Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А. Самарский
2011 г.

ПРОГРАММА

по курсу	ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
по направлениям	010600,010900
факультет	ФИВТ
кафедра	анализа данных
курс	II
семестр	3
лекции	34 часа Экзамен — 3 семестр
практические (семинарские) занятия	34 часа Зачет — нет
лабораторные занятия — нет	Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ — 68

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Д. А. Шабанов

Программа обсуждена на заседании
кафедры анализа данных 06 июня 2011 г.

Заведующий кафедрой А.Ю. Волож

Программа обсуждена на заседании
Ученого совета ФИВТ 17 июня 2011 г.

Председатель Ученого совета ФИВТ В.Е. Кривцов

ПРОГРАММА КУРСА

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в "нуле" вероятностной меры.

2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

3. Геометрические вероятности. Примеры.

4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.

5. Системы множеств (алгебры, σ-алгебры, π- и λ-системы). Лемма о π- и λ-системах. Наименьшая алгебра (σ-алгебра, π- и λ-система), порожденная системой множеств. Борелевские σ-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$.

6. Теорема о монотонных классах.

7. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости σ-алгебр.

8. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).

9. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Функция распределения вероятностной меры, ее свойства. Классификация функций распределения, теорема Лебега (б/д), примеры. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения (идея док-ва).

10. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее свойства. Примеры. Теорема

о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ (б/д).

11. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.

12. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.

13. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, σ-алгебра, порожденная случайной величиной. Теорема о приближении случайной величины ξ простыми $\mathcal{F}_\xi$-измеримыми.

14. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.

15. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере): определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений.

16. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.

17. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.

18. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Йенсена.

19. Виды сходимости случайных величин (почти наверное, по вероятности, в пространстве L^p, по распределению), их взаимосвязи. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.

20. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

21. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.

22. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.

23. Лемма Бореля – Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

24. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега.

25. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.

26. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.

27. Схема испытаний Бернулли и полиномиальная схема. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра – Лапласа (б/д).

28. Виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого (обе б/д).

29. Характеристические функции вероятностных мер, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.

30. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.

31. Теорема непрерывности для характеристических функций (б/д). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — 8-е изд. — М.: УРСС, 2005.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.
4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Комбинаторные вероятности

1 Случайно бросаются два M-гранных кубика, на гранях которых написаны числа от 1 до M. Найдите вероятность события $A_i = \{$сумма чисел, выпавших на кубиках, равна $i\}$, $i = 2, \ldots, 2M$.

2* Случайно бросаются три M-гранных кубика, на гранях которых написаны числа от 1 до M. Найдите вероятность события $A_i = \{$сумма чисел, выпавших на кубиках, равна $i\}$, $i = 3, \ldots, 3M$.

3 Из множества N объектов выбирается случайное подмножество. Найдите вероятность того, что это случайное подмножество имеет четную мощность.

4 Множество из n шаров случайно раскладывают по m ящикам. Найдите вероятность того, что все ящики непустые, если (a) шары неразличимы, (b) шары различимы.

5 На шахматной доске размера $n \times n$ случайно размещают n ладей. Найдите вероятности следующих событий:

(a) $A = \{$ладьи не бьют друг друга$\}$.

(b) $B = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур$\}$.

6 В группе 25 студентов. Считаем, что день рождения каждого студента случаен (считаем, что в году 365 дней). Найдите вероятность того, что хотя бы у двух человек дни рождения совпадают.

7 В карточной игре покер игрок получает 5 карт из колоды в 52 карты. Задача игрока — собрать наиболее сильную комбинацию карт. Комбинации бывают следующие:

(a) Пара — две карты одного номинала.

(b) Две пары — две карты одного номинала, две карты — другого.

(c) Тройка — три карты одного номинала.

(d) Стрит — пять последовательных по номиналу карт (предполагается, что за тузом по номиналу следует двойка).

(e) Флэш — все карты одной масти.

