УДК 519.8

М.В. Балашов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О модулях выпуклости функции и множества*

В банаховом пространстве рассматривается связь между равномерно выпуклыми функциями и множествами. Доказано, что лебеговы множества равномерно выпуклой функции равномерно выпуклы. Доказано, что граница равномерно выпуклого множества является графиком равномерно выпуклой функции. Получены оценки на модуль выпуклости.

Ключевые слова: модуль выпуклости, равномерно выпуклая функция, равномерно выпуклое множество.

В статье мы кратко рассмотрим связь равномерно выпуклых функций и множеств. Кроме того, мы рассмотрим зависимость параметров выпуклости лебеговых множеств равномерно выпуклой функции от модуля выпуклости этой функции. Подобные вопросы возникали и ранее для конкретных пространств и классов функций, например $[1, 2, 5, 9, 10]$. В конце статьи на основании полученных теорем единым образом доказывается ряд известных результатов о равномерно выпуклых функциях в гильбертовом пространстве.

Банахово пространство E рассматривается над вещественным полем скаляров. Через $B_r(a)$ обозначим замкнутый шар радиуса r с центром в точке $a \in E$. Диаметром множества A называется число $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y\in A} \|x-y\|$; границу множества A обозначим через ∂A. Через $\operatorname{co} A$ обозначим выпуклую, а через $\operatorname{cone} A$ коническую оболочку множества A.

Для точек x_0 и x_1 из E и числа $\lambda \in (0,1)$ обозначим

$$x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1.$$

Определение 1. ([8]). Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ выпуклая и полунепрерывная снизу. Пусть функция δ: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ строго монотонно возрастает, $\delta(0) = 0$. Будем говорить, что функция f *равномерно выпуклая с модулем выпуклости* δ, если для любых x_0, x_1 из E и для любого $\lambda \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$f(x_\lambda) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - \lambda(1-\lambda)\delta(\|x_0 - x_1\|). \tag{1}$$

Определение 2. ([8]). Пусть $A \subset E$ замкнутое выпуклое подмножество. *Модуль выпуклости* δ_A: $(0, \operatorname{diam} A) \to [0,+\infty)$ есть функция, определяемая как

$$\delta_A(\varepsilon) = \sup\left\{\delta \geqslant 0 \;\middle|\; B_\delta\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \subset A \quad \forall\, x_1, x_2 \in A:\ \|x_1 - x_2\| = \varepsilon\right\}.$$

В определении 2 точки x_1, x_2 можно выбирать из точек границы ∂A [6].

Определение 3. ([8]). Пусть E является банаховым пространством и $A \subset E$ его замкнутое подмножество. Если модуль выпуклости $\delta_A(\varepsilon)$ строго положителен для всех $\varepsilon \in (0, \operatorname{diam} A)$, то мы назовем множество A *равномерно выпуклым* (*с модулем* $\delta_A(\cdot)$).

Определения 1, 3 впервые даны Б.Т. Поляком, достаточно полное исследование содержится в работах $[2, 5]$ и особенно в работе [10].

Определение 1 можно сформулировать и для функции, определенной на множестве $U \subset E$, однако мы далее будем считать, что область определения f совпадает с E.

Отметим, что для любого выпуклого замкнутого множества A модуль выпуклости удовлетворяет оценке $\delta_A(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^2$ для некоторой константы $C > 0$. Если пространство E содержит собственное неодноточечное равномерно выпуклое множество A, то 1) пространство имеет эквивалентную равномерно выпуклую норму (и тем самым является рефлексивным) и 2) множество A ограничено, см. [6].

Введем еще несколько обозначений. Через $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}_f(\alpha)$ обозначим множество уровня α функции f, т. е.

