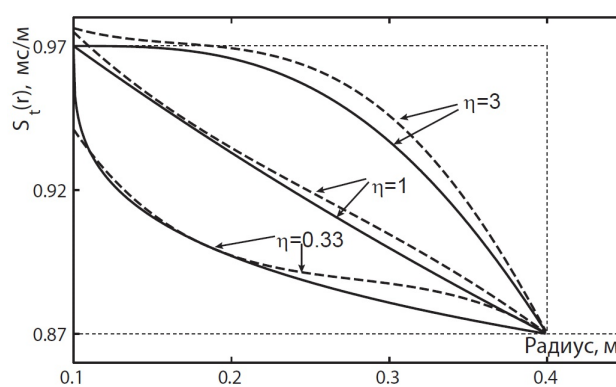


Рис. 4. Заданные (сплошная линия) и восстановленные (пунктирная линия) профили медленности поперечной волны внутри зоны нарушения

#### 4. Заключение

В данной работе метод матричного уравнения Риккати применен для рассмотрения влияния неоднородной зоны нарушения породы вблизи стенки скважины на дисперсионные свойства изгибной моды и соответствующие ей волновые поля. Показано значительное влияние такой зоны на положение дисперсионных кривых для длин волн, меньших или сравнимых с шириной зоны. Ее влияние также было проиллюстрировано на примере расчета радиальных профилей напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  и нормированной функции Гамильтона  $H(r)$ . Так, на низких частотах наличие зоны нарушения приводит к возникновению особенностей в форме профилей  $\sigma_{rr}(r)$  и  $H(r)$  и ведет к уменьшению глубины проникновения изгибной моды.

Для определения упругих параметров зоны нарушения использовались методы теории возмущений. Для большинства рассматриваемых моделей относительная погрешность вычисления профиля медленности поперечной волны не превысила 1%. Отметим, что описанный в данной работе подход без потери общности может быть использован и для более сложных волноводов (например, трубы, обсаженные скважины, композитные среды и т.д.).

## Литература

1. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* — 1950. — V. 21, N 2. — P. 89–93.
2. *Sinha B.K., Simsek E., Asvadurov. S.* Influence of a pipe tool on borehole modes // *Geophysics.* — 2009. — V. 74, N 3. — P. E111–E123.
3. *Adamou A.T.I., Craster. R.V.* Spectral methods for modeling guided waves in elastic media // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2004. — V. 124, N 3. — P. 1524–1535.
4. *Xi Z.C., Lui G.R., Lam K.Y., Shang H.M.* Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2000. — V. 108, N 5. — P. 2179–2186.
5. *Мачевариани М.М., Тютюкин В.В., Шкварников А.П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // *Акуст. Журн.* — 1971. — Т 17, вып. 1. — С. 97–102.
6. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
7. *Sinha B.K.* Sensitivity and inversion of borehole flexural dispersions for formation parameters // *Geophys. J. Int.* — 1997. — V. 128, N 1. — P. 84–96.
8. *Yang J., Sinha B.K., Habashy T.M.* A parameterized-model-based radial profiling for formation shear slowness in cased boreholes // *Soc. Expl. Geophys. Ann. Mtg.* — 2011. — V. 30, N 1. — P. 449–453.
9. *Davidenko D.F.* The evaluation of determinants by the method of variation of parameters // *Sov. Math.* — 1960. — V. 1. — P. 316–319.

Поступила в редакцию 03.10.12