(f) Три+два — три карты одного номинала, две карты — другого.

(g) Каре — четыре карты одного номинала.

(h) Стрит-флэш — пять последовательных по номиналу карт одной масти.

(i) Ройал-флэш — туз, король, дама, валет и десятка одной и той же масти.

Найдите вероятность получения каждой из перечисленных комбинаций при случайной сдаче карт. Вычислите вероятность того, что не выпадет ни одна из вышеперечисленных комбинаций.

8* Пусть задано множество S из n элементов. Обозначим через $\mathcal{M}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества S. Случайная совокупность подмножеств $\mathcal{A}$ состоит из s различных элементов $\mathcal{M}$, выбранных случайно. Найдите вероятность того, что любое множество из случайной совокупности $\mathcal{A}$ пересекает наперед заданное множество $T \subset S$ мощности l.

9* Дано множество $\{-n, -n+1, ..., 0, ..., n-1, n\}$. Из него по схеме выбора с возвращением извлекаются k чисел $x_1, \ldots, x_k$. Найдите вероятность того, что $|x_1| + \ldots + |x_k| \leq n$.

2. Условные вероятности

1 Брошено 3 игральных кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала "шестерка", при условии что

(a) на одной кости выпала "шестерка";

(b) на двух костях выпала "шестерка";

(c) по крайней мере на одной кости выпала "шестерка";

(d) по крайней мере на двух костях выпало равное количество очков.

2 В одном ящике содержится 1 черный шар и 2 черных шара, а в другом ящике — 2 белых шара и 3 черных шара. В третий ящик кладут два шара, случайно выбранных из первого ящика, и два шара, случайно выбранных из второго ящика. Найдите вероятность того, что

(a) случайно выбранный из третьего ящика шар будет белым;
(b) при выборе без возвращения двух шаров из третьего ящика один из них будет будет белым, а второй — черным.

3 В ящике N шаров, из которых ровно M белых шаров. Последовательно вынимаются $n \leq N$ шаров. Пусть событие A_k означает, что k-й по счету вынутый шар — белый, а событие B_m, что всего вынули $m \leq M$ белых шаров. Найдите $\mathsf{P}\,(A_k|B_m)$, если (a) шары вынимаются без возвращения, (b) с возвращением.

4 Мимо автозаправки проезжают легковые автомобили с частотой $0,6$; грузовики — с частотой $0,3$; автобусы — с частотой $0,1$. Легковой автомобиль заправляется с вероятностью $0,5$; грузовик — с вероятностью $0,6$; автобус — с вероятностью $0,4$. Известно, что последняя машина заправилась. Найдите условную вероятность того, что это был грузовик.

5* Ящик содержит a белых и b черных шаров. Наудачу извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется c шаров одного с ним цвета. Далее, подобная процедура повторяется снова. Пусть событие A_k означает, что на k-м шаге извлечен белый шар. Найдите

(a) вероятность того, что при первых $n = n_1 + n_2$ извлечениях появилось n_1 белых и n_2 черных шаров;
(b) вероятность события A_k;
(c) условную вероятность $\mathsf{P}\,(A_m|A_k)$ при $m > k$;
(d) условную вероятность $\mathsf{P}\,(A_k|A_m)$ при $m > k$.

3. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

1 Случайная величина ξ — число, выпадающее при броске M-гранного кубика с пронумероваными гранями. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

2 Пусть $R_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Случайная величина ξ равна количеству элементов R_n остающихся на своих местах при случайной перестановке. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

3 Множество из k шаров случайно раскладывают по m ящикам. Случайная величина ξ равна количеству пустых ящиков при таком случайном размещении. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$, если (a) шары неразличимы, (b) шары различимы.

4 Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ независимы в совокупности. Докажите, что для любых функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $g(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ тоже независимы.