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \in E \mid f(x) \leqslant \alpha\}.$$

Определим также

$$L_\alpha = \sup\{\|p\| \mid p \in \partial f(x),\ x \in \mathcal{L}_f(\alpha)\},$$
$$K_\alpha = \inf\{\|p\| \mid p \in \partial f(x),\ x \in \partial\mathcal{L}_f(\alpha)\}.$$

Здесь $\partial f(x)$ — субдифференциал функции f в точке $x \in E$, т. е.

$$\partial f(x) = \{p \in E^* \mid f(z) \geqslant f(x) + (p, z - x) \quad \forall\, z \in E\}.$$

Для дифференцируемой функции субдифференциал совпадает с множеством, состоящим из производной f в точке x.

*Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00139-а, программой «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/11133 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» программа 1.2.1.

Теорема 1. Пусть функция f удовлетворяет определению 1. Тогда для любого $\alpha > \inf\limits_{x\in E} f(x)$ множество $\mathcal{L}(\alpha)$ равномерно выпуклое с модулем выпуклости

$$\delta_{\mathcal{L}(\alpha)}(\varepsilon) \geqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{4L_\alpha}. \qquad \square$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $x, y \in \partial\mathcal{L}(\alpha)$, $\|x-y\| = \varepsilon$. Пусть $z = \frac{1}{2}(x+y)$. В силу определения 1

$$f(z) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - \frac{1}{4}\delta(\|x-y\|) = \alpha - \frac{1}{4}\delta(\varepsilon).$$

В силу условия $\alpha > \inf\limits_{x\in E} f(x)$ имеем $L_\alpha > 0$, в силу условия определенности выпуклой функции f на всем пространстве E имеем $L_\alpha < +\infty$.

Таким образом, если $w \in B_{\frac{\delta(\varepsilon)}{4L_\alpha}}(z)$, то $f(w) \leqslant f(z) + L_\alpha \frac{\delta(\varepsilon)}{4L_\alpha} = f(z) + \frac{1}{4}\delta(\varepsilon) \leqslant \alpha$. Поэтому

$$B_{\frac{\delta(\varepsilon)}{4L_\alpha}}\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset \mathcal{L}(\alpha),$$

откуда следует утверждение теоремы. ■

Из теоремы сразу следует, что $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to +0$ (см. также [2]).

Кроме того, как следует из свойств модуля выпуклости множества, все лебеговы множества f ограничены и мы далее можем считать, что $\min\limits_{x\in E} f(x) = f(0) = 0$.

Напомним, что график функции $f : E \to \mathbb{R}$ есть множество

$$\operatorname{graph} f = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid \mu = f(x)\},$$

а надграфик функции $f : E \to \mathbb{R}$ есть множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid \mu \geqslant f(x)\}.$$

Лемма 1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ полунепрерывная снизу равномерно выпуклая функция с модулем выпуклости δ. Пусть $\alpha > \min\limits_{x\in E} f(x)$. Тогда множество $A = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid \mu \leqslant \alpha\} \cap \operatorname{graph} f$ является частью границы равномерно выпуклого множества в том смысле, что для любых точек $z_0, z_1 \in A$ выполнено включение

$$\frac{z_0+z_1}{2} + \frac{\delta\left(\frac{\|z_0-z_1\|_0}{L_\alpha+1}\right)}{4(L_\alpha+1)} B_1^0(0,0) \subset \operatorname{epi} f.$$

Здесь норма $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\| + |\cdot|$, а $B_r^0(x_0,\mu_0) = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid \|x-x_0\| + |\mu-\mu_0| \leqslant r\}$. $\square$

Доказательство. Для $\alpha > \min\limits_{x\in E} f(x)$ обозначим

$$S_\alpha = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid \mu \leqslant \alpha\}.$$

Пусть точки $z_0, z_1 \in A$ таковы, что $z_i = (x_i, f(x_i))$ и $f(x_i) \leqslant \alpha$, $i = 0, 1$. Тогда $|f(x_0) - f(x_1)| \leqslant L_\alpha\|x_0 - x_1\|$ и, значит, $\|z_0 - z_1\|_0 \leqslant (L_\alpha + 1)\|x_0 - x_1\|$. Отсюда

$$\|x_0 - x_1\| \geqslant \frac{\|z_0 - z_1\|_0}{L_\alpha + 1}.$$

В силу равномерной выпуклости f имеем

$$f(x_{1/2}) \leqslant \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) - \frac{1}{4}\delta(\|x_0 - x_1\|) \leqslant \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) - \frac{1}{4}\delta\left(\frac{\|z_0 - z_1\|_0}{L_\alpha + 1}\right).$$