5 Рассматривается модель случайного графа $G(n, p)$. Найдите $\mathsf{E}X$, если

(a) X — количество треугольников (циклов длины 3) в случайном графе,

(b) X — количество циклов длины k в случайном графе,

(c) X — количество клик (подграфов, являющихся полными графами) мощности k в случайном графе.

6* Рассматривается модель случайного графа $G(n, p)$. Найдите $\mathsf{D}X$, если

(a) X — количество треугольников (циклов длины 3) в случайном графе,

(b) X — количество клик (подграфов, являющихся полными графами) мощности k в случайном графе.

4. Понятие независимости. Схема Бернулли

1 Пусть A, B, C — попарно независимые равновероятные события, причем $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найдите максимально возможное значение $\mathsf{P}(A)$.

2 Из ящика, содержащего черные и белые шары, извлекаются шары. Пусть событие A_k означает, что на k-м шаге извлечен белый шар. Докажите, что события $A_1, \ldots, A_n$

(a) независимы в совокупности, если выбор шаров производится с возвращением;

(b) зависимы, если выбор шаров производится без возвращения.

3 Ребра полного графа K_n независимо друг от друга раскрашиваются в k цветов: с равной вероятностью $\frac{1}{k}$ в любой из k цветов. Пусть V — множество вершин графа K_n, а $S \subset V$. Обозначим через A_S следующее событие: $A_S = \{$все ребра K_n, вершины которых принадлежат S, покрашены в один и тот же цвет$\}$. При каких условиях на взаимное расположение подмножеств $S, T \subset V$ события A_S и A_T независимы?

4 Дано множество S из n элементов. Из него случайно и независимо выбираются три подмножества A, B, C.

Каждое случайное подмножество формируется следующим образом: каждый элемент множества S независимо от других с вероятностью p включается в подмножество, а с вероятностью $(1-p)$ — не включается. Найдите вероятность $\mathsf{P}\,(A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B)$.

5 Исходы $\xi_1, \xi_2, \ldots$ последовательности испытаний Бернулли с m возможными исходами $1, 2, \ldots, m$ и вероятностями исходов $p_1, p_2, \ldots, p_m$ объединяются в блоки $(\xi_{mk+1}, \xi_{mk+2}, \ldots, \xi_{mk+m})$, $k \geq 0$. Пусть ν — номер первого блока, все элементы которого различны. Найдите $\mathsf{P}\,(\xi_{m\nu+1} = 1)$.

6 Игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игрок B — 2 кости. Эти испытания они проводят вместе и последовательно до первого выпадения "шестерки" хотя бы на одной из костей. Найдите вероятности следующих событий

(a) $\mathcal{A} = \{$впервые "шестерка" выпала у игрока A, а не у $B\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{$впервые "шестерка" выпала у игрока B, а не у $A\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{$впервые "шестерка" выпала одновременно у A и $B\}$.

5. Геометрические вероятности

1 Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найдите вероятности следующих событий:

(a) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

(b) расстояние от точки A до ближайшей диагонали прямоугольника не превосходит x;

(c) расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;

(d) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали.

2 В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим через ξ ее длину. Найдите вероятность $\mathsf{P}(\xi > x)$, если

(a) середина хорды равномерно распределена в круге;

(b) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению;

(c) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

3 В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найдите вероятность того, что квадрат, диагональю которого является отрезок AB, целиком содержится в исходном квадрате.

6. Вероятностное пространство. Системы множеств

1 Докажите, что в определении алгебры замкнутость относительно операций $\cap$ и Δ (симметрическая разность) можно заменить на замкнутость относительно следующих пар операций: (a) $\cup$ и Δ, (b) $\cap$ и $\setminus$, (c) $\cup$

и $\setminus$, (d) Δ и $\setminus$, (e) отрицание и $\cap$, (f) отрицание и $\cup$. Но нельзя заменить на пару $\cup$ и $\cap$.

2 Докажите, что система подмножеств $\mathcal{L}$ множества Ω является λ-системой тогда и только тогда, когда выполнены следующие три свойства

(a) $\Omega \in \mathcal{L}$;

(b) если $A \in \mathcal{L}$, то $\overline{A} \in \mathcal{L}$;

(c) если $A_n \in \mathcal{L}$, $n \geq 1$ взаимно несовместны (т.е. $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$), то $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}$.

3 Приведите пример вероятностного пространства и двух систем множеств $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ на нем таких, что $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — независимы, а $\sigma(\mathcal{M}_1)$ и $\sigma(\mathcal{M}_2)$ — нет.

4 Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — некоторая алгебра подмножеств. Докажите, что для каждого $C \in \sigma(\mathcal{A})$ выполнено

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} \mathsf{P}\left(C \,\Delta\, A\right) = 0.$$

5* Пусть P — вероятностная мера на $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\mathsf{P}(B) = \sup_{\substack{F\text{ — замкнутое,}\\ F \subset B}} \mathsf{P}(F) = \inf_{\substack{G\text{ — открытое,}\\ G \supset B}} \mathsf{P}(G).$$

7. Законы распределения случайных величин

1 Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\sqrt{\xi}$, (b) ξ^2, (c) $\frac{1}{\lambda}\ln\xi$, (d) $\{\xi\}$ — дробная доля ξ, (e) $1-e^{-\alpha\xi}$.

2 Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\xi^2/(1+\xi^2)$, (b) $1/(1+\xi^2)$, (c) $2\xi/(1-\xi^2)$, (d) $1/\xi$.

3 Случайная величина ξ принимает значения в интервале (a,b) и имеет плотность $f(x)$. Функция $\varphi(x)$ строго монотонна и дифференцируема на (a,b), причем $\varphi'(x)\neq 0$ на (a,b). Вычислите плотность случайной величины $\eta=\varphi(\xi)$.

4 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Упорядочим значения $\xi_1,\ldots,\xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)}\leq\ldots\leq\xi_{(n)}$. Найдите

(a) Функцию распределения случайной величины $\xi_{(k)}$, $k=1,\ldots,n$.

(b) Плотность случайной величины $\xi_{(k)},\ k=1,\ldots,n$, если $F(x)$ имеет плотность $f(x)$.

5 Дана случайная величина ξ. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ, если она имеет

(a) биномиальное распределение с параметрами (n,p);

(b) пуассоновское распределение с параметром λ;

(c) геометрическое распределение с параметром p (т.е. $\mathsf{P}(\xi=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\ldots$);

(d) нормальное распределение с параметрами (a,σ^2);

(e) равномерное распределение на отрезке (a,b);

(f) гамма распределение с параметрами (α, λ);

(g) бета распределение с параметрами (α, β).

6 Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Вычислите $\mathsf{E}\xi^k$ и $\mathsf{E}|\xi|^k$ для $k \in \mathbb{N}$.

7 Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2; \\ 1/5, & \text{если } -2 \le x < 1; \\ x^2/4, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

8. Многомерные распределения вероятностей. Суммы случайных величин

1 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$. Найдите плотность случайного вектора $(\xi_{(1)}, \xi_{(n)})$.

2* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$. Найдите плотность случайного вектора $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)})$.

3 Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение в области

$$D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Найдите распределения случайных величин ξ и η, а также $cov(\xi, \eta)$.

4 Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\xi+\eta$, (b) $\xi-\eta$, (c) $\xi\eta$, (d) ξ/η.

5 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если

(a) $\xi_i \sim Bin(n_i, p)$, $i = 1, 2$;

(b) $\xi_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2$;

(c) $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$;

(d) $\xi_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$.

6* Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

7 Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

8 Пусть X, Y — независимые случайные величины. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник, если

(a) X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а Y — экспоненциальное с параметром 1;

(b) X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а Y — гамма распределение с параметрами $(1,2)$.

9 Случайный вектор (ξ,η) имеет плотность

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-(x^2-2xyr+y^2)/(2(1-r^2))}.$$

Вычислите матрицу ковариаций случайного вектора (ξ,η).