Положим $h = \frac{1}{4}\delta\left(\frac{\|z_0 - z_1\|_0}{L_\alpha + 1}\right)$. Определим $\beta = \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) \leqslant \alpha$, $z = (x_{1/2}, \beta) \in \operatorname{epi} f$ и множество

$$K = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid L_\alpha\|x_{1/2} - x\| \leqslant \mu - (\beta - h)\}.$$

Отметим, что K — конус с вершиной $(x_{1/2}, \beta - h) \in \operatorname{epi} f$ и «раствора» L_α.

В силу определения L_α и по построению K имеем

$$K \cap S_\alpha \subset \operatorname{epi} f \cap S_\alpha,$$

откуда

$$\begin{aligned} B^0_{\frac{h}{L_\alpha+1}}(x_{1/2},\beta) \cap S_\beta &= \\ = \{(x,\mu) \in E\times\mathbb{R} \mid (L_\alpha+1)(\|x - x_{1/2}\| &+ \\ +\beta - \mu) \leqslant h\} \cap S_\beta \subset K \cap S_\beta &\subset \operatorname{epi} f \cap S_\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что

$$B_{\frac{h}{L_\alpha}}(x_{1/2}) \subset \mathcal{L}_f(\beta),$$

отсюда и из включения (2)

$$B^0_{\frac{h}{L_\alpha+1}}(x_{1/2},\beta) \subset \operatorname{epi} f.$$

Последнее включение в точности означает, что

$$\frac{z_0+z_1}{2} + B^0_{\frac{h}{L_\alpha+1}}(0,0) \subset \operatorname{epi} f.$$

■

Обозначим через $N(A, y)$ нормальный конус к выпуклому множеству A в точке $y \in A$, т. е.

$$N(A, y) = \{p \in E^* \mid (p, y - x) \geqslant 0 \quad \forall x \in A\}.$$

Лемма 2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — выпуклая полунепрерывная снизу функция. Пусть $\alpha > \inf\limits_{x\in E} f(x)$. Пусть $\operatorname{int}\mathcal{L}(\alpha) \neq \varnothing$ и $y \in \partial\mathcal{L}(\alpha)$, т. е. $f(y) = \alpha$. Тогда

$$N(\mathcal{L}(\alpha), y) = \operatorname{cone}\partial f(y). \qquad \square$$

Доказательство. Смотри [3, Пример 1.16.5].

Напомним, что суммой Минковского множеств $A, B \subset E$ называется множество $\{a + b \mid a \in \in A, \quad b \in B\}$, расстояние в метрике Хаусдорфа между множествами $A, B \subset E$ есть

$$h(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0), B \subset A + B_r(0)\}.$$

Следующая лемма уточняет следствие 2.3 из [10].

Лемма 3. Пусть функция f удовлетворяет определению 1 и $\min\limits_{x \in E} f(x) = f(0) = 0$. Тогда для любых $\beta > \alpha \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$h\left(\mathcal{L}(\alpha), \mathcal{L}(\beta)\right) \leqslant \varphi_\alpha\left(\beta - \alpha\right), \tag{3}$$

где $\varphi_\alpha(\cdot)$ — обратная функция к функции $g(t) = K_\alpha t + \delta(t)$, $t \geqslant 0$. □

Доказательство. Отметим, что лебеговы множества функции f равномерно выпуклы, значит пространство E рефлексивно.