10 Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Положим $U = X+Y$, $V = X/(X+Y)$. Найдите распределения случайных величин U и V. Будут ли они независимы?

9. Виды сходимостей случайных величин

1 Докажите, что в дискретных вероятностных пространствах сходимость с вероятностью 1 эквивалентна сходимости по вероятности.

2 Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ независимы и имеют распределение Бернулли, причем $\xi \sim Bern(p_n)$. Найдите критерий того, что (a) $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$; (b) $\xi_n \xrightarrow{L^p} 0$, $p \geq 1$; (c) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

3 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ — последовательность случайных величин, а $h(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что

(a) если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$;

(b) если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$.

4* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, а $h(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $h(\xi_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} h(\xi)$.

5 Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по распределению к константе C. Докажите, что тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C$.

6 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ — последовательность случайных величин. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Покажите, что если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

7 Докажите, что в предыдущей задаче сходимость почти наверное нельзя заменить на сходимость по вероятности.

8* Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ — последовательность случайных величин, причем $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$. Докажите, что найдется такая подпоследовательность $(\xi_{n_k})_{k\geq 1}$, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ при $k \to \infty$.

9 Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и ξ принимают значения только во множестве $\mathbb{Z}$. Докажите, что в этом случае $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathsf{P}(\xi_n = m) \longrightarrow \mathsf{P}(\xi = m)$ при $n \to \infty$.

10. Характеристические функции

1 Найдите характеристическую функцию случайной величины ξ, если она имеет

(a) биномиальное распределение с параметрами (n, p);

(b) пуассоновское распределение с параметром λ;

(c) геометрическое распределение с параметром p;

(d) нормальное распределение с параметрами (a, σ^2);

(e) равномерное распределение на отрезке (a, b);

(f) гамма распределение с параметрами (α, λ);

(g) распределение Лапласа с параметром $\theta > 0$ (т.е. $p_\xi(x) = \frac{1}{2\theta}\, e^{-|x|/\theta}$).

2 Используя формулу обращения, найдите характеристическую функцию случайной величины ξ, если она имеет распределение Коши с параметром θ.

3 Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Покажите, что выполняются неравенства

(a) $1 - \operatorname{Re}\varphi(2t) \leq 4\left(1 - \operatorname{Re}\varphi(t)\right)$,

(b) $\left(\operatorname{Im}\varphi(t)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{Re}\varphi(2t)\right)$,

(c) $\left(\operatorname{Re}\varphi(t)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{Re}\varphi(2t)\right)$,

(d) $\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h}\varphi(u)du\right| \leq \left(1 + \operatorname{Re}\varphi(h)\right)^{\frac{1}{2}}$.

4 При каких неотрицательных целых n функция $\varphi(t) = e^{-|t|^n}$ является характеристической?

5 Выясните, являются ли следующие функции характеристическими:

(a) $\sin t$, (b) $\cos t$, (c) $\cos^2 t$, г) $\cos t^2$, (d) $e^{-|t|}I\{t < 0\} + (1+t^2)^{-1}\, I\{t \geq 0\}$, (e) $\frac{1}{1+t^2}$, (f) $\frac{1}{1+t^4}$.

6 Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины. С помощью характеристических функций найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если

(a) ξ_i имеет нормальное распределение с параметрами (a_i, σ_i^2),

(b) ξ_i имеет гамма распределение с параметрами (α, λ_i),

(c) ξ_i имеет распределение Коши с параметром θ_i.

7 Пусть ξ и η — независимые стандартные нормальные случайные величины. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi\eta$.

8 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность нормальных случайных величин.

(a) Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$, то ξ — тоже нормальная случайная величина.

(b) Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то ξ — тоже нормальная случайная величина.

Подписано в печать 01.09.2010. Формат $60\times84\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5 п.л. Тираж 120 экз. Заказ ф-

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Отдел автоматизированных издательских систем
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институский пер., 9