Включение $\mathcal{L}(\alpha) \subset \mathcal{L}(\beta)$ очевидно. Зафиксируем $x \in \partial\mathcal{L}(\beta)$. Пусть y есть метрическая проекция точки x на множество $\mathcal{L}(\alpha)$ (y существует в силу рефлексивности E), очевидно, что $y \in \partial\mathcal{L}(\alpha)$. Как показано в [10], субградиентное неравенство для равномерно выпуклой функции может быть записано в виде: $p \in \partial f(y)$ влечет $f(z) \geqslant f(y) + (p, z - y) + \delta(\|z - y\|)$, для всех $z \in E$.

При $\alpha > 0$ в силу леммы 2 во множестве $\partial f(y)$ найдется вектор $p \neq 0$, сонаправленный с вектором $\mathcal{J}(x - y) \in N(\mathcal{L}(\alpha), y)$. Здесь $\mathcal{J}(x - y) \in E^*$, единичной длины, и такой, что $(\mathcal{J}(x - y), x - y) = \|x - y\|$.

Взяв $z = x$, мы получаем

$$\begin{aligned} \beta = f(x) \geqslant f(y) + (p, x - y) + \delta(\|x - y\|) = \\ = \alpha + \|p\|\|x - y\| + \delta(\|x - y\|) \geqslant \\ \geqslant \alpha + K_\alpha\|x - y\| + \delta(\|x - y\|), \end{aligned}$$

откуда $\|x - y\| \leqslant \varphi_\alpha(\beta - \alpha)$.

При $\alpha = 0$ для получения предыдущей оценки достаточно взять $p = 0 \in \partial f(0)$.

Поскольку точка $x \in \partial\mathcal{L}(\beta)$ произвольная, то $h\left(\mathcal{L}(\alpha), \mathcal{L}(\beta)\right) \leqslant \varphi_\alpha(\beta - \alpha)$. ■

Следующая теорема является уточненным вариантом [4, теорема 4].

Теорема 2. Пусть $A \subset E$ — равномерно выпуклое множество с модулем выпуклости δ_A. Пусть $E = L \oplus l$, где $\operatorname{co}\dim L = 1$, $\dim l = 1$. Отождествим l с осью значений. Пусть P_L — проектор на L параллельно l и $C = \|P_L\|$. Определим функцию

$$f : P_L A \to l, \quad f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\} \quad \forall x \in P_L A. \tag{4}$$

Тогда функция f равномерно выпуклая на своей области определения $P_L A$ с модулем выпуклости $\delta(\varepsilon) = 2\delta_A\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)$. □

Доказательство. Заметим, что $C = \|P_L\| \geqslant 1$ (так как P_L оставляет точки L неподвижными). Пусть $x_0, x_1 \in \operatorname{graph} f$, $\|x_0 - x_1\| = \varepsilon > 0$, $z = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. По условию теоремы $B_{\delta_A(\varepsilon)}(z) \subset A \subset \operatorname{epi} f$. Из гомотетии с неподвижной точкой x_0 и коэффициентом 2λ, где $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, имеем

$$\begin{aligned} f(P_L x_\lambda) \leqslant (1 - \lambda) f(P_L x_0) + \lambda f(P_L x_1) - 2\lambda\delta_A(\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant (1 - \lambda) f(P_L x_0) + \lambda f(P_L x_1) - \lambda(1 - \lambda) 2\delta_A(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

С учетом формулы $C\varepsilon = C\|x_0 - x_1\| \geqslant \|P_L x_0 - P_L x_1\|$ мы получаем, что

$$\begin{aligned} f(P_L x_\lambda) \leqslant (1 - \lambda) f(P_L x_0) + \lambda f(P_L x_1) - \\ - \lambda(1 - \lambda) 2\delta_A\left(\frac{\|P_L x_0 - P_L x_1\|}{C}\right). \end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается и при $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. ■

Теоремы 1 и 2 имеют общий характер и позволяют единым способом доказать многие известные результаты.

Пример 1. Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}$ есть сумма ортогональных подпространств $l \oplus L$, $\dim l = 1$. Покажем, что если в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество A есть пересечение шаров радиуса $R > 0$, то функция f из (4) сильно выпукла с модулем $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2R}$. Этот результат анонсирован в [4, теорема 4].

Поскольку A есть пересечение шаров радиуса R, то модуль выпуклости A не меньше модуля выпуклости шара радиуса R, т. е. в теореме 2 мы можем взять для всех допустимых по смыслу $\varepsilon > 0$

$$\delta_A(\varepsilon) = R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \sim \frac{\varepsilon^2}{8R}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Переписывая верхнюю строчку формулы (5) для точек $x_0, x_1 \in P_L A$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, получаем

$$f(x_{\frac{1}{2}}) \leqslant \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) - \delta_A(\|x_0 - x_1\|).$$

Пусть $R_1 > R$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы

$$\delta_A(\varepsilon) = R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{8R_1} \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Отсюда получаем, что для любых точек $x_0, x_1 \in P_L A$ таких, что $\|x_0 - x_1\| \leqslant \varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} f(x_{\frac{1}{2}}) \leqslant \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) - \delta_A\left(\|x_0 - x_1\|\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2R_1} \|x_0 - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, как легко показать, эквивалентно неравенству выпуклости для функции $g(x) = f(x) - \frac{1}{2R_1}\|x\|^2$ с $\lambda = \frac{1}{2}$ и при условии, что $\|x_0 - x_1\| \leqslant \varepsilon_0$. Но, как следует из соображений индукции и непрерывности функции f на $P_L A$, локальная выпуклость функции g (с $\lambda = \frac{1}{2}$) влечет глобальную, следовательно функция $g(x)$ выпукла в обычном смысле: для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in [0, 1]$

$$g(x_\lambda) \leqslant (1 - \lambda) g(x_0) + \lambda g(x_1).$$

Отсюда получаем для всех $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in [0,1]$, что

$$f(x_\lambda) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - \\ -\lambda(1-\lambda)\frac{1}{2R_1}\|x_0 - x_1\|^2 \quad \forall R_1 > R.$$

Предельный переход по $R_1 \to R+0$ завершает доказательство. ■

Пример 2. Пусть функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ равномерно выпукла с модулем $\delta(\varepsilon) = \frac{\varkappa}{2}\varepsilon^2$. Как следует из примера 1, это значит, что функция $g(x) = f(x) - \frac{\varkappa}{2}\|x\|^2$ выпукла.

Тогда по теореме 1 лебеговы множества такой функции равномерно выпуклые с модулем

$$\delta_{\mathcal{L}(\alpha)}(\varepsilon) \geqslant \frac{\varkappa}{8L_\alpha}\varepsilon^2.$$

Итак, $\delta_{\mathcal{L}(\alpha)}(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^2$, $C = \frac{\varkappa}{8L_\alpha}$. Применяя результаты [7], получаем, что лебегово множество уровня α для такой функции есть пересечение шаров радиуса $R \leqslant \frac{1}{8C} = \frac{L_\alpha}{\varkappa}$. ■

Литература

1. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Сильная выпуклость множеств уровня сильно выпуклой функции // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: междувед. сб. / М.: МФТИ. – 1996. – С. 46–52.

2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

3. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007. 2-е изд. исправленное и дополненное. 440 с.

4. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. – 1996. – Т. 187:2. – С. 103–130.

5. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.

6. *Balashov M.V., Repovš D.* Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – 360:1. – P. 307–316.

7. *Balashov M.V., Repovš D.* Uniformly convex subsets of the Hilbert space with modulus of convexity of the second order // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – 377:2, P. 754–761.

8. *Polyak B.T.* Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions // Soviet Math. – 1966. – N 7. – P. 72–75.

9. *Vial J.-Ph.* Strong convexity of sets and functions // J. of Math. Economics. – 1982. – 9: 1–2. – P. 187–205.

10. *Zalinescu C.* On uniformly convex functions // Journal of Math. Anal. Appl. – 1983. – 95:2. – P. 344–374.

Поступила в редакцию 13.01.